MAT0220 - Cálculo IV
Agenda 05: Cálculo com Funções de Variável Complexa

Professora Marta Cilene Gadotti* e Professor Jean Cerqueira Berni†

Sumário

*martacg@unesp.br
†jeancb@ime.usp.br

1 Integral de Função Complexa

1.1 Integral ao longo de uma curva

Lembremos que uma curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ é um **arco quando** α' **for uma função contínua** ($\alpha \in C^1$) e α é simples quando $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$, $t_1 \neq t_2$, com t_1, $t_2 \in (a,b)$. Seja $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo). Uma curva $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ é uma **curva em** Ω, quando seu traço estiver contido em Ω.

O objetivo a seguir é construir a definição da integral de uma função complexa f ao longo da curva α, cuja notação é

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_\alpha f.$$

Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa contínua e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω. Neste caso a função $\gamma(t) = f(\alpha(t))$, com $t \in [a,b]$, é uma curva contínua.

Para construir a integral, vamos particionar o traço de α e, com isso, também particionamos o intervalo $[a,b]$. Essa construção nos motiva a definir a integral de f de $\alpha(a)$ a $\alpha(b)$, usando a integral de Riemann- Stieltjes de γ. Vamos a construção.

Seja $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, com $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$, uma partição arbitrária do intervalo $[a,b]$. Em cada subintervalo $[t_{j-1}, t_j]$ consideramos o arco que se inicia em $\alpha(t_{j-1})$ e termina em $\alpha(t_j)$ e também um ponto intermediário deste trecho da curva, isto é, $\alpha(\epsilon_j) \in (\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j))$, com $\epsilon_j \in (t_{j-1}, t_j)$. Aqui $(\alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j))$ denota o trecho do traço de α que começa em $\alpha(t_{j-1})$ e termina em $\alpha(t_j)$. (Não confundir com um intervalo, pois a notação é a mesma).

Vamos calcular a expressão

$$\sum_{j=1}^{n} f(\alpha(\epsilon_j))(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})).$$

Para isto, usando $\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t)$, temos

$$\sum_{j=1}^{n} f(\alpha(\epsilon_j))[\alpha_1(t_j) - \alpha_1(t_{j-1}) + i(\alpha_2(t_j) - \alpha_2(t_{j-1}))].$$

Como α é um arco, podemos aplicar o Teorema do Valor Médio para as funções reais α_1 e α_2. Assim, existem ϵ_j', $\epsilon_j'' \in (t_{j-1}, t_j)$ tais que:

$$\sum_{j=1}^{n} f(\alpha(\epsilon_j))(\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})) = \sum_{j=1}^{n} f(\alpha(\epsilon_j))(\alpha_1'(\epsilon_j') + i\alpha_2'(\epsilon_j''))\Delta t_j.$$

Calculando o limite quando $\|P\| \to 0$, com P partição de $[a, b]$, os pontos ϵ_j, ϵ_j', ϵ_j'' tendem a se aproximar. Assim, tem-se a seguinte

Definição 1. *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função de variável complexa contínua $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω, definimos*

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{j=1}^{n} f(\alpha(\epsilon_j))[\alpha_1'(\epsilon_j') + i\alpha_2'(\epsilon_j'')]\Delta t_j = \int_a^b \underbrace{f(\alpha(t))}_{\gamma(t)} \alpha'(t)\, dt.$$

Observação 2. *Note que o limite dado na definição acima sempre existe se f é contínua e α é uma curva suave - hipóteses que iremos assumir sobre essas duas funções.*

Observação 3. *Denotando $z = x + yi$, podemos reescrever a integral de uma função complexa $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ usando diferenciais. Basta notar que*

$$\begin{aligned}
\int_{\alpha} f &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt = \int_a^b [u(\alpha_1(t), \alpha_2(t)) + iv(\alpha_1(t), \alpha_2(t))](\alpha_1'(t) + i\alpha_2'(t))\, dt \\
&= \int_a^b [u(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\alpha_1'(t) - v(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\alpha_2'(t)]\, dt + \\
&+ i\int_a^b [u(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\alpha_2'(t) + v(\alpha_1(t), \alpha_2(t))\alpha_1'(t)]\, dt \\
&= \int_{\alpha} (u(x, y)\, dx - v(x, y)\, dy) + i\int_{\alpha} (u(x, y)\, dy - v(x, y)\, dx)
\end{aligned}$$

2 Exemplos e Propriedades

Nesta seção veremos alguns exemplos e propriedades importantes de integração complexa.

Exemplo 4. *Considere $f(z) = k$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ um arco. Então*

$$\int\limits_{\alpha} f = \int\limits_{a}^{b} k\alpha'(t)\,dt = k\int\limits_{a}^{b} \alpha'(t)\,dt = k(\alpha(b) - \alpha(a)).$$

Neste caso, o valor da integral depende apenas dos pontos $\alpha(b)$ e $\alpha(a)$ e independe do formato da curva.

No caso de α ser uma curva fechada e $f(z) = k$, tem-se

$$\int\limits_{\alpha} f = 0.$$

Pergunta: Será que tal propriedade observada no exemplo anterior vale para outras funções, ou seja, o valor da integral independe do caminho (ou formato da curva) mas depende apenas dos pontos inicial e final da curva?

Vejamos mais dois exemplos.

Exemplo 5. *Considere a função dada pela projeção de um número complexo em sua parte real, ou seja, $f(x + yi) = x$, para todo $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Então, as integrais de f quando*

$a)$ α é a curva cujo traço é o segmento dirigido de 0 a $1 + i$, vale

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = \int_{0}^{1} t(1+i)\,dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i.$$

$b)$ $\alpha(t) = re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, vale

$$\int_{\alpha} f(z)\,dz = \int_{0}^{2\pi} r\cos t(-r\sin t + ir\cos t)\,dt = \pi r^2 i.$$

Exemplo 6. *Consideremos $f(z) = \dfrac{1}{z - z_0}$, com $D_f = \mathbb{C} - \{z_0\}$ e $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, então*

$$\int\limits_{\alpha} f = \int\limits_{0}^{2\pi} \frac{1}{z_0 + re^{it} - z_0} rie^{it}\,dt = \int\limits_{0}^{2\pi} i\,dt = 2\pi i.$$

Note que se dermos k voltas em cima do traço de α, isto é, se o domínio de α for o intervalo $[0, 2k\pi]$, teremos

$$\int\limits_{\alpha} f = 2k\pi i.$$

Vimos nos exemplos anteriores que tal observação feita no primeiro exemplo não se concretizou nos outros dois. Porém, veremos que sob certas condições tal resultado valerá (Seção 2.3). Primeiramente, vamos estudar algumas propriedades clássicas de integração.

Proposição 7. *Sejam $f, g : \Omega \to \mathbb{C}$ contínuas no aberto $\Omega \subset \mathbb{C}$ e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω. Então,*

1. $\displaystyle\int_\alpha f + g = \int_\alpha f + \int_\alpha g.$

2. $\displaystyle\int_\alpha \lambda f = \lambda \int_\alpha f, \ \forall \lambda \in \mathbb{C}.$

3. *Se $\beta : [c, d] \to [a, b]$ é estritamente crescente e $\beta([c, d]) = [a, b]$, então*

$$\int_{\alpha\circ\beta} f = \int_\alpha f.$$

Demonstração. 1. Sob as condições de f e α, podemos usar a definição de integral, ou seja,

$$\begin{aligned}\int_\alpha (f+g) &\overset{\text{def.}}{=} \int_a^b (f+g)(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt = \int_a^b [f(\alpha(t)) + g(\alpha(t))]\alpha'(t)\,dt \\ &= \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt + \int_a^b g(\alpha(t))\alpha'(t)\,dt \\ &\overset{\text{def.}}{=} \int_\alpha f + \int_\alpha g.\end{aligned}$$

2. Exercício: mostre esta propriedade.

3. Novamente, usando a definição temos

$$\int_{\alpha\circ\beta} f = \int_c^d f(\alpha(\beta(t))(\alpha\circ\beta)'(t)\,dt = \int_c^d f(\alpha(\beta(t)))\alpha'(\beta(t))\beta'(t)\,dt \overset{\star}{=}$$

$$\star\,\text{Chame} \quad \begin{matrix} s = \beta(t) \\ ds = \beta'(t)\,dt \end{matrix}$$

$$= \int_a^b f(\alpha(s)) \cdot \alpha'(s)\,ds = \int_\alpha f.$$

□

Exemplo 8. *Seja $f(z) = z$, para todo $z \in \mathbb{C}$. Consideremos duas curvas:*
(a) $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $t \in [0, \pi/2]$;
(b) β, *cujo traço é o segmento que começa em $\alpha(0)$ e termina em $\alpha\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$.*

Vamos determinar as integrais $\int_\alpha f$ e $\int_\beta f$. Note que

$$\begin{aligned}
\int_\alpha f &= \int_0^{\pi/2} (z_0 + re^{it})(rie^{it})\,dt = \int_0^{\pi/2} rz_0ie^{it} + r^2ie^{2it}\,dt \\
&= r\int_0^{\pi/2} z_0ie^{it}\,dt + \int_0 r^2ie^{2it}\,dt \\
&= z_0ir\int_0^{\pi/2} \cos t + i\operatorname{sen} t\,dt + r^2i\int_0^{\pi/2} \cos 2t + i\operatorname{sen} 2t\,dt \\
&= z_0ir\left[\int_0^{\pi/2} \cos t\,dt + i\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\,dt\right] + r^2i\left[\int_0^{\pi/2} \cos 2t\,dt + i\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} 2t\,dt\right] \\
&= z_0ir\left[\operatorname{sen} t\,\Big|_0^{\pi/2} + i(-\cos t)\,\Big|_0^{\pi/2}\right] + r^2i\left[\frac{\operatorname{sen} 2t}{2}\,\Big|_0^{\pi/2} + i\left(\frac{-\cos 2t}{2}\right)\Big|_0^{\pi/2}\right] \\
&= z_0ir[(\operatorname{sen}\frac{\pi}{2} - \operatorname{sen} 0) + i(-\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0)] + \\
&\qquad\qquad + r^2i\left[\left(\frac{\operatorname{sen}\pi}{2} - \frac{\operatorname{sen} 0}{2}\right) + i\left(-\frac{\cos\pi}{2} + \frac{\cos 0}{2}\right)\right] \\
&= z_0ir[(1-0) + i(-0+1)] + r^2i[0 + i(1)] \\
&= z_0ri - rz_0 - r^2.
\end{aligned}$$

Exemplo 9. *Seja $f(z) = \bar{z}$ e considere γ o semicírculo que liga 1 ao ponto -1, no semiplano $\operatorname{Im}(z) \geqslant 0$. Vamos calcular $\int_\gamma f$.*

$\gamma(t) = e^{it}$, $t \in [0, \pi]$, assim $f(\gamma(t)) = e^{-it}$.

$$\int_\gamma f = \int_0^\pi f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t)\,dt = \int_0^\pi e^{-it} \cdot ie^{it}\,dt = \int_0^\pi i\,dt$$

$$\Rightarrow \int_\gamma f = \int_0^\pi i\,dt = \pi i.$$

Exercício 10. *Sejam $f(z) = \bar{z}$ e $\gamma(t) = 3t + t^2i$, com $t \in [-1, 4]$. Calcule $\int_\gamma f$.*

3 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema 11 (Versão do T.F.C para variáveis complexas)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio (aberto e conexo), $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω tal que $\alpha(a) = z_1$ e $\alpha(b) = z_2$. Então,*

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1).$$

Demonstração. Utilizando a definição da integral de f', temos

$$\begin{aligned}\int_\alpha f'(z)\,dz &= \int_a^b f'(\alpha(t)) \cdot \alpha'(t)\,dt = \int_a^b (f \circ \alpha)'(t)\,dt \\ &= (f \circ \alpha)(b) - (f \circ \alpha)(a).\end{aligned}$$

Nesta última passagem usamos o Teorema **??**, para curvas em $\mathbb{C}$. Portanto,

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(z_2) - f(z_1).$$

□

Corolário 12. *Nas condições do teorema anterior acrescentando a hipótese de α ser uma curva fechada, tem-se*

