MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral I
1º semestre de 2025
Agenda 04

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

O conceito de limite é um dos mais importantes do Cálculo. Nestas notas daremos uma definição precisa de limite para o caso em que o limite é finito.

O cálculo de limites é feito quando desejamos prever o comportamento de certa função em um ponto baseando-nos no conhecimento que temos do comportamento desta função em uma vizinhança dele. Para o cálculo do limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em um ponto $x_0 \in A'$, note que não é necessário que $x_0 \in A$. De fato, pontos de acumulação de A não são, necessariamente, pontos do conjunto A (lembre-se que 0 é ponto de acumulação de $A = \{1/n \mid n \in \mathbb{N}\}$, mas $0 \notin A$).

Nesta agenda introduziremos e analisaremos o conceito de limite, central no estudo do Cálculo Diferencial e Integral.

1 A definição de limite: os εs e os δs

Informalmente, dizemos que o limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conforme x se aproxima de (ou tende a) $x_0 \in \mathbb{R}$ é o número real $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, **a fim de obter valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L for suficiente tomarmos valores de x suficientemente próximos de x_0**.

Usando o linguajar introduzido na aula anterior, podemos reformular do seguinte modo: o limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conforme x se aproxima de (ou tende a) $x_0 \in \mathbb{R}$ é

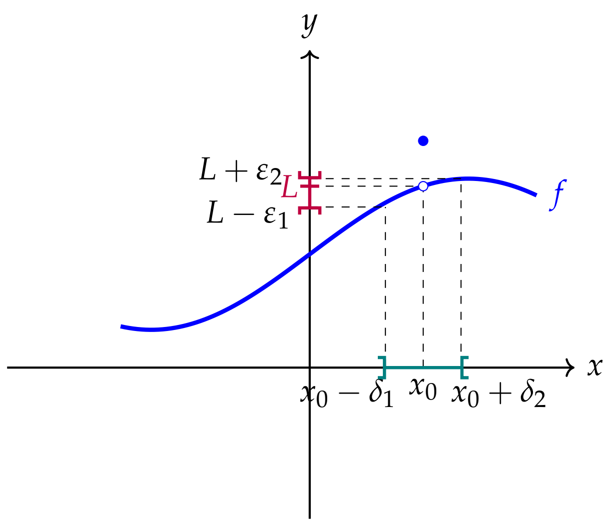
*jeancb@ime.usp.br

o número real $L \in \mathbb{R}$ se, e somente se, **a toda vizinhança de L, (L, ε) corresponder alguma vizinhança de x_0, (x_0, δ) de modo que:**

$$f[(x_0, \delta) \cap \operatorname{dom}(f)] \subseteq (L, \varepsilon),$$

ou seja, tal que a imagem da parte da vizinhança de x_0 por f esteja inteiramente contida na vizinhança pré-fixada de L.

Considere a figura abaixo:



A locução **"o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 é L"** deve ser entendida, intuitivamente por:

> "É possível obter valores de $f(x)$ tão próximos de L quanto se queira, bastando para tanto tomarmos valores de x próximos o suficiente de x_0."

A intuição acima pode ser traduzida em termos matemáticos bem precisos. Para isto, usamos a noção de vizinhança, bem como fazemos o uso de inequações para traduzir a relação de pertencimento de um ponto a uma vizinhança.

Por "valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L" entenderemos o seguinte: para qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrado, $f(x)$ a uma distância de L menor que ε, ou ainda, usando inequações $|f(x) - L| < \varepsilon$. Por sua vez, por valores de x "próximos de x_0" entenderemos "valores de x tais que $|x - x_0| < \delta$, para δ que consideramos pequeno".

Definição 1 (limite). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto não vazio, $x_0 \in A'$ (ou seja, x_0 é um ponto de acumulação de A), $L \in \mathbb{R}$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais. Dizemos que* ***o limite de*** *$f(x)$* ***conforme*** *x* ***tende a*** *x_0* ***é*** *L se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$, não importa quão pequeno seja, existir um $\delta > 0$ tal que para qualquer $x \in (x_0, \delta) \cap A$ (ou seja, se para qualquer $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$) tivermos $f(x) \in (L, \varepsilon)$ (ou seja, $|f(x) - L| < \varepsilon$). Neste caso, escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Em linguagem matemática, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta)) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

Em seguida veremos alguns limites.