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = 0.$$

Exemplo 13. *Sejam $f(z) = z$, $z \in \mathbb{C}$ e $\alpha(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$. Então,*

$$\begin{aligned}\int_\alpha f(z)\,dz &= \int_\alpha \left(\frac{z^2}{2}\right)' dz = \frac{z^2}{2}\Bigg|_{z_0+r}^{z_0+ir} = \frac{1}{2}[(z_0 + ir)^2 - (z_0 + r)^2] \\ &= \frac{1}{2}[z_0^2 + 2z_0ri - r^2 - z_0^2 - 2z_0r - r^2] = -r^2 + rz_0(i - 1).\end{aligned}$$

Observação 14. *A hipótese de f ser holomorfa é essencial. Sejam $f(z) = \frac{1}{z}$, com $z \in \mathbb{C}^*$ e $\alpha(t) = e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$, portanto, fechada. Usando a conclusão do teorema anterior, deveríamos ter*

$$\int_\alpha \frac{1}{z}\,dz = \int_\alpha (\operatorname{Log} z)'\,dz = \operatorname{Log}(\alpha(0)) - \operatorname{Log}(\alpha(2\pi)) = 0.$$

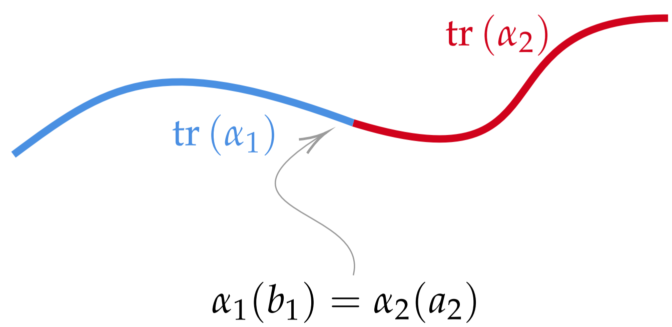
Porém, se calcularmos a integral usando a definição (exercício), obtemos

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z}\, dz = 2\pi i.$$

Observe que a função Log (z) *definida no capítulo anterior é analítica em* D_L, *mas* $\gamma[(0, 2\pi)] \not\subset D_L$, *mostrando que essa hipótese do teorema não está satisfeita.*

4 Integral de arcos justapostos

Sejam $\alpha_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ e $\alpha_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ dois arcos justapostos, isto é, $\alpha_1(b_1) = \alpha_2(a_2)$. Então a união desses dois traços é ainda um traço de alguma curva em $\mathbb{C}$. Vejamos como descrevê-la.



Queremos expressar uma curva $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ que satisfaz $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\alpha_1) \cup \mathrm{tr}(\alpha_2)$. Para isto, primeiramente devemos relacionar os intervalos $[a_1, b_1]$ e $[a_2, b_2]$ com $[a, b]$. Para fazer isto, vamos escolher um ponto $c \in (a, b)$ e definir as funções $\beta_1 : [a, c] \to [a_1, b_1]$ e $\beta_2 : [c, d] \to [a_2, b_2]$ por:

$$\beta_1(s) = \left(\frac{c - s}{c - a}\right) a_1 + \left(\frac{s - a}{c - a}\right) b_1,$$
$$\beta_2(s) = \left(\frac{b - s}{b - c}\right) a_2 + \left(\frac{s - c}{b - c}\right) b_2.$$

Note que as funções β_1 e β_2 são crescentes e bijetoras.

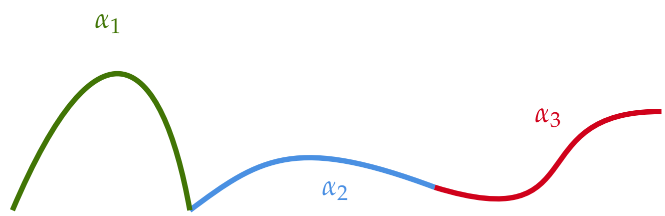
Agora, consideramos

$$\gamma(s) = \begin{cases} \alpha_1(\beta_1(s)), & a \leqslant s \leqslant c, \\ \alpha_2(\beta_2(s)), & c \leqslant s \leqslant b. \end{cases}$$

Note que $\mathrm{tr}(\gamma) = \mathrm{tr}(\alpha_1) \cup \mathrm{tr}(\alpha_2)$; $\gamma(c) = \alpha_1(b_1) = \alpha_2(a_2)$, ou seja, γ é uma curva formada por arcos justapostos.

Definição 15. *Um* **caminho ou contorno** *é uma curva* α *constituída por um número finito de arcos justapostos. Assim, se* $\alpha_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, *com* $j = 1, 2, \ldots, n$ *tal que* $\alpha_j(b_j) = \alpha_{j+1}(a_{j+1})$ *então escrevemos*

$$\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n.$$



$\alpha_1 \oplus \alpha_2 \oplus \alpha_3$

Definição 16. *Sejam $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ contínua e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ um contorno em Ω, $\alpha = \alpha_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n$. Define-se*

$$\int_\alpha f(z)\,dz = \int_{\alpha_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n} f(z)\,dz.$$

Proposição 17. *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa no domínio Ω e $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um contorno em Ω, constituído pelos arcos $\alpha_j : [a_j, b_j] \to \mathbb{C}$, $j = 1, \ldots, n$, então*

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(\alpha_n(b_n)) - f(\alpha_1(a_1)).$$

Demonstração. Sejam f e α satisfazendo as hipóteses do enunciado da proposição, então

$$\begin{aligned}\int_\alpha f'(z)\,dz = \int_{\alpha_1} f'(z)\,dz + \int_{\alpha_2} f'(z)\,dz + \ldots + \int_{\alpha_n} f'(z)\,dz \\ &= f(\alpha_1(b_1)) - f(\alpha_1(a_1)) + f(\alpha_2(b_2)) - f(\alpha_2(a_2)) + \ldots \\ &\ldots + f(\alpha_n(b_n)) - f(\alpha_n(a_n)).\end{aligned}$$

Como $\alpha_j(b_j) = \alpha_{j+1}(a_{j+1})$, segue que

$$\begin{gathered} f(\alpha_1(b_1)) - f(\alpha_2(a_2)) = 0 \\ \vdots \\ f(\alpha_{n-1}(b_{n-1})) - f(\alpha_n(a_n)) = 0. \end{gathered}$$

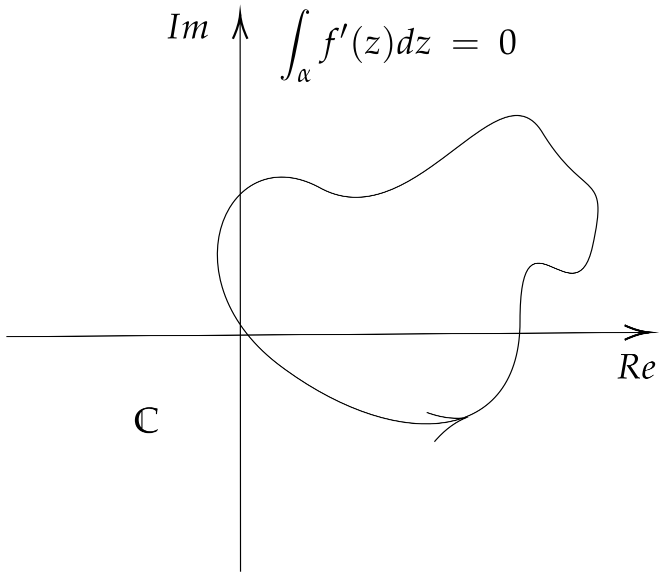
Portanto,

$$\int_\alpha f'(z)\,dz = f(\alpha_n(b_n)) - f(\alpha_1(a_1)) = f(\alpha(b)) - f(\alpha(a)).$$

$\square$

Corolário 18. *Nas condições da proposição anterior, se o contorno α for fechado então*

$$\int_{\alpha} f'(z)\,dz = 0.$$



Corolário 19. *Nas condições da proposição anterior tem-se que o valor da integral de f' não depende do contorno α em Ω.*

Consideremos agora alguns cálculos de integrais ao longo de caminhos.

Exemplo 20. *Tome $f(x+iy) = y - x - 3x^2 i$ e $\gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, onde*

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 : [0,1] \to \mathbb{C} \\
&\alpha_1(t) = (1-t)0 + ti,\ 0 \leqslant t \leqslant 1 \\
&\alpha_1(t) = ti
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
&\alpha_2 : [0,1] \to \mathbb{C} \\
&\alpha_2(t) = (1-t)i + t(1+i) = i - ti + t + ti = t + i,\ 0 \leqslant t \leqslant 1.
\end{aligned}$$

Vamos escrever $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$, com $tr(\gamma) = tr(\alpha_1) \cup tr(\alpha_2)$. Para $s \in [0,1]$, $\gamma(s) = \alpha_1(s)$, para

$s \in [1,2]$, vamos tomar $\gamma(s) = \alpha_2(\beta_2(s))$, onde $\beta_2 : [1,2] \to [0,1]$ dada por

$$\beta_2(s) = \left(\frac{b-s}{b-c}\right) a_2 + \left(\frac{s-c}{b-c}\right) b_2$$
$$\beta_2(s) = \left(\frac{2-s}{2-1}\right) 0 + \left(\frac{s-1}{2-1}\right) \cdot 1 = s-1$$

Portanto,

$$\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$$
$$\gamma(s) = \begin{cases} si, & 0 \leqslant s \leqslant 1 \\ \alpha_2(\beta_2(s)) = s-1+i, & 1 \leqslant s \leqslant 2. \end{cases}$$

Note que, para $0 \leqslant s \leqslant 1$, $f(\gamma(s)) = s$. Para $1 \leqslant s \leqslant 2$

$$\begin{aligned} f(\gamma(s)) &= (1-(s-1)) - 3(s-1)^2 i \\ &= 2-s-3(s-1)^2 i. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_\gamma f(z)\,dz &= \int_0^1 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds + \int_1^2 f(\gamma(s))\gamma'(s)\,ds \\ &= \int_0^1 si\,ds + \int_1^2 [2-s-3(s-1)^2 i]\,ds \\ &= i\frac{s^2}{2}\bigg|_0^1 + \int_1^2 [2-s+i(-3s^2+6s-3)]\,ds = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i. \end{aligned}$$

Exemplo 21. *Considere $f(z) = z^2 + z$, para todo $z \in \mathbb{C}$ e $\gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2$ um contorno fechado.*

Assim, se $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $g(z) = \dfrac{z^3}{3} + \dfrac{z^2}{2}$, então g é holomorfa e $g' = f$. Pelo corolário anterior segue que

$$\int_\gamma f = \int_\gamma (z^2+z)\,dz = \int_\gamma \left(\frac{z^3}{3} + \frac{z^2}{2}\right)' dz = 0.$$

5 Exercícios

Calcule $\int_\alpha f$, onde:

1. $f(z) = z + 1$, onde

   a) α é o segmento que liga $z = 0$ a $z = 2$.

   b) o arco que liga os pontos $z = 0$ a $z = 2$ em $\operatorname{Im}(z) \geqslant 0$.

2. $f(z) = \dfrac{z+2}{z}$, onde $\alpha(t) = 2e^{it}$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$.

3. $f(z) = \dfrac{3}{z}$, $\alpha(t) = 3i + e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

4. $f(x + yi) = x^2 + iy^3$, onde α é o segmento de reta que $z = 1$ a $z = i$.

5. $f(z) = Im(z - i)$, onde α é o percurso poligonal que consiste no arco circular ao longo de $|z| = 1$ de $z = 1$ a $z = i$; e no segmento de reta que liga $z = i$ a $z = -1$.

6. $f(z) = e^z$ onde α é o percurso poligonal que consiste nos segmentos de reta de $z = 0$ a $z = 1$ e de $z = 2$ a $z = 1 + i\pi$.

7. Se γ é a fronteira do quadrado de vértices nos pontos 0, 1, $1 + i$, i mostre que

$$\int_\gamma (3z + 1)\, dz = 0.$$

6 Arco oposto e comprimento de curva

Nesta seção vamos provar uma propriedade que será fundamental na prova de resultados importantes da teoria como o Teorema de Cauchy-Goursat. Vamos iniciar a seção com a seguinte definição.

Definição 22. *Seja $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ um arco, definimos o arco oposto de α, denotado por $-\alpha$, como sendo*

$$(-\alpha) : [-b, -a] \to \mathbb{C},$$

em que $(-\alpha)(-b) = \alpha(b)$ e $-\alpha(-a) = \alpha(a)$, com $tr(\alpha) = tr(-\alpha)$.

Proposição 23. *Nas condições da definição acima, vale a seguinte propriedade:*

$$\int_{-\alpha} f(z)\, dz = -\int_{\alpha} f(z)\, dz.$$

Demonstração. Basta realizarmos uma mudança de variável, a qual está destacada no retângulo ao lado. Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\alpha} f(z)\, dz &= \int_{-b}^{-a} f(-\alpha(s))(-\alpha)'(s)\, ds \qquad \boxed{\begin{array}{l} -t = s \\ (-\alpha)(-t) = \alpha(t) \end{array}} \\ &= \int_{b}^{a} f(-\alpha(-t))(-\alpha)'(-t)\,(-dt) = -\int_{b}^{a} (-1) f(\alpha(t))(-\alpha'(t))\, dt \\ &= -\int_{a}^{b} f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt = -\int_{\alpha} f(z)\, dz. \end{aligned}$$

$\square$

Como a definição de uma curva em $\mathbb{C}$ é similar a uma curva no plano $\mathbb{R}^2$, a definição de comprimento é também similar, como descrita abaixo, exceto pela notação $|dz|$.

Definição 24. *Seja $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω, definimos o comprimento de $\alpha(t) = \alpha_1(t) + i\alpha_2(t)$ por*

$$L(\alpha) = \int_a^b |\alpha'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(\alpha_1'(t))^2 + (\alpha_2'(t))^2}\, dt$$

$$\Rightarrow L(\alpha) = \int_\alpha |dz|.$$

Considerando $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua, com a notação $|dz|$, tem sentido calcularmos

$$\int_\alpha f(z)\, |dz| = \int_a^b f(\alpha(t))|\alpha'(t)|\, dt.$$

Proposição 25. *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω, então vale a seguinte propriedade:*

$$\left| \int_\alpha f(z)\, dz \right| \leqslant \int_\alpha |f(z)|\, |dz|.$$

Demonstração. Basta notar que

$$\left| \int_\alpha f(z)\, dz \right| = \left| \int_a^b f(\alpha(t))\alpha'(t)\, dt \right| \overset{\text{curva}}{\leqslant} \int_a^b |f(\alpha(t))||\alpha'(t)|\, dt$$

$$\Rightarrow \left| \int_\alpha f(z)\, dz \right| \leqslant \int_\alpha |f(z)|\, |dz|.$$

□

Corolário 26. *Sejam $f : \Omega \to \mathbb{C}$ contínua e $\alpha : [a,b] \to \mathbb{C}$ um arco em Ω, satisfazendo a desigualdade $|f(z)| \leqslant M,\ \forall\, z \in tr(\alpha)$, então:*

$$\left| \int_\alpha f(z)\, dz \right| \leqslant M.L(\alpha).$$

Demonstração. Basta usar a proposição anterior, logo

$$\left|\int_{\alpha} f(z)\,dz\right| \leqslant \int_{\alpha} |f(z)|\,|dz| \leqslant \int_{\alpha} M\,|dz| \leqslant M\int_{\alpha} |dz| = ML(\alpha).$$

□

Exemplo 27. *Vamos calcular $L(\gamma)$, onde $\gamma = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, tal que*

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 : [0, \pi/2] \to \mathbb{C}\\
&\alpha_1(t) = 2(\cos t + i\text{sen}\, t),\ t \in [0, \pi/2]\\
\\
&\alpha_2 : [0, 1] \to \mathbb{C}\\
&\alpha_2(t) = (1-t)2i + ti = 2i - ti,\ t \in [0, 1]
\end{aligned}$$

Tomando a mudança de variável $\beta_2 : [\pi/2, \pi] \to [0, 1]$, dada por

$$\beta_2(s) = \left(\frac{\pi - s}{\pi - \pi/2}\right)0 + \left(\frac{s - \pi/2}{\pi - \pi/2}\right)1 = \frac{\frac{2s-\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}} = \frac{2s-\pi}{\pi}.$$

Vamos escrever agora o arco $\gamma : [0, \pi] \to \mathbb{C}$, com $tr(\gamma) = tr(\alpha_1) \cup tr(\alpha_2)$:

$$\gamma(s) = \begin{cases} 2(\cos s + i\text{sen}\, s),\ 0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2},\\ \alpha_2(\beta_2(s)) = 2i - (\dfrac{2s-\pi}{\pi})i = 3i - \dfrac{2}{\pi}si. \end{cases}$$

$$L(\gamma) = \int_{\gamma} |dz| = \int_0^{\pi} |\gamma'(t)|\,dt = \int_0^{\pi/2} |\gamma'(t)|\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} |\gamma'(t)|\,dt.$$

Note que para $0 \leqslant s \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\gamma'(t) = 2(-\text{sen}\, t + i\cos t)$, para $\frac{\pi}{2} \leqslant s \leqslant \pi$, $\gamma'(t) = -\frac{2}{\pi}i$. Portanto,

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{4\text{sen}^2 t + 4\cos^2 t}\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{\frac{4}{\pi^2}}\,dt\\
&= \int_0^{\pi/2} 2\,dt + \int_{\pi/2}^{\pi} \frac{2}{\pi}\,dt = 2t\,\Big|_0^{\pi/2} + \frac{2}{\pi}t\,\Big|_{\pi/2}^{\pi} = \pi + (2-1) = \pi + 1.
\end{aligned}$$

Exercício: *O resultado obtido é diferente se não utilizar a função β_2? Verifique.*

7 Teorema de Cauchy para Retângulos

Nesta seção estamos interessados em calcular integrais de funções complexas ao longo de uma curva fechada, simples e orientada positivamente. Veremos que o valor da integral de uma função f holomorfa é independente do formato do caminho, ou seja, o valor da integral de f será o mesmo para qualquer curva fechada, simples e orientada positivamente. Este resultado é um dos mais importantes da Análise Complexa e é conhecido como **Teorema de Cauchy-Goursat**. Vamos iniciar com uma versão simples, em que a curva fechada é a fronteira de um retângulo contido no domínio da função.

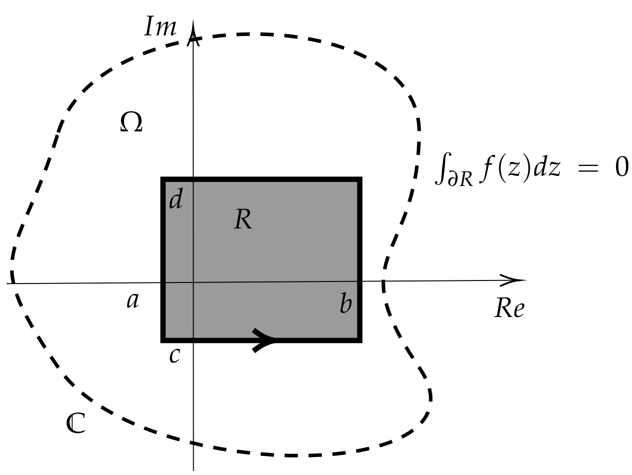
Considere o retângulo R em $\mathbb{C}$, dado por

$$R = \{x + iy \in \mathbb{C};\ a \leqslant x \leqslant b \text{ e } c \leqslant y \leqslant d\}.$$

Note que a fronteira de R, denotada por ∂R, é um caminho simples e fechado.

Teorema 28. *Seja f uma função holomorfa em um domínio Ω, com $R \subset \Omega$. Então,*

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

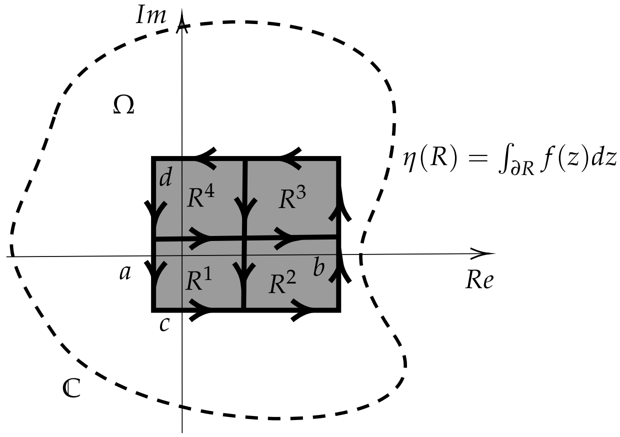


Demonstração. Para provar este resultado, iremos dividir o retângulo em vários retangulinhos e calcularemos estimativas da integral de f ao longo da fronteira dos retangulinhos.

Iniciamos a prova introduzindo a notação:

$$\eta(R) = \int_{\partial R} f(z)\, dz. \tag{1}$$

Agora, vamos dividir R em 4 retângulos pequenos congruentes: R^1, R^2, R^3, R^4, da seguinte forma:



$$\eta(R) = \eta(R^1) + \eta(R^2) + \eta(R^3) + \eta(R^4), \tag{2}$$

já que os lados comuns dos retângulos menores se cancelarão pela propriedade do arco oposto, dada por

$$\int_{-\alpha} f(z)\, dz = -\int_{\alpha} f(z)\, dz,$$

para algum α contorno. Logo,

$$|\eta(R)| \leqslant |\eta(R^1)| + |\eta(R^2)| + |\eta(R^3)| + |\eta(R^4)|$$

e pelo menos um dos pequenos retângulos deve satisfazer

$$|\eta(R^i)| \geqslant \frac{1}{4}|\eta(R)|,\ \text{para algum}\, i \in \{1, 2, 3, 4\}$$

Vamos ajeitar (ou reordenar) os índices, se necessário, com o objetivo de chamarmos R_1 o retângulo com propriedade acima.

Escolhido R_1, repetimos nele o processo de divisão realizado anteriormente. Assim, conseguimos obter um outro retangulinho, denotado por R_2 e contido em R_1, satisfazendo:

$$|\eta(R_2)| \geqslant \frac{1}{4}|\eta(R_1)| \geqslant \frac{1}{4^2}|\eta(R)|.$$

Repetindo indefinidamente o processo anterior, obtemos uma sequência de retângulos satisfazendo

$$R \supset R_1 \supset R_2 \supset \ldots \supset R_n \supset \ldots$$

com a propriedade

$$|\eta(R_n)| \geqslant \frac{1}{4^n}|\eta(R)|, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Note que, quando $n \to \infty$, $R_n \to z^*$, para algum $z^* \in R$. (Pelo Teorema da Interseção de Cantor: Uma sequência decrescente de compactos não vazios de um espaço topológico, tem intersecção não vazia). Note que o diâmetro desses retangulinhos satisfaz, diam $R_n \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como f é holomorfa em Ω, em particular diferenciável em z^*, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$|z - z^*| < \delta_1 \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z^*)}{z - z^*} - f'(z^*) \right| < \epsilon.$$

Como $z^* \in \Omega$ e Ω é aberto, existe $\delta_2 > 0$, tal que $D(z^*, \delta_2) \subset \Omega$. E do fato que $R_n \to z^*$ quando $n \to \infty$, para este valor $\delta_2 > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall\ n > n_0,\ R_n \subset D(z^*, \delta_2)$.

Considere $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, então da diferenciabilidade em z^*, temos:

$$|f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)| < \epsilon |z - z^*|,\ \forall\ z \in D(z^*, \delta).$$

Note que $\eta(R_n) = \int\limits_{\partial R_n} f(z)\, dz$ e

$$\int\limits_{\partial R_n} [f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)]\, dz = \int\limits_{\partial R_n} f(z)\, dz -$$

$$f(z^*) \cancelto{0}{\int\limits_{\partial R_n} dz} - f'(z^*) \cancelto{0}{\int\limits_{\partial R_n} (z - z^*)\, dz} =$$

$$= \int\limits_{\partial R_n} f(z)\, dz = \eta(R_n).$$

Assim,

$$\begin{aligned} |\eta(R_n)| &\leq \int\limits_{\partial R_n} |f(z) - f(z^*) - f'(z^*)(z - z^*)|\, |dz| \\ &< \int\limits_{\partial R_n} \epsilon |z - z^*|\, |dz| \leqslant \epsilon \int\limits_{\partial R_n} d_n\, |dz| = \epsilon d_n L_n, \end{aligned}$$

onde d_n é o diâmetro de R_n e L_n é o comprimento do contorno ∂R_n. Lembrando que

$$\underbrace{\text{diam}}_{d} A = \sup\{|z - w|,\, z, w \in A\}.$$

Portanto, $|\eta(R_n)| < \epsilon d_n L_n$.

Note que $d_1 = \dfrac{1}{2} d$, onde d é o diâmetro de R e d_1 é o diâmetro de R_1.