Exemplo 2. *Consideremos a função constante igual a k,*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & k \end{array}$$

e um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Afirmamos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = k.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$. Para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$|f(x) - k| = |k - k| = 0 < \varepsilon$$

Em particular, para qualquer $\delta > 0$ que tomemos, se x for tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, teremos $|f(x) - k| < \varepsilon$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ (vamos escolher um número positivo qualquer, apenas para garantir que um tal δ existe, digamos $\delta = 1$), e teremos:

$$((x \in \mathbb{R})\&(0 < |x - x_0| < 1)) \Rightarrow |f(x) - k| < \varepsilon$$

ou seja,

$$(x \in \mathbb{R})\&(x \in (x_0, 1)) \Rightarrow (f(x) \in (k, \varepsilon)),$$

uma vez que para todo $x \in R$ - e em particular, para $x \in (x_0, \delta)$ vale:

$$|f(x) - k| = |k - k| = |0| = 0 < \varepsilon.$$

Agora vejamos um exemplo um tanto menos trivial:

Exemplo 3 (limite da função afim). *Dados $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, consideremos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a \cdot x + b \end{array}$$

Afirmamos que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = a \cdot x_0 + b$$

Para garantir isto, devemos verificar que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existirá $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in \mathbb{R}) \& (0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon).$$

Uma condição equivalente a:

$$|f(x) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon$$

é:

$$|(a \cdot x + b) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon$$

ou seja:

$$|a \cdot (x - x_0)| < \varepsilon,$$

pois se ocorre $|a \cdot (x - x_0)| < \varepsilon$, então ocorre $|a \cdot (x - x_0) + b - b| = |a \cdot x - a \cdot x_0 + b - b| = |(a \cdot x + b) - (a \cdot x_0 - b)| = |f(x) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon$.

Logo, basta garantirmos que:

$$|a \cdot (x - x_0)| < \varepsilon$$

e teremos $|(a \cdot x + b) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon$.

Como $a \neq 0$, a desigualdade $|a \cdot (x - x_0)| < \varepsilon$ é equivalente a escrever:

$$|x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|}$$

Assim, se tivermos garantido que $0 < |x - x_0| < \varepsilon / |a|$, teremos, por implicação, que:

$$|f(x) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon.$$

Assim, basta tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|}$, e teremos:

$$0 < |x - x_0| < \delta \iff 0 < |x - x_0| < \frac{\varepsilon}{|a|} \iff 0 < |a| \cdot |x - x_0| < \varepsilon \iff 0 < |a \cdot (x - x_0)| < \varepsilon$$

$$\iff 0 < |a \cdot (x - x_0) + b - b| = |(a \cdot x + b) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon \iff |f(x) - (a \cdot x_0 + b)| < \varepsilon$$

Segue, portanto, que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} a \cdot x + b = a \cdot x_0 + b.$$

Proposição 4. *Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

Proof. Pelas **Fórmulas de Prostaférese** (**Teorema 15** das Notas de Aula da Semana 02), tem-se, para quaisquer $x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| = \left|2 \cdot \sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \cdot \left|\cos\left(\frac{x + x_0}{2}\right)\right|$$

e portanto:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|$$

Seja $r > 0$ o número dado no item (5) do **Teorema 1** das Notas da Aula 02. Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < 2r$, segue que:

$$|\sin(x) - \sin(x_0)| \leq 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \min\{2r, \varepsilon\}$, e teremos:

$$(x \in \mathbb{R}) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\sin(x) - \sin(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

□

Lema 5. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Então:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|.$$

Proof. Sabe-se que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta)) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Mas tem-se:

$$||f(x)| - |L|| \leq |f(x) - L| < \varepsilon$$

e:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta)) \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < \varepsilon,$$

ou seja:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|.$$

□

Se uma certa função admite limite em um ponto de acumulação do seu domínio, então existe uma vizinhança deste ponto restrita à qual a função é limitada. Este é o conteúdo do seguinte:

Teorema 6. *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

Então existem $K > 0$ e $\eta > 0$ tais que:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |f(x)| < K)$$

Proof. Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, pelo **Lema 5** tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} |f(x_0)| = |L|,$$

de modo que dado $\varepsilon = 1 > 0$ existe $\eta > 0$ tal que:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < 1$$

ou, equivalentemente,

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow |L| - 1 < |f(x)| < |L| + 1$$

Mas sempre vale $-|L| - 1 \leq |L| - 1$, logo, tem-se:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow -|L| - 1 < |L| - 1 < |f(x)| < |L| + 1$$

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow -|L| - 1 < |f(x)| < |L| + 1$$

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow -(|L| + 1) < |f(x)| < |L| + 1$$

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow |f(x)| < |L| + 1,$$

bastando tomarmos, portanto, $K = |L| + 1$ e o η correspondente a $\varepsilon = 1$, e teremos:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta)) \Rightarrow |f(x)| \leq K$$

□

2 Propriedades Aritméticas dos Limites

Nesta seção apresentamos as propriedades aritméticas dos limites: limite da soma, do produto, do quociente e da recíproca.

Começamos apresentando um teorema que nos garante que se o limite de uma função em certo ponto é não nulo, então existe uma vizinhança deste ponto onde a função não se anula. Mostramos, em seguida, que o limite do módulo de uma função é o módulo do limite[1]. Em posse deste resultado, mostra-se que, sob as condições apropriadas, o limite da função recíproca é a recíproca do limite.

[1] utilizando o fato de que, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, $||a| - |b|| \leq |a - b|$.

Lema 7 (teorema do não-anulamento). *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$$

Então existem $\eta > 0$ e $K > 0$ tais que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow (K \leq |f(x)|)$$

Proof. Uma vez que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, tem-se que $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$.

Como $L \neq 0$ e $\lim_{x \to x_0} |f(x)| = |L|$, dado $\varepsilon = \frac{|L|}{2} > 0$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow ||f(x)| - |L|| < \frac{|L|}{2}$$

ou seja, tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow \frac{|L|}{2} < |f(x)| < \frac{3|L|}{2}$$

Logo, basta tomarmos $K = \dfrac{|L|}{2}$, e teremos:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow K \leq |f(x)|$$

□

O lema acima nos garante, em particular, que se o limite de uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ conforme x tende a $x_0 \in A'$ é diferente de 0 então existe uma vizinhança de x_0, ou seja, um $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in A)((x \in (x_0, \eta)) \Rightarrow f(x) \neq 0)$$

Lema 8 (limite da recíproca de uma função). *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais, $x_0 \in A'$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$$

então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

Proof. Seja $\varepsilon > 0$ um número fixado.

Como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \neq 0$, existem $K > 0$ e $\eta > 0$ tais que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow (K \leq |f(x)|),$$

ou seja,

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow \left(\frac{1}{|f(x)|} \leq \frac{1}{K}\right) \tag{1}$$

De novo, uma vez que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, dado o número positivo $K \cdot |L| \cdot \varepsilon > 0$, existe $\zeta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \zeta) \Rightarrow |f(x) - L| < K \cdot |L| \cdot \varepsilon \tag{2}$$

Tomemos, assim, $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$, de modo que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (0 < |x - x_0| < \eta)\&(0 < |x - x_0| < \zeta).$$

Segue disso que, para qualquer $x \in A$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, vale:

$$\left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| = \left|\frac{L - f(x)}{f(x) \cdot L}\right| = \frac{1}{|f(x)|} \cdot \frac{1}{|L|} \cdot |f(x) - L| \overset{(1)}{\leq} \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{|L|} \cdot |f(x) - L| \overset{(2)}{<}$$

$$< \frac{1}{K} \cdot \frac{1}{|L|} \cdot K \cdot |L| \cdot \varepsilon = \varepsilon$$