E $L_1 = \frac{1}{2}L$, L, onde L é o comprimento de ∂R e L_1 o comprimento da ∂R_1.
Analisando o procedimento de divisão do retângulo, concluímos que $d_n = \frac{1}{2^n}d$ e $L_n = \frac{1}{2^n}L$.
Portanto,

$$|\eta(R_n)| < \epsilon \frac{1}{4^n} d.L.$$

Por (3) temos

$$\frac{1}{4^n}|\eta(R)| \leqslant |n(R_n)| < \frac{\epsilon}{4^n} d.L.$$

Assim,

$$|\eta(R)| < \epsilon d.L.$$

Como d, L estão fixados e $\epsilon > 0$ arbitrário, podemos tomar $\epsilon \to 0^+$ e daí

$$|\eta(R)| \leqslant 0 \Rightarrow |\eta(R)| = 0.$$

Portanto,

$$\int_{\partial R} f(z)\, dz = 0.$$

O que conclui a prova. □

Exemplo 29. *Vamos calcular as integrais abaixo através do Teorema de Cauchy.*

a) $\int_{\partial R} (z^2 + 2z)\, dz$, *onde* $R = \{x + iy,\ 2 \leqslant x \leqslant 4,\ -1 \leqslant y \leqslant 1\}$.

$$\int_{\partial R} (z^2 + 2z)\, dz = 0.$$

b) $\int_{\partial R} \frac{1}{z}\, dz$, *onde* $R = \{x + iy,\ 5 \leqslant x \leqslant 6,\ 2 \leqslant y \leqslant 3\}$.

$$\int_{\partial R} \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

Corolário 30. *Nas mesmas condições do teorema anterior, tem-se*

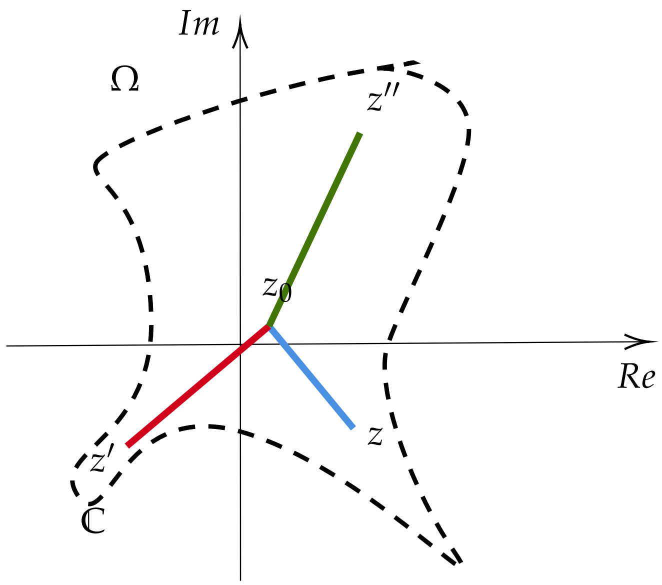
$$\int_{\partial \triangle} f(z)\, dz = 0,$$

onde $\triangle$ *é um triangulo qualquer em* Ω.

8 Domínios Estrelado, Simplesmente Conexo e Multiplamente Conexo

Para provarmos um resultado mais geral que o anterior, isto é, para curvas quaisquer fechadas, vamos precisar de algumas definições relacionadas ao dominío da função f em estudo.

Definição 31. *Um subconjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ é denominado* **domínio estrelado** *se é um domínio (aberto e conexo) e se existe um ponto $z_0 \in \Omega$ tal que o segmento de extremidades z_0 e z está contido em Ω, $\forall\ z \in \Omega$.*



Definição 32. *Dizemos que um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ é* **simplesmente conexo** *quando toda curva de Jordan, retificável, contida em Ω possui o seu interior constituído somente de pontos de Ω. Um domínio que não é simplesmente conexo é denominado* **multiplamente conexo**.

Observação 33. *Equivalente à definição anterior, tem-se: um domínio é um conjunto simplesmente conexo se todo contorno fechado simples α em Ω puder ser comprimido a um ponto em Ω.*

Segue da definição de simplesmente conexo que Ω não tem “buracos". Logo, domínio multiplamente conexo possui“buracos". Notemos também que todo domínio estrelado é simplesmente conexo.

Exemplo 34. *Todo disco aberto, $D(z_0, r) \subset \mathbb{C}$, $r > 0$, é um domínio estrelado, portanto, simplesmente conexo.*

Basta tomar o centro z_0, $\forall$ segmento que liga z_0 a z está em $D(z_0, r)$.

Exemplo 35. $\Omega = \mathbb{C} - \{0\}$ *não é estrelado.*

É claro que Ω é conexo por caminhos, mas de fato não é estrelado. Note, por exemplo, que $\forall\ z_0 \in \Omega$, a reta que passa por z_0 e pela origem, contém vários pontos $z \in \Omega$, cujo segmento de extremidades z_0 e z não está contido em Ω.

Exemplo 36. *A região anelar aberta dada por $1 < |z| < 2$ é um domínio multiplamente conexo.*

9 Cálculo de primitivas de uma função complexa

Iniciemos esta seção relembrando a definição de primitiva de uma função.

Definição 37 (Primitiva)**.** *Denomina-se primitiva de f em um certo domínio D a uma função derivável F tal que $F' = f$ em D.*

O resultado a seguir garante a existência de primitiva de uma função holomorfa.

Teorema 38. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um domínio estrelado Ω. Existe uma função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa em Ω tal que $F'(z) = f(z)$.*

Demonstração. Como Ω é estrelado existe um ponto $z_0 \in \Omega$ tal que o segmento de extremos z_0 e z está contido em Ω, $\forall\ z \in \Omega$.

Portanto, podemos definir a função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ por

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi = \int_{\alpha_z} f(\xi)\, d\xi,$$

em que $\alpha_z(t) = (1-t)z_0 + tz$, com $t \in [0,1]$, é a parametrização do segmento de z_0 a z.

Assim,

$$F(z) = \int_{\alpha_z} f(\xi)\, d\xi = \int_0^1 f(\alpha_z(t))\alpha_z'(t)\, dt.$$

Note que F está bem definida, pois f é holomorfa em Ω e α_z é de classe C^1, para cada $z \in \Omega$. Portanto, a integral

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi$$

existe.

Como Ω é aberto, dado $z \in \Omega$, existe $\delta_z > 0$ tal que $D(z, \delta_z) \subset \Omega$. Pela continuidade de f em z, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta_1 > 0$ tal que

$$|\xi - z| < \delta_1 \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \epsilon.$$

Considere números complexos $h \in \mathbb{C}$, com $|h| < \delta_z$.
Note que $z + h \in D(z, \delta_z) \subset \Omega$, pois $|z + h - z| = |h| < \delta_z$.
Mostremos que

$$\left| \frac{F(z+h) - F(z)}{h} - f(z) \right| \to 0, \quad \text{quando } h \to 0.$$

De fato, vejamos que

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\, d\xi - \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi.$$

Agora, vamos considerar o triângulo em Ω de vértices $z_0, z + h$ e z (já que Ω é estrelado). Pelo Corolário (Cauchy para Triângulos) tem-se:

$$0 = \int_{\partial\triangle} f(\xi)\, d\xi = \int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\, d\xi + \int_{z+h}^{z} f(\xi)\, d\xi + \int_{z}^{z_0} f(\xi)\, d\xi,$$

ou seja,

$$\int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\, d\xi = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi - \int_{z+h}^{z} f(\xi)\, d\xi. \tag{4}$$

Observe que se os pontos z, $z + h$, h forem colineares, a igualdade (4) continua verdadeira.

Retornando à expressão de $F(z + h) - F(z)$, vamos substituir a integral $\int_{z_0}^{z+h} f(\xi)\, d\xi$ pela expressão de (4). Com isso, temos

$$F(z+h) - F(z) = \int_{z}^{z+h} f(\xi)\, d\xi.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z) =& \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - f(z)\\
&= \frac{1}{h}\left[\int\limits_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - hf(z)\right]\\
&= \frac{1}{h}\left[\int\limits_{z}^{z+h} f(\xi)\,d\xi - f(z)\int\limits_{z}^{z+h} d\xi\right]\\
&= \frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} [f(\xi)-f(z)]\,d\xi.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\begin{aligned}
\left|\frac{F(z+h)-F(z)}{h}-f(z)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int\limits_{z}^{z+h} [f(\xi)-f(z)]\,d\xi\right|\\
&\leqslant \frac{1}{|h|}\int\limits_{z}^{z+h} |f(\xi)-f(z)|\,|d\xi|\\
&< \frac{1}{|h|}\int\limits_{z}^{z+h} \epsilon\,|d\xi| = \frac{\epsilon}{|h|}\int\limits_{z}^{z+h} |d\xi| = \frac{\epsilon}{|h|}|h| = \epsilon,
\end{aligned}$$

desde que $|\xi - z| < \delta$, onde $\delta = \min\{\delta_z, \delta_1\}$.

Portanto, $F'(z) = f(z)$.

□

Corolário 39 (Versão do Teorema de Cauchy-Goursat para domínio estrelado)**.** *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, Ω um domínio estrelado e α um contorno fechado simples qualquer em Ω, então*

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = 0.$$

Demonstração. Pelo teorema anterior, existe uma função $F : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $F' = f$, portanto

$$\int\limits_{\alpha} f(z)\,dz = \int\limits_{\alpha} F'(z)\,dz = F(\alpha(b)) - F(\alpha(a)) = 0,$$

onde $\alpha : [a, b] \to \mathbb{C}$ é qualquer contorno fechado simples em Ω. □

A seguir a versão mais conhecida do Teorema de Cauchy-Goursat.

Corolário 40 (Teorema de Cauchy-Goursat). *Se $f : \Omega \to \mathbb{C}$ é holomorfa, Ω um domínio simplesmente conexo e α um contorno fechado simples qualquer em Ω, então*

$$\int_{\alpha} f(z)\, dz = 0.$$

Se exigirmos apenas a continuidade da função f (em vez de holomorfa), ainda podemos provar a existência de primitivas, mas é exigido uma hipótese de integração. Esse resultado é dado a seguir.

Teorema 41. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua no domínio estrelado Ω. Suponha ainda que*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

para todo triângulo $\triangle$ contido em Ω. Então, f possui primitiva, isto é, existe $F : \Omega \to \mathbb{C}$, tal que $F' = f$.

A prova se baseia na construção feita na prova do teorema anterior. (Exercício)

10 Exemplo interessante

Vamos discutir a integral da função $f(z) = \frac{1}{z-a}$, ao longo do caminho C, cujo traço é a circunferência em $\mathbb{C}$ de centro em a e raio $r > 0$. Note primeiramente que o domínio desta função $\Omega = \mathbb{C} - \{a\}$ não é simplesmente conexo.

Então, já vimos que

$$\int_{C} \frac{1}{z-a}\, dz = 2\pi i. \tag{5}$$

E se considerarmos k voltas, teremos

$$\int_{C} \frac{1}{z-a}\, dz = 2k\pi i. \tag{6}$$

Logo, podemos destacar que **o valor obtido da integral em** (5) **independe do valor do raio da circunferência C.**

Assim, isso instiga se o valor dessa integral permanece o mesmo independente do formato da curva, desde que seu traço envolva o ponto a. É o que responde o próximo resultado.

Proposição 42. *Seja α um contorno simples fechado orientado positivamente (sentido anti-horário) envolvendo o número a. Então*

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i.$$

Ou seja, o valor da integral independe do caminho.

Demonstração. Mostremos que

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{C} \frac{1}{z-a}\,dz,$$

onde C é uma circunferência centrada em a.

Seja $r > 0$ escolhido de forma que $\mathrm{tr}(C) \subset \mathrm{int}(A)$, onde A é a região que contem a e é limitada pelo $\mathrm{tr}(\alpha)$. Denotemos por

$$C : |z-a| = r.$$

Agora, tracemos uma reta por a, dividindo o plano complexo em dois semiplanos.

Com os pontos de interseção da reta com $\mathrm{tr}(C)$, construa um triângulo dentro do disco, (vejamos a figura).

Chame Ω o conjunto abaixo da reta e abaixo dos segmentos que formam o triângulo.

Vamos considerar as curvas $\alpha = \alpha_1 \oplus \alpha_2$, γ_1, γ_2, γ_3, η_1, η_2, η_3 (as quais são descritas na figura).

Note que $\alpha_1 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \subset \Omega$, $\alpha_2 \oplus \eta_3 \oplus \eta_2 \oplus \eta_1 \subset \Omega'$ e são curvas fechadas. Ω e Ω' são estrelados logo

$$\begin{aligned}
0+0 &= \int_{\alpha_1\oplus\gamma_1\oplus\gamma_2\oplus\gamma_3} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\alpha_2\oplus\eta_3\oplus\eta_2\oplus\eta_1} \frac{1}{z-a}\,dz \\
&= \int_{\alpha_1} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_1} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_2} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\gamma_3} \frac{1}{z-a}\,dz \\
&+ \int_{\alpha_2} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\eta_3} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\eta_2} \frac{1}{z-a}\,dz + \int_{\eta_1} \frac{1}{z-a}\,dz \\
&= \int_{\alpha} \frac{1}{z-a}\,dz - \int_{C} \frac{1}{z-a}\,dz.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z-a}\,dz = \int_{C} \frac{1}{z-a}\,dz = 2\pi i.$$

□

Observação 43. *Nas condições anteriores, em k voltas em α temos*

$$\int_{\alpha} \frac{1}{z-a}\, dz = 2k\pi i.$$

11 Exercícios

1. Calcule:

a) $\displaystyle\int_{\alpha} \frac{1}{\sqrt{z}}\, dz$, onde α é o segmento de reta entre $z_0 = i$ e $z_1 = 9$.

b) $\displaystyle\int_{0}^{3+i} z^2\, dz$

c) $\displaystyle\int_{i/2}^{\pi+2i} e^{\pi z}\, dz$

d) $\displaystyle\int_{\pi i}^{2\pi i} \cosh z\, dz$

e) $\displaystyle\int_{i}^{1+\pi/2i} \sinh 3z\, dz$

f) $\displaystyle\int_{1-i}^{1+\sqrt{3}i} \left(\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2}\right) dz$

2. a) Enuncie e prove um resultado de integração por partes para funções de variável complexa.

b) Calcule

(i) $\displaystyle\int_{\pi}^{i} e^z \cos z\, dz$

(ii) $\displaystyle\int_{0}^{\pi i} e^z z^2\, dz$

12 Fórmula Integral de Cauchy

Demonstraremos a seguir uma representação integral de uma função holomorfa f ao longo de caminhos contidos em um disco $D(a,\rho)$, o qual é estrelado e aberto, conhecida como Fórmula Integral de Cauchy (F.I.C.) . Com este resultado, podemos provar que uma função de variável complexa holomorfa em um domínio simplesmente conexo possui derivadas de todas as ordens. Por tal propriedade, por analogia ao caso real, as funções holomorfas são também denominadas de funções analíticas.

13 Teorema e Exemplos

Teorema 44 (Fórmula Integral de Cauchy)**.** *Seja f uma função holomorfa em um disco de raio R e centro a. Seja $0 < \rho < R$ e C a circunferência orientada positivamente $|z-a| = \rho$. Então, se $z \in D(a,\rho)$ tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\, d\xi.$$

Demonstração. Dado $z \in D(a,\rho)$ qualquer, então existe $r > 0$ tal que $D(z,r) \subset D(a,\rho)$. Podemos diminuir r, se necessário, para garantir $D[z,r] \subset D(a,\rho)$.

Note que a função $\xi \mapsto \dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ é holomorfa em $D(a,R) - \{z\}$.

Usaremos a mesma ideia de construção de $\Omega, \Omega', \alpha_1, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \eta_1, \eta_2$ e η_3 da proposição anterior e teremos então os contornos $\alpha_1 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3 \subset \Omega$ e $\alpha_2 \oplus \eta_3 \oplus \eta_2 \oplus \eta_1 \subset \Omega'$. Assim,

$$\int\limits_{\alpha_1 \oplus \gamma_1 \oplus \gamma_2 \oplus \gamma_3} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \qquad = 0 = \int\limits_{\alpha_2 \oplus \eta_3 \oplus \eta_2 \oplus \eta_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 + 0 &= \int\limits_{\alpha_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\gamma_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\gamma_3} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\
&+ \int\limits_{\alpha_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\eta_3} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\eta_2} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{\eta_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi \\
&= \int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi + \int\limits_{-|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$\int\limits_C \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \int\limits_{|\xi - z| = r} \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi,$$

onde $C : |\xi - a| = \rho$.

Vamos reescrever a integral que está à esquerda da igualdade acima.

Logo,

$$\begin{aligned}
\int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi &= \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)+f(z)}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi + \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(z)}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi + f(z) \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{1}{\xi-z}\,d\xi \\
&= \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi + f(z)2\pi i.
\end{aligned}$$

Para concluir o resultado basta mostrar que

$$\int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi = 0.$$

De fato, observe primeiramente que f é contínua em z, pois é derivável. Assim, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$ com

$$|\xi - z| < \delta \Rightarrow |f(\xi) - f(z)| < \epsilon.$$

Podemos considerar $r < \delta$, logo $\xi \in \mathbb{C}$, $|\xi - z| = r < \delta$ tem-se

$$|f(\xi) - f(z)| < \epsilon.$$

Usando a continuidade, podemos obter a seguinte estimativa

$$\begin{aligned}
\left| \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi \right| &\leq \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\xi-z|}\,|d\xi| \\
&< \int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{\epsilon}{r}\,|d\xi| = \frac{\epsilon}{r} \int\limits_{|\xi-z|=r} |d\xi| = \frac{\epsilon}{r} 2\pi r = 2\pi\epsilon.
\end{aligned}$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, fazendo $\epsilon \to 0$ tem-se

$$\int\limits_{|\xi-z|=r} \frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}\,d\xi = 0.$$

Portanto,

$$\int\limits_{C} \frac{f(\xi)}{\xi-z}\,d\xi = f(z)2\pi i.$$

$\square$

Observação 45. *A Fórmula Integral de Cauchy é válida para qualquer contorno α fechado simples contido em um domínio estrelado ou simplesmente conexo Ω. Isto é, para f holomorfa em Ω simplesmente conexo e α arco fechado, simples e orientado positivamente, tem-se*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha} \frac{f(\xi)}{\xi - z} \, d\xi,$$

onde $z \in \Omega$, α envolve uma única vez o número complexo z, com $tr(\alpha) \subset \Omega$.

A prova segue da prova do teorema anterior. Basta observar que como Ω é aberto, para cada z na região limitada pelo traço de γ, denotada por A, existe um disco fechado centrado em z de raio $r > 0$ inteiramente contido no interior de A.

14 Exemplos

Vejamos algumas aplicações da Fórmula Integral de Cauchy.

Exemplo 46. *Vamos calcular* $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z} \, dz.$

Note que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, com $f(z) = e^z$, é uma função inteira. Note também que $z_0 = 0$ é o ponto envolvido pelo traço da curva $|z| = 2$. Assim, pela Fórmula Integral de Cauchy temos

$$f(0)2\pi i = \int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z} \, dz$$

$$\overset{e^0=1}{\Rightarrow} \int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z} \, dz = 2\pi i.$$

Exemplo 47. *Calculemos* $\displaystyle\int\limits_{|z-2|=1} \frac{e^z}{z^2} \, dz.$

Note que $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = \dfrac{e^z}{z^2}$ é holomorfa em $\mathbb{C} - \{0\}$.

$|z - 2| = 1$ é um arco fechado, $\{z \in \mathbb{C},\ |z - 2| = 1\} \subset \mathbb{C} - \{0\}$, temos

$$\int\limits_{|z_2|=1} \frac{e^z}{z^2} \, dz = 0.$$

Exemplo 48. *Calculemos* $\displaystyle\int\limits_{|z-(2+2i)|=\rho} \frac{\cos z}{z(z-2i)}\,dz, \quad 2<\rho<\sqrt{5}.$

Note que $f(z)=\cos z/z$ *é holomorfa em um disco que contém C e envolve o ponto problema,* $z=2i$*. Pela F.I.C.*

$$\int\limits_{|z-(2-2i)|=\rho} \frac{\cos z}{z(z-2i)}\,dz = 2\pi i\, f(2i) = \frac{2\pi i}{2i}\frac{e^{(2i)i}+e^{-(2i)i}}{2} \Rightarrow$$

$$\int\limits_{|z-(2-2i)|=\rho} \frac{\cos z}{z(z-2i)}\,dz = \frac{\pi}{2}(e^{-2}+e^{2}).$$

Exercício 49. *Calcule* $\displaystyle\int\limits_{|z-(2+2i)|=1} \frac{\cos z}{(z-1)(z-2i)}\,dz.$

Exercício 50. *Calcule* $\displaystyle\int\limits_{|z|=4} \frac{z^2}{(z^2-25)(z+i)}\,dz.$

Exercício 51. *Calcule* $\displaystyle\int_0^{4i} (z^3+2iz+4)\,dz.$

15 Exercícios

1. Calcule:

a) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=1} \frac{\operatorname{sen} z\cos z}{(z-i)}\,dz.$

b) $\displaystyle\int\limits_{|z-i|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{sen} z\cos z}{z^2e^z(z-i)}\,dz$

c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{z^2-4z+4}{z+i}\,dz.$

d) $\displaystyle\int\limits_{|z-2i|=4} \frac{z}{z^2+9}\, dz.$

e) $\displaystyle\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{(z^2+1)}$

2. Se $C : z_0/a + re^{it}$, com $t \in [0, 2\pi]$, verifique se

$$\int\limits_C \frac{1}{az - z_0}\, dz = \frac{1}{a} 2\pi i.$$

16 Derivadas n-ésimas de f

Uma primeira consequência da F.I.C., o resultado a seguir, garante que f holomorfa possui derivadas de todas as ordens e ainda há uma expressão para o cálculo dessas derivadas.

Teorema 52 (Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas)**.** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo em $\mathbb{C}$ e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Então f tem derivadas de todas as ordens em $z \in \Omega$ e vale*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi,$$

onde C é qualquer círculo centrado em z, orientado positivamente, cujo $tr(C) \subset \Omega$.

Demonstração. Tome $z \in \Omega$ arbitrário. Vamos provar o resultado usando indução em n.

Consideremos $n = 1$ e mostremos que

$$f'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Seja $C : |\xi - z| = \delta$, com $\delta > 0$ tal que $\mathrm{tr}(C) \subset \Omega$. Tome $h \in \mathbb{C}$, com $|h| < \delta$ então:

$$\begin{aligned}
\frac{f(z+h)-f(z)}{h} &= \frac{1}{h}\left[\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{\xi-(z+h)}\,d\xi - \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\,d\xi\right] \\
&= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_C \left[\frac{f(\xi)}{\xi-(z+h)} - \frac{f(\xi)}{(\xi-z)}\right] d\xi \\
&= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)(\xi-z)-f(\xi)(\xi-z-h)}{(\xi-(z+h))(\xi-z)}\,d\xi \\
&= \frac{1}{h}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)h}{(\xi-(z+h))(\xi-z)}\,d\xi.
\end{aligned}$$

Note que:

$$\frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} - \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)} = \frac{f(\xi)(\xi-z-h)-f(\xi)(\xi-z)}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)} =$$

$$= \frac{-hf(\xi)}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)}.$$

Portanto,

$$\frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)} = \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2} + \frac{hf(\xi)}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)}.$$

Assim,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z-h)(\xi-z)}\,d\xi = \frac{1}{2\pi i}\left(\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^2}\,d\xi + \int_C \frac{f(\xi)h}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)}\,d\xi\right).$$

Basta mostrar que

$$\lim_{h\to 0}\int_C \frac{f(\xi)h}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)}\,d\xi = 0.$$

Como temos

$$\left|\int_C \frac{f(\xi)h}{(\xi-z)^2(\xi-z-h)}\,d\xi\right| \leqslant \int_C \frac{|f(\xi)||h|}{|\xi-z|^2|\xi-z-h|}\,|d\xi|,$$

$\mathrm{tr}(C)$ é um conjunto compacto de $\mathbb{C}$ (fechado e limitado) e a função f é contínua, segue que existe $M > 0$ tal que $|f(\xi)| \leqslant M$, $\forall\ \xi \in \mathrm{tr}(C)$. Tomemos também $|h| < \dfrac{\delta}{2}$, podemos assumir isso pois faremos $h \to 0$. Além disso, note que

$$\begin{gathered}|\xi - z - h| \geqslant |\xi - z| - |h| > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}\\ \Rightarrow \frac{1}{|\epsilon - z - h|} < \frac{2}{\delta}.\end{gathered}$$

Então

$$\left| \int_C \frac{f(\xi)h}{(\xi - z)^2(\xi - z - h)}\, d\xi \right| < \int_C \frac{M|h|2}{\delta^2\delta}\, |d\xi| = \frac{4\pi M}{\delta^2}|h|.$$

Fazendo $h \to 0$, tem-se o resultado:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(z+h) - f(z)}{h} = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi.$$

Exercício: Mostre o caso em que $n = 2$, isto é,

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\, d\xi.$$

Suponhamos agora que a conclusão seja válida para $n - 1$, isto é,

$$f^{(n-1)}(z) = \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi,$$

e mostremos que vale para n. Considere $h \in \mathbb{C}$ tal que $z + h \in \Omega$ e $|h| < \delta$.