Uma vez que dado qualquer número positivo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \left|\frac{1}{f(x)} - \frac{1}{L}\right| < \varepsilon,$$

tem-se, por definição:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{L}$$

$\square$

Teorema 9 (propriedades aritméticas dos limites). *Sejam $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x_0 \in A'$, $L, M \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \ \ e \ \ \lim_{x\to x_0} g(x) = M.$$

Tem-se:

(1) ***Limite da soma:*** $\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L + M$

(2) ***Limite da diferença:*** $\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = L - M$

(3) ***Limite do produto:*** $\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x)) \cdot (\lim_{x\to x_0} g(x)) = L \cdot M$

(4) ***Limite do quociente:*** *Se* $M \neq 0$ $\lim_{x\to x_0} \left(\dfrac{f}{g}\right)(x) = \dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \dfrac{L}{M}$.

Proof. Ad (1): Seja $\varepsilon > 0$ um número fixado dado. Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2}$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \left(|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow \left(|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (ou seja, se tomarmos δ como sendo o menor dos números δ_1, δ_2), teremos, como $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

e:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

e portanto, se $x \in A$ tem-se:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Desta forma, dado aquele $\varepsilon > 0$ fixado no começo, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow |(f+g)(x) - (L+M)| = |f(x) + g(x) - L - M| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Ad (2): Seja $\varepsilon > 0$ um número <u>fixado</u> dado. Como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ e $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2}$ existem $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow \left(|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

e:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow \left(|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ (ou seja, se tomarmos δ como sendo o <u>menor</u> dos números δ_1, δ_2), teremos, como $\delta \leq \delta_1$ e $\delta \leq \delta_2$,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_1$$

e:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow 0 < |x - x_0| < \delta_2$$

e portanto, se $x \in A$ tem-se:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ 0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

Desta forma, dado aquele $\varepsilon > 0$ fixado no começo, existe $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ tal que:

$$\begin{aligned} &(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow \\ &\quad \Rightarrow |(f - g)(x) - (L - M)| = |f(x) - g(x) - L + M| \leq |f(x) - L| + |-g(x) + M| = \\ &\quad\quad = |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Ad (3): Seja $\varepsilon > 0$ um número <u>fixado</u> dado. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $L \neq 0$ e $M \neq 0$.

Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, existem um número positivo K e $\eta > 0$ tais que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \eta) \Rightarrow |g(x)| \leq K.$$

Também, como $\lim_{x\to x_0} f(x) = L$, dado $\frac{\varepsilon}{2K} > 0$, existe $\kappa > 0$ tal que:

$$((x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \kappa)) \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2K}.$$

Como $\lim_{x\to x_0} g(x) = M$, finalmente, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2|L|}$ existe $\zeta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \zeta) \Rightarrow \left(|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|}\right)$$

Seja $\delta = \min\{\eta, \kappa, \zeta\}$, ou seja, δ é o menor dos números η, κ e ζ, de modo que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (0 < |x - x_0| < \eta)\&(0 < |x - x_0| < \kappa)\&(0 < |x - x_0| < \zeta)$$

Tem-se, assim, que se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, vale:

$$\begin{aligned}|(f \cdot g)(x) - L \cdot M| &= |f(x) \cdot g(x) - L \cdot M| = |f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x) + L \cdot g(x) - L \cdot M| \leq \\ &\leq |f(x) \cdot g(x) - L \cdot g(x)| + |L \cdot g(x) - L \cdot M| = |g(x)||f(x) - L| + |L| \cdot |g(x) - M| \leq \\ &\leq K \cdot |f(x) - L| + |L| \cdot |g(x) - M| \leq K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + |L| \cdot \frac{\varepsilon}{2|L|} = \varepsilon\end{aligned}$$

Como dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |(f \cdot g)(x) - L \cdot M| < \varepsilon,$$

segue que:

$$\lim_{x \to x_0} (f \cdot g)(x) = L \cdot M.$$

Ad (4): Pelo **Lema 8**, como $\lim_{x \to x_0} g(x) = M \neq 0$, segue que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{M}.$$