Assim,

$$\begin{aligned}\frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} &= \frac{1}{h}\frac{(n-1)!}{2\pi i} \left[\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z - h)^n} - \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^n}\, d\xi \right]\\ &= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right] f(\xi)\, d\xi.\end{aligned}$$

Note que $g : \Omega - \mathrm{tr}(C) \to \mathbb{C}$ dada por $g(z) = \dfrac{1}{(\xi - z)^n}$ é holomorfa e $g'(z) = \dfrac{n}{(\xi - z)^{n+1}} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{1}{h} \left[\dfrac{1}{(\xi - z - h)^n} - \dfrac{1}{(\xi - z)^n} \right]$.

Mostremos que

$$\lim_{h\to 0} \int_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right] f(\xi)\, d\xi = \int_C g'(z) f(\xi)\, d\xi.$$

De fato, primeiro observe que $f(\xi)$, com $\xi \in \operatorname{tr}(C)$, é limitada. Assim, existe $M > 0$ tal que $|f(\xi)| \leqslant M$, $\forall\, \xi \in \operatorname{tr}(C)$.

Além disso, dado $\epsilon > 0$, $\exists\, \hat{\delta} > 0$ $(\hat{\delta} < \delta)$ tal que

$$|h| < \hat{\delta} \Rightarrow \left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - g'(z) \right| < \epsilon.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
&\left| \int_C \left(\frac{g(z+h) - g(z)}{h} \right) f(\xi)\, d\xi - \int_C g'(z) f(\xi)\, d\xi \right| \\
&= \left| \int_C \left[\frac{g(z+h) - g(z)}{h} - g'(z) \right] f(\xi)\, d\xi \right| \\
&\leqslant \int_C \left| \frac{g(z+h) - g(z)}{h} - g'(z) \right| |f(\xi)|\, |d\xi| \\
&< \int_C \epsilon M\, |d\xi| = \epsilon M 2\pi\delta, \text{ desde que } |h| < \hat{\delta}.
\end{aligned}$$

Como ϵ é arbitrário, fazendo $\epsilon \to 0$ tem-se

$$\left| \int_C \frac{1}{h} \left(\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right) f(\xi)\, d\xi \right| = 0.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\lim_{h \to 0} \frac{f^{(n-1)}(z+h) - f^{(n-1)}(z)}{h} = \\
&\lim_{h \to 0} \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{1}{h} \left[\frac{1}{(\xi - z - h)^n} - \frac{1}{(\xi - z)^n} \right] f(\xi)\, d\xi \\
&= \frac{(n-1)!}{2\pi i} \int_C \frac{n}{(\xi - z)^{n+1}} f(\xi)\, d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}\, d\xi.
\end{aligned}$$

□

Observação 53. *O resultado acima continua válido para qualquer contorno α fechado simples contido em um domínio simplesmente conexo.*

Vamos realizar algumas aplicações deste resultado.

Exemplo 54. *Calculemos* $\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{z^2}\, dz$.

Como podemos escrever

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(\xi-0)^2}\, d\xi$$

nota-se que o ponto $z = 0$ *está envolvido pelo* $tr(C)$, *em que* $C : |z| = 2$ *e neste caso* $f(z) = e^z$ *é uma função inteira. Portanto,*

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{e^z}{(\xi-0)^2}\, d\xi = \frac{f'(0)2\pi i}{1!} = 2\pi i.$$

Exemplo 55. *Calculemos* $\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1}$.

Primeiramente, observe que

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{A}{z-i} + \frac{B}{z+i} = \frac{A(z+i)+B(z-i)}{(z-i)(z+i)}$$
$$A(z+i)+B(z-i) = 1$$

Se $z = i$, *temos* $2iA = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{2i}$.
Se $z = -i$, *temos* $B(-2i) = 1 \Rightarrow B = -\frac{1}{2i}$.
Usando, podemos reescrever a integral como soma de duas integrais, ou seja,

$$\begin{aligned}\int\limits_{|z|=2} \frac{dz}{z^2+1} &= \int\limits_{|z|=2} \frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z-i}\, dz + \int\limits_{|z|=2} -\frac{1}{2i}\cdot\frac{1}{z+i}\, dz \\ &= \frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z-i}\, dz - \frac{1}{2i}\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{z+i}\, dz = 0\end{aligned}$$

Exemplo 56. *Calculemos* $\int\limits_{|z|=3} \frac{\cos\left(z^2+3z-1\right)}{(2z+3)^2}\, dz$.

Note que o ponto $z = -3/2$ *está envolvido pelo* $tr(C)$ *e que a função* $f(z) = \cos\left(z^2+3z-1\right)$ *é inteira, pois é composta de funções deriváveis.*

Usando o corolário, temos

$$\int_C \frac{\cos\left(z^2+3z+1\right)}{(2z+3)^2}\,dz = \int_C \frac{\cos\left(z^2+3z+1\right)}{4\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2}\,dz =$$

$$= \frac{1}{4}\int_C \frac{\cos\left(z^2+3z+1\right)}{\left(z+\dfrac{3}{2}\right)^2}\,dz = \frac{1}{4}f'\left(\frac{-3}{2}\right)2\pi i = 0.$$

17 Exercícios

1. Usando a expressão de $f'(z)$ dada na prova da F.I.C. para Derivadas, mostre que a fórmula é válida para $n=2$, isto é,

$$f''(z) = \frac{2!}{2\pi i}\int_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^3}\,d\xi.$$

2. Calcule as integrais:

a) $\displaystyle\int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n}\, dz,\ n \in \mathbb{Z}.$

b) $\displaystyle\int_{|z-i|=1/2} \frac{e^z \text{senh}\,(2z+i)}{z(z-i)^2}\, dz.$

c) $\displaystyle\int_{|z|=3} \frac{(z^2+z+i)\text{Log}(z+8)}{(4z-i)^3}\, dz.$

d) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{z^2-4z+4}{z+1}\, dz.$

e) $\displaystyle\int_{|z-i|=3/2} \frac{1}{z^2(z^2+1)}\, dz.$

f) $\displaystyle\int_{|z|=6} \left(\frac{e^{2iz}}{z^4} - \frac{z^4}{(z-i)^3}\right) dz.$

g) $\displaystyle\int_{|z|=3/2} \left(\frac{\cosh z}{(z-\pi)^3} - \frac{\sin^2 z}{(2z-\pi)^3}\right) dz.$

3. Seja f uma função holomorfa num domínio simplesmente conexo Ω e seja C a circunferência $|z-z_0| = r$ contida em Ω e orientada positivamente. Se $|f(z)| \leq M$, para todo $z \in \text{tr}(C)$, mostre que

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{n!M}{r^n}.$$

4. Os resultados provados nesta seção garantem que se f for uma função diferenciável em algum domínio, então todas as derivadas, f', f'', ...existem no domínio. Mostre que na análise real este fato não é verdadeiro.

18 Consequências da F.I.C.

O teorema que demonstraremos a seguir traz uma condição suficiente para que uma função contínua seja holomorfa. Ou ainda, o resultado é uma recíproca do Teorema de Cauchy- Goursat.

Teorema 57 (Teorema de Morera). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Se*

$$\int_{\partial\triangle} f(z)\, dz = 0$$

para todo caminho triangular $\partial\triangle \subset \Omega$, então f é holomorfa em Ω.

Demonstração. Basta mostrar que existe $f'(z)$, $\forall z \in \Omega$. Dado $z_0 \in \Omega$ arbitrário, considere $\delta > 0$ tal que $D(z_0, \delta) \subset \Omega$, pois Ω é aberto.

Como $D(z_0, \delta)$ é estrelado podemos definir para todo $z \in D(z_0, \delta)$ a função

$$F(z) = \int_{z_0}^{z} f(\xi)\, d\xi.$$

Usando resultados anteriores, temos $F'(z) = f(z)$. Pelo Teorema da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas segue que F tem derivadas de todas as ordens.

Portanto,

$$F''(z) = f'(z), \ \forall\, z \in D(z_0, \delta).$$

Essa construção pode ser feita para qualquer ponto $z \in \Omega$, concluindo-se a prova. $\square$

Pelo fato da integral não depender do caminho, podemos enunciar o Teorema de Morera para caminhos fechados, como segue:

Teorema 58. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função contínua num domínio estrelado Ω. Se*

$$\int_{\gamma} f(z)\, dz = 0$$

para todo caminho fechado simples γ em Ω, então f é holomorfa em Ω.

O próximo resultado, conhecido como Teorema de Liouville, traz uma informação importante: uma função inteira não pode ser limitada, a menos que seja uma constante.

Teorema 59 (Teorema de Liouville). *Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função inteira e limitada. Então f é constante.*

Demonstração. Basta mostrar que $f'(a) = 0$, $\forall a \in \mathbb{C}$.

Como f é limitada em $\mathbb{C}$, tem-se $|f(z)| \leqslant M$, $\forall\, z \in \mathbb{C}$.
Dado $a \in \mathbb{C}$, arbitrário, tome $\rho > 0$ e $C : |z - a| = \rho$.
Pelo Teorema da Fórmula Integral de Cauchy para Derivadas tem-se

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_C \frac{f(\xi)}{(\xi - a)^2}\, d\xi,$$

logo

$$\begin{aligned} 0 \leqslant |f'(a)| &\leqslant \frac{1}{|2\pi i|} \int\limits_C \frac{|f(\xi)|}{|\xi - a|^2}\, |d\xi| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_C \frac{M}{\rho^2}\, |d\xi| = \frac{1}{2\pi} \frac{M}{\rho^2} 2\pi\rho. \end{aligned}$$

Portanto,

$$0 \leqslant |f'(a)| \leqslant \frac{M}{\rho}. \tag{7}$$

Como f é inteira, podemos tomar ρ tão grande quanto se queira. E fazendo $\rho \to \infty$ em (7) tem-se

$$|f'(a)| = 0 \Rightarrow f'(a) = 0.$$

□

Uma prova para o Teorema Fundamental da Álgebra pode ser dada utilizando o Teorema de Liouville, vejamos a seguir.

Teorema 60 (Teorema Fundamental da Álgebra)**.** *Todo polinômio com coeficientes em $\mathbb{C}$ de grau maior ou igual a 1 possui raiz.*

Demonstração. Seja $p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$, onde $a_n \neq 0$ e $n \geqslant 1$. Mostremos que existe $z_0 \in \mathbb{C}$ tal que $p(z_0) = 0$. Para provar este fato, vamos supor por contradição que $p(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}$.

Logo, a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = \dfrac{1}{p(z)}$ é inteira (função racional, cujo denominador não se anula).

Mostremos que $|p(z)| \to \infty$ quando $z \to \infty$. De fato, isso acontece pois

$$\begin{aligned}
|p(z)| &= |a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0| \\
&= |a_n z^n - (-a_{n-1}) z^{n-1} - \ldots - (-a_1) z - (-a_0)| \\
&\geqslant |a_n z^n| - |-a_{n-1} z^{n-1}| - \ldots - |-a_1 z| - |-a_0| \\
&= |a_n z^n| - |a_{n-1} z^{n-1}| - \ldots - |a_1 z| - |a_0| \\
&= |z|^n \left[|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right].
\end{aligned}$$

Como $\left[|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right] \to |a_n|$, quando $|z| \to +\infty$, e usando a desigualdade anterior, concluímos que

$$|p(z)| \geqslant |z|^n \left[|a_n| - \frac{|a_{n-1}|}{|z|} - \ldots - \frac{|a_1|}{|z|^{n-1}} - \frac{|a_0|}{|z|^n} \right] \to \infty.$$

Portanto, $\lim\limits_{z\to\infty} |f(z)| = 0$. Assim, dado $\epsilon > 0$, $\exists\ k > 0$ tal que

$$|z| > k \Rightarrow |f(z)| < \epsilon.$$

Em particular, para $\epsilon = 1$ existe $r > 0$ tal que $|z| > r \Rightarrow |f(z)| < 1$.

Segue que f é limitada fora do disco fechado de centro em 0 e raio r. Agora, considerando o disco fechado $D[0, r]$, o qual é compacto e, lembrando que f é contínua em $\mathbb{C}$, então existe $M > 0$ tal que

$$|f(z)| \leqslant M,\ \forall z \in D[0, r].$$

Considerando $K = \max\{1, M\}$, temos

$$|f(z)| \leqslant K,\ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Portanto, f é inteira e limitada. Pelo Teorema de Liouville, conclui-se que f é uma função constante, ou seja,

$$\frac{1}{p(z)} = c, \quad c \ \text{ constante} \Rightarrow cp(z) = 1.$$

Mas isto implica que o polinômio $p(z)$ tem grau zero e, portanto, $p(z)$ é constante. Mas é claro que isto gera uma contradição, pois $a_n \neq 0$, o que conclui a prova. $\square$

19 Exercícios

1. Prove que todo polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_n z^n$ onde $n \geqslant 1$ e $a_n \neq 0$ tem exatamente n raízes (não necessariamente todas distintas).

2. Mostre o Princípio do Máximo, enunciado a seguir.

Teorema 61 (Princípio do Máximo)**.** *Seja Ω um domínio limitado e seja f uma função holomorfa em Ω e contínua no fecho $\bar{\Omega}$. Então, o máximo de $|f|$ é um ponto da fronteira $\partial\Omega$.*

3. Determine o módulo máximo de $f(z) = 2z + 5i$ na região circular fechada definida por $|z| \leq 2$.

20 Séries de Funções Complexas

Neste capítulo mostraremos que uma função holomorfa definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ pode ser representada por uma série de potências. Veremos também que, sob certas hipóteses, vale a recíproca deste resultado. Para isso, vamos precisar de alguns resultados clássicos sobre séries numéricas.

21 Sequências e Séries Numéricas - revisão.

21.1 Sequências em $\mathbb{C}$

Definição 62. *Uma função $s : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ que associa a cada número natural n um número complexo $s(n) = z_n$ é denominada uma sequência em $\mathbb{C}$. O número complexo $s(n)$ é chamado de $n-$ésimo termo ou* **termo geral da sequência***. Denotamos a sequência por $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplesmente (z_n). Uma sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* **limitada** *quando existir $M > 0$ tal que $|z_n| \leq M$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Definição 63. *Dizemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$* **converge** *para um número complexo α se dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$, $(n_0 = n_0(\epsilon))$ tal que $\forall n > n_0$, $|z_n - \alpha| < \epsilon$. E escrevemos $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ ou simplesmente $z_n \to \alpha$. Neste caso a sequência $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é* **convergente***. Uma sequência que não é convergente é denominada* **divergente***.*

Observação 64. *O limite de uma sequência, quando existir, é único.*(*Demonstre!*)

Exemplo 65. *A sequência constante, dada por: $(z_n)_{n\in\mathbb{N}} = (z_0, z_0, z_0, \ldots)$ é convergente e, neste caso, $z_n \to z_0$.*

Exemplo 66. *Dada* $z_n = \dfrac{1+i}{\sqrt{n}}$*, então* $\lim_{n\to\infty} z_n = 0$*.*

De fato, dado $\epsilon > 0$*,* $\exists n_0 \in \mathbb{N}$*, neste caso, basta tomar qualquer natural* n_0 *com* $n_0 > \dfrac{2}{\epsilon^2}$*. Assim, para* $\forall n > n_0$ *tem-se:*

$$|z_n - 0| = \left|\frac{1+i}{\sqrt{n}}\right| = \frac{|1+i|}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \epsilon.$$

Proposição 67. *Toda sequência de números complexos* (z_n) *convergente é limitada.*

Demonstração. Como existe o limite da sequência, isto é, existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tal que $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \alpha$ temos, para $\epsilon = 1$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que ,$\forall\, n > n_0$, vale $|z_n - \alpha| < 1$. Logo,

$$|z_n| \leq |z_n - \alpha| + |\alpha| < 1 + |\alpha|, \forall n > n_0.$$

Tomando $r = \max\{1 + |\alpha|, |z_1|, \ldots, |z_{n_0}|\}$, tem-se que $z_n \in D(0, r)$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Portanto, (z_n) é uma sequência limitada. $\square$

Definição 68. *Sejam* $k_0 < k_1 < \ldots < k_n < \ldots$ *um conjunto infinito de números naturais e* $n \mapsto z_n$ *uma sequência de números complexos. A função que associa* $k_n \mapsto z_{k_n}$ *denomina-se uma* **subsequência** *de* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$*, a qual se representa por* $(z_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$*.*

Proposição 69 (Propriedades e Operações)**.** *Sejam* (z_n) *e* (w_n) *duas sequências de números complexos, então são válidas as seguintes propriedades:*

1. $z_n = x_n + iy_n \to a + bi \Leftrightarrow x_n \to a$ *e* $y_n \to b$*.*
2. *Se* $z_n \to \alpha$ *e* $w_n \to \beta$ *então:*
   - $i)$ $cz_n \to c\alpha, \forall c \in \mathbb{C}$;
   - $ii)$ $z_n + w_n \to \alpha + \beta$;
   - $iii)$ $z_n w_n \to \alpha\beta$;
   - $iv)$ *Se* $\alpha \neq 0$ *então* $\dfrac{1}{z_n} \to \dfrac{1}{\alpha}$*.*
3. *Toda sequência limitada de números complexos possui subsequência convergente.*

Demonstração. 1. Exercício.

2. (i), (ii) e (iii) Exercício. Mostremos (iv). Notemos primeiramente que

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|z_n||\alpha|}.$$

Como $\alpha \neq 0$ por hipótese e $z_n \to \alpha$, existem então $r > 0$ e um natural n_1 tais que $|\alpha| > r$ e $|z_n| > r$, para todo $n > n_1$. Dado agora $\epsilon > 0$, existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $|z_n - \alpha| < \epsilon r^2$, para todo $n > n_2$. Tomando $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$, tem-se

$$\left|\frac{1}{z_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|z_n - \alpha|}{|z_n||\alpha|} < \frac{\epsilon r^2}{r.r} = \epsilon.$$

3. Seja (z_n) uma sequência limitada de números complexos, isto é, $|z_n| \leq M$, $\forall n \in \mathbb{N}$, para algum $M > 0$.

Assim, $\mathrm{Re}\,(z_n) = x_n$ e $\mathrm{Im}\,(z_n) = y_n$ são também sequências de números reais limitadas, pois,

$$|x_n| \leq |z_n| \leq M \text{ e } |y_n| \leq |z_n| \leq M.$$

Como (x_n) é limitada, então existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, $x_{n_k} \to a$. Como a subsequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ também é limitada e, assim, possui subsequência $(y_{n_{k_j}})$ convergente para um número real b.

Portanto,

$$z_{n_{k_j}} = x_{n_{k_j}} + iy_{n_{k_j}} \to a + bi.$$

□

Exercício 70. *Prove que se (z_n) converge para um número w, então toda subsequência de (z_n) também converge para w.*

Exercício 71. *Verifique se existem os limites das seguintes sequências:*

1. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} + i\left(\frac{1}{2}\right)^n\right)$;

2. $\lim_{n\to\infty} \left(i + \left(\frac{4+3i}{5}\right)^n\right)$;

3. $\lim_{n\to\infty} \left[\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}i}{2}\right)^n\right]$;

4. $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{3}\right)^n$.

Definição 72. *Uma sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *denomina-se* **de Cauchy** *quando, para cada* $\epsilon > 0$*, existe um número natural* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *tal que*

$$|z_m - z_n| < \epsilon, \quad \forall\, m > n_0,\, n > n_0.$$

Proposição 73. *Toda sequência de Cauchy é limitada.*

Demonstração. Seja $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Portanto, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \epsilon, \quad \text{para todo} \;\; m > n_0,\, n > n_0.$$

Tomando $\epsilon = 1$ e $n = n_0 + 1$, segue que $|z_m - z_{n_0+1}| < 1$, para todo $m > n_0$. Assim,

$$|z_m| \leq |z_m - z_{n_0+1}| + |z_{n_0+1}| < 1 + |z_{n_0+1}|, \quad \text{para todo} \;\; m > n_0.$$

Considerando

$$M = \max\{|z_1|, |z_2|, \dots, |z_{n_0}|, 1 + |z_{n_0+1}|\}$$

conclui-se que $|z_n| < M$, para todo $n \in \mathbb{N}$, ou seja, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada. □

Teorema 74. *Uma sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números complexos é convergente se, e somente se,* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência de Cauchy.*

Demonstração. Suponha que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência convergente para z. Então, dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z| < \epsilon/2, \quad \text{também} \;\; |z_n - z| < \epsilon/2, \quad \text{para todo} \;\; m > n_0,\, n > n_0.$$

Usando agora a desigualdade triangular, temos

$$|z_m - z_n| \leq |z_m - z| + |z - z_n| < \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon, \quad \text{para todo} \;\; m > n_0,\, n > n_0.$$

Portanto, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

Suponha agora que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$. Do resultado anterior, sabemos que $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada e da Proposição 69, item 3, segue que existe uma subsequência $(z_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ convergente, digamos $z_{n_k} \to z$. Mostremos que $z_n \to z$. De fato, sendo a sequência de Cauchy, para cada $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_m - z_n| < \epsilon/2, \quad \text{para todo} \;\; m > n_0,\, n > n_0.$$

Como $z_{n_k} \to z$, existe $m_0 > n_0$ tal que $|z_{m_0} - z| < \epsilon/2$. Portanto,

$$|z_n - z| \leq |z_n - z_{m_0}| + |z_{m_0} - z| < \epsilon/2 + \epsilon/2, \quad \text{para todo} \;\; n > n_0.$$

O que prova que $z_n \to z$, isto é, $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

□

21.2 Séries numéricas em $\mathbb{C}$

Definição 75. *Uma* **série numérica em** $\mathbb{C}$ *é uma sequência* $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *gerada por uma sequência* $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de números complexos, dada pela seguinte forma:*

$$\begin{aligned} s_0 &= z_0 \\ s_1 &= z_0 + z_1 \\ s_2 &= z_0 + z_1 + z_2 \\ &\vdots \\ s_n &= z_0 + z_1 + \ldots + z_n = \sum_{j=0}^{n} z_j. \end{aligned}$$

Se $s_n \to s$, *quando* $n \to \infty$, *dizemos que a* **série converge e que sua soma e** $s \in \mathbb{C}$. *Caso contrário dizemos que a série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ **diverge**.

Observação 76. *É claro que podemos escrever* $z_n = x_n + iy_n$ *e, portanto,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} (x_n + iy_n).$$

Assim, usando os resultados de convergência de sequências da seção anterior segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *é convergente se, e só se,* $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ *forem convergentes.*

Logo, para mostrar que $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ converge basta mostrar que as séries de números reais $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ e $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ convergem, e daí podemos usar os critérios de convergência conhecidos de séries de números reais.

Exercício 77. *Descreva as hipóteses de cada teste denominado abaixo, como foi feito com o Teste da Comparação (não precisa demonstrá-los).*

1. ***Comparação***: *se* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *e* $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ *são séries de números reais* $a_n \geqslant 0$ *e* $b_n \geqslant 0$. *Se* $a_n \leqslant b_n$, $\forall n$, *então*

   i) *Se* $\sum b_n$ *converge então* $\sum a_n$ *converge;*

   ii) *Se* $\sum a_n$ *diverge então* $\sum b_n$ *diverge.*

2. ***Teste da Razão***.

3. ***Teste da Raiz***.

4. ***Critério da integral***.

5. ***Teste de Leibniz***.

Vejamos a seguir alguns resultados importantes sobre convergência de séries de números complexos, que serão úteis nas seções seguintes.

Teorema 78 (Critério de Cauchy)**.** *Uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *é convergente se, e somente se, a sequência formada pelas somas parciais* (s_n) *é uma sequência de Cauchy. Isto é, dado* $\epsilon > 0$*, existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$|z_{n+1} + ... + z_{n+p}| < \epsilon, \qquad \forall\ n > n_0,\ \forall\ p \geqslant 1.$$

Demonstração. Basta aplicar o Teorema 74 à sequência (s_n). □

Proposição 79. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *uma série de números complexos. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *converge então* $z_n \to 0$*, quando* $n \to \infty$.