Uma vez que $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, segue do item (3) deste teorema que:

$$\lim_{x \to x_0} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

□

Segue imediatamente do item (3) do **Teorema 9** e do **Exemplo 2** que se $\lambda \in \mathbb{R}$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, então:

$$\lim_{x \to x_0} (\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot \lim_{x \to x_0} f(x) = \lambda \cdot L$$

3 Limites Laterais

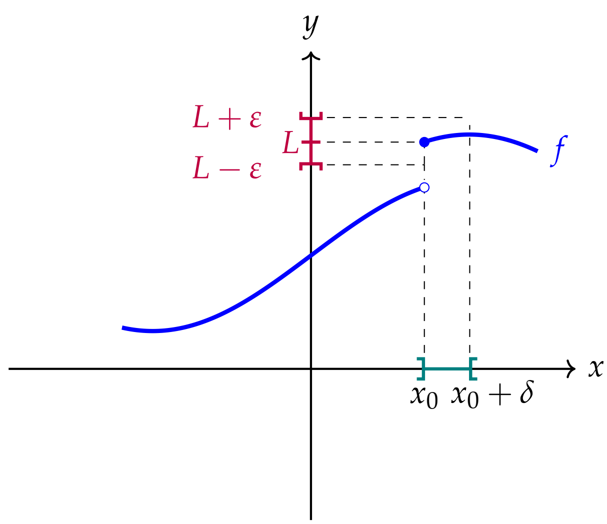
Definição 10 (limite lateral à direita). *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à esquerda e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que "O limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela direita é L" se, e somente se, para controlar a distância entre $f(x)$ e L for suficiente controlar a distância entre pontos x, à direita de x_0, e x_0. Escrevemos, neste caso:*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L$$

para expressar a sentença: "para todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $x_0 < x < x_0 + \delta$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$".

Observe a figura abaixo, em que se ilustra o fato de termos:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L$$



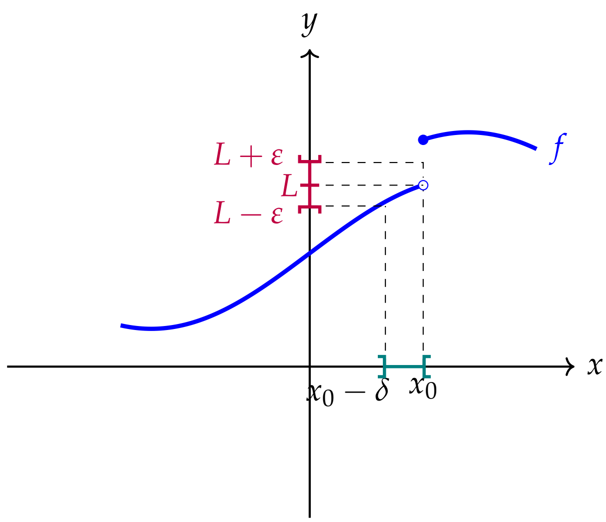
Definição 11 (limite lateral à esquerda). *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação à direita e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que "O limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela esquerda é L" se, e somente se, para controlar a distância entre $f(x)$ e L for suficiente controlar a distância entre pontos x, à esquerda de x_0, e x_0. Escrevemos, neste caso:*

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L$$

para expressar a sentença: "para todo $\varepsilon > 0$ é possível encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $x_0 - \delta < x < x_0$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$".

Observe a figura abaixo, em que se ilustra o fato de termos:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L$$



Teorema 12. *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação e $L \in \mathbb{R}$. Se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

então:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L \quad e \quad \lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L$$

Proof. De fato, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ tem-se que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, se:

$$x_0 - \delta < x < x_0$$

tem-se $0 < |x - x_0| < \delta$, e portanto $|f(x) - L| < \varepsilon$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x_0 - \delta < x < x_0$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja:

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = L.$$

Dado $\varepsilon > 0$, se:

$$x_0 < x < x_0 + \delta$$

tem-se $0 < |x - x_0| < \delta$, e portanto $|f(x) - L| < \varepsilon$. Assim, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $x_0 < x < x_0 + \delta$ implica $|f(x) - L| < \varepsilon$, ou seja:

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = L.$$

□

Utilizamos frequentemente o teorema acima em sua forma contrapositiva, ou seja: se os limites laterais de uma função em um ponto x_0 são distintos, então o limite não existe.

Teorema 13 (unicidade do limite). *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, $x_0 \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de D. Se existir:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

então o limite é único.

Proof. Suponhamos, por absurdo, que existam dois números distintos, M, N tais que valem, simultaneamente:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

e:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = M$$

Consideremos $\varepsilon = \dfrac{|L - M|}{2} > 0$. Por um lado, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{|L - M|}{2}$$

Por outro lado, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta_2 \Rightarrow |f(x) - M| < \frac{|L - M|}{2}$$

Considerando, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |L - M| = |L - f(x) + f(x) - M| \leq |L - f(x)| + |f(x) - M| <$$

$$< \frac{|L - M|}{2} + \frac{|L - M|}{2} = |L - M|,$$

ou seja,

$$|L - M| < |L - M|,$$

o que é um absurdo. O absurdo provém de supormos que $L \neq M$. Assim, sempre que o limite existir, ele será único. $\square$

4 "O" Teorema

Nesta seção apresentamos um teorema, que denominaremos por **"o teorema"**, que nos permitirá calcular os mais diversos limites.

Ao calcularmos limites de certas expressões em certas singularidades (pontos onde essas expressões não estão definidas), veremos que frequentemente podemos substitui-la por uma expressão que coincida com a original numa vizinhança da singularidade e que, além disto, esteja definida naquela singularidade - de modo a poder ser "calculada" ali.

Teorema 14 (**"O" teorema**). *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$ tais que existe algum $\eta > 0$ tal que:*

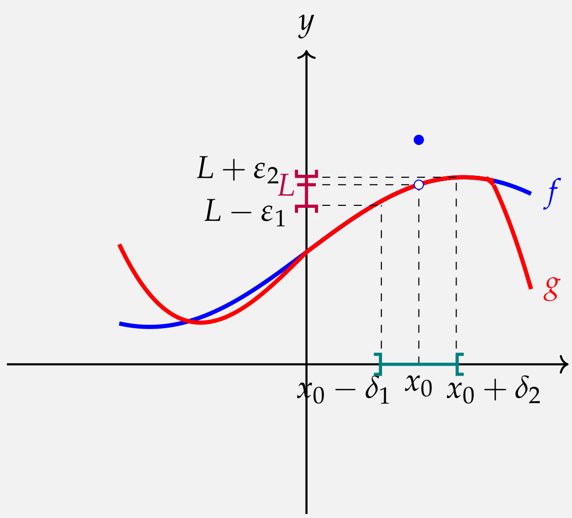
$$(\forall x \in A)(0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x))$$

Se existe $L \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{x \to x_0} g(x) = L$$

então:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$



Proof. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como, por hipótese, $\lim_{x \to x_0} g(x) = L$, existe $\zeta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \zeta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon$$

Consideremos $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$. Então tem-se:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow (0 < |x - x_0| < \eta) \& (0 < |x - x_0| < \zeta)$$

o que implica:

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) = g(x) \tag{3}$$

e:

$$0 < |x - x_0| < \zeta \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \tag{4}$$

Logo, se $x \in A$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se:

$$|f(x) - L| \stackrel{(3)}{=} |g(x) - L| \stackrel{(4)}{<} \varepsilon$$

Por definição,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = L.$$

$\square$

Coloquialmente, se duas funções coincidem em um intervalo ao redor de um ponto de acumulação e uma delas admite limite conforme sua variável tende àquele ponto, então as duas funções têm o mesmo limite.

References

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Griffiths, H.B., Hilton, P.J., **Matemática Clássica - Uma Interpretação Contemporânea**, tradução de Elza F. Gomide. São Paulo, Edgard Blücher, Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Kasner, E., Newmann, J., **Matemática e Imaginação**, Biblioteca de Cultura Científica, tradução de Jorge Fortes, Zahar Editores, Rio de Janeiro, 1968.