Demonstração. Como $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é convergente, segue que $s_n = \sum_{j=0}^{n} z_j$, forma uma sequência de Cauchy. Portanto, dado $\epsilon > 0$, existe um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_{n+1} + ... + z_{n+p}| < \epsilon, \qquad \forall\ n > n_0,\ \forall\ p \geqslant 1.$$

Fazendo $p = 1$, tem-se que dado $\epsilon > 0$, $|z_{n+1}| < \epsilon$, $\forall\ n > n_0$, mas isto implica que $z_n \to 0$. □

Definição 80. *A série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *é denominada* **absolutamente convergente** *se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ *for convergente.*

Proposição 81. *Se a série* $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ *é absolutamente convergente então a série é convergente e vale*

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

Demonstração. Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |z_n|$ converge, então satisfaz o Critério de Cauchy, ou seja, dado $\epsilon > 0$, existe um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|z_{n+1}| + ... + |z_{n+p}| < \epsilon, \qquad \forall\ n > n_0,\ \forall\ p \geqslant 1.$$

Sendo

$$|z_{n+1} + ... + z_{n+p}| \leqslant |z_{n+1}| + ... + |z_{n+p}| < \epsilon,$$

tem-se que $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z_n$ é de Cauchy e, portanto, converge. Assim,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| = |\lim_{n\to\infty}(z_0 + z_1 + ... + z_n)| \leqslant \lim_{n\to\infty}(|z_0| + |z_1| + ... + |z_n|) = \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|.$$

□

Exercício 82. *Prove que se $\sum z_n$ e $\sum w_n$ são séries convergentes então*

i) $\sum(z_n + w_n)$ *converge;*

ii) $\sum cz_n$ *converge, para todo* $c \in \mathbb{C}$.

Exercício 83. *Prove que se $\sum z_n$ e $\sum w_n$ são séries de números complexos absolutamente convergentes, então a série produto $\sum p_n = \sum z_n \sum w_n$, também converge absolutamente.*

22 Séries de Potências

De modo análogo ao caso numérico, podemos definir uma série de funções complexas.

Definição 84. *Seja Ω um domínio em $\mathbb{C}$ e para cada n natural, seja $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função, assim, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forma uma* **sequência de funções complexas***. Define-se uma* **série de funções complexas** *como sendo a sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gerada pela sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções complexas da seguinte forma:*

$$\begin{gathered} s_0 = f_0 \\ s_1 = f_0 + f_1 \\ s_2 = f_0 + f_1 + f_2 \\ \vdots \\ s_n = f_0 + f_1 + \ldots + f_n = \sum_{j=0}^{n} f_j. \end{gathered}$$

Observação 85. *Consideremos uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *convergente em um subconjunto infinito* $E \subset \Omega$. *Para todo* $z_0 \in E$, *a série numérica* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z_0)$ *é convergente. Pelo Critério de Cauchy, dado* $\epsilon > 0$, *existe um número natural* $n_0 = n_0(z_0, \epsilon)$ *tal que*

$$|f_{n+1}(z_0) + f_{n+2}(z_0) + \cdots + f_{n+p}(z_0)| < \epsilon, \qquad \forall n > n_0,\ p \geqslant 1.$$

Sabe-se que, fixado ϵ e fazendo variar z_0 em E, a desigualdade acima pode ainda valer, mas o índice n_0 pode variar, conforme o valor z_0 considerado. Porém há séries para as quais existe um valor n_0 tal que a desigualdade anterior continua válida para todo valor de $z \in E$, para estes casos define-se a convergência uniforme.

Definição 86. *Dizemos que uma série* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *de funções complexas* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ **convergente uniformemente** *em um subconjunto infinito* $E \subset \Omega$, *quando para cada* $\epsilon > 0$, *existe um número natural* $n_0 = n_0(\epsilon)$ *tal que*

$$|f_{n+1}(z) + f_{n+2}(z) + \cdots + f_{n+p}(z)| < \epsilon, \qquad \forall n > n_0,\ p \geqslant 1,$$

qualquer que seja $z \in E$.

Exercício 87. (*Weierstrass*) *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} M_n$ *uma série convergente de números reais positivos. Se* $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *é uma série de funções complexas* $f_n : \Omega \to \mathbb{C}$ *tais que*

$$|f_n(z)| < M_n, \quad \forall\, z \in \Omega, \quad \forall\, n \in \mathbb{N}$$

mostre que a série $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ *converge uniformemente em* Ω.

Vamos à definição de série de potências.

Definição 88. *Para cada n, considere* $f_n : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ *definida por* $f_n(z) = a_n(z - z_0)^n$. *A série*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n,$$

em que (a_n) *é uma sequência de números complexos (denominados coeficientes da série) e* z_0 *é um número complexo fixado (denominado centro da série de potências) é denominada* **série de potências**. *O elemento* $a_n(z - z_0)^n$ *é chamado de termo geral da série.*

Em alguns casos e teoremas podemos assumir $z_0 = 0$, sem perda de generalidade.

Façamos, por exemplo, $z_0 = 0$ e $a_n = 1$, obtemos assim a série geométrica $\sum z^n$. Para investigarmos a convergência, iniciamos com a condição do termo geral $z^n \to 0$. E isso ocorre se, e só se, $|z| < 1$, daí concluímos que a série diverge para $|z| \geqslant 1$.

Para $|z| < 1$, vamos considerar $S_n(z) = 1 + z + \ldots + z^n$. Assim,

$$(1-z)S_n(z) = 1 - z^{n+1} \Rightarrow S_n(z) = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

Como $|z| < 1$, segue que $\dfrac{z^{n+1}}{1-z} \to 0$. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}, \quad z \in \mathbb{C},\ |z| < 1.$$

Vale observar que a convergência também é absoluta no disco $D(0,1) = \{z \in \mathbb{C} :\ |z| < 1\}$.

Veremos que toda série de potência complexa possui um **raio de convergência**, que pode ser zero, infinito ou um número real positivo. Assim como uma série de potência de números reais tem um intervalo de convergência, é de se esperar que uma série de potências complexa da forma $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, tenha um disco de convergência, que é um círculo centrado em z_0 e o maior raio $R > 0$, tal que a série convirja em todos os pontos $|z - z_0| < R$. Para estudarmos o tipo de convergência no disco, vamos precisar do próximo resultado.

Por simplicidade a proposição seguinte é provada para uma série de potência centrada em $z_0 = 0$. A prova é análoga para o caso em que z_0 é não nulo.

Proposição 89. *Considere a série de potências* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, *então:*

a) *Se existir* $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq 0$, *tal que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ *converge então* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *converge absolutamente* $\forall z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| < |z_1|$.

b) *Se existir* $z_2 \in \mathbb{C}$, $z_2 \neq 0$ *tal que* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_2^n$ *diverge, então* $\sum a_n z^n$ *diverge para* $\forall z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| > |z_2|$.

Demonstração. a) Como $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_1^n$ é convergente então (revisão) sabemos que o termo geral $a_n z_1^n \to 0$, quando $n \to \infty$. Logo, a sequência $(a_n z_1^n)$ é limitada, isto é, $\exists K > 0$ tal que

$$|a_n z_1^n| < K \Rightarrow |a_n||z_1|^n < K, \forall n \in \mathbb{N}.$$

Considere $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < |z_1|$, assim

$$|a_n z^n| \overset{z_1 \neq 0}{=} \frac{|a_n||z|^n |z_1|^n}{|z_1|^n} < K \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^n.$$

Como $|z| < |z_1| \Rightarrow 0 < \dfrac{|z|}{|z_1|} = q < 1$ e, portanto, a série numérica $\sum\limits_{n=0}^{\infty} K q^n$ é convergente.

Usando o Teste da Comparação, segue que a série $\sum |a_n z^n|$ é convergente, isto é, $\sum a_n z^n$ é absolutamente convergente $\forall\, z \in \mathbb{C}$, satisfazendo $|z| < |z_1|$.

b) Exercício. (Seguir as mesmas ideias). □

Definição 90. *Dizemos que uma série de potências* $\sum a_n (z - z_0)^n$ **converge uniformemente** *em um conjunto* $D \subset \mathbb{C}$ *se existir uma função* $S : D \to \mathbb{C}$ *tal que, dado* $\epsilon > 0$ *existe um índice* n_0 *satisfazendo*

$$\left| S(z) - \sum_{j=0}^{n} a_j (z - z_0)^j \right| < \epsilon, \quad \forall\, n > n_0.$$

Neste caso, $S_n(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j (z - z_0)^j$ *converge para* $S(z)$, *para todo* $z \in D$.

Proposição 91. *Seja $\sum a_n(z-z_0)^n$ uma série de potência que satisfaz, para todo $n \in \mathbb{N}$:*

$$|a_n(z-z_0)^n| \leqslant b_n, \quad \forall\, z \in D,$$

onde $\sum b_n$ é uma série de números reais positivos convergente. Então, a série $\sum a_n(z-z_0)^n$ é uniformemente convergente em D.

Demonstração. Como a série $\sum b_n$ é convergente, dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} b_j - \sum_{j=0}^{n} b_j\right| = \sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \epsilon, \ \ \forall\, n > n_0.$$

Note primeiramente, que para cada $z \in D$ a série numérica $\sum a_n(z-z_0)^n$ é absolutamente convergente (Pelo Teste da Comparação).

Assim, para $n > n_0$ e para todo $z \in D$, temos

$$\left|\sum_{j=0}^{\infty} a_j(z-z_0)^j - \sum_{j=0}^{n} a_j(z-z_0)^j\right| = \left|\sum_{j=n+1}^{\infty} a_j(z-z_0)^j\right| \leqslant \sum_{j=n+1}^{\infty} |a_j(z-z_0)|^j$$
$$\leqslant \textstyle\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j < \epsilon.$$

O resultado segue do teste de Weierstrass. □

Exercício 92. *Prove que a série geométrica $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ é uniformemente convergente em $D[0,r]$, com $0 \leqslant r < 1$, mas não é uniformemente no disco aberto $D(0,1)$.*

23 Raio de Convergência

Pelos resultados da seção anterior, podemos concluir que dada uma série $\sum a_n z^n$, se existir um $z_1 \in \mathbb{C}$ tal que $\sum a_n z_1^n$ converge, então existe um disco fechado $D[0,r]$ tal que a série $\sum a_n z^n$ é absolutamente convergente nos pontos $z \in D(0,r)$. Veremos a seguir que a convergência é uniforme no disco fechado $D[0,r']$, com $0 \leqslant r' < r$. Daí, é possível definir uma função $f : D(0,r) \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Este disco aberto denomina-se **círculo de convergência** da série e r é chamado o **raio de convergência** da série.

O próximo resultado mostra como determinar o raio de convergência de uma série de potências em $\mathbb{C}$, análogo ao caso real.

Lema 93. *Seja* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *uma série de potências. Consideremos a sequência* $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$*, então o raio* r *de convergência desta série é*

$$r = \begin{cases} 0, & \textit{se } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty, \\ \infty, & \textit{se } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, \\ \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} & \textit{se } 0 < \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < \infty. \end{cases}$$

Se r *for finito, a série converge absolutamente para todo* z *tal que* $|z-z_0| < r$ *e diverge para todo* z *que satisfaz* $|z-z_0| > r$*. A convergência é uniforme em* $D[z_0, r']$*, para* $0 < r' < r$*.*

Demonstração. Provemos o caso em que $r = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$. Como o limite da sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ existe e supondo diferente de zero, este $r > 0$ está bem definido. Para provar que este r é o raio de convergência, basta mostrar que r satisfaz as condições sobre a convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$.

Para isto, considere s arbitrário tal que $0 < s < r$. Logo, $\dfrac{1}{s} > \dfrac{1}{r}$. Como o limite da sequência $\sqrt[n]{|a_n|}$ existe, quando $n \to \infty$, então existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{s}, \ \forall\, n > n_0 \Rightarrow |a_n| < \frac{1}{s^n} \ \ \forall\, n > n_0.$$

Assim, para $|z-z_0| < s$ e $n > n_0$, temos

$$|a_n(z-z_0)^n| < \left(\frac{|z-z_0|^n}{s^n}\right).$$

Como $\frac{|z-z_0|}{s} < 1$, a série $\sum \frac{(z-z_0)^n}{s^n}$ é absolutamente convergente. Pela desigualdade anterior segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ é absolutamente convergente em $D(z_0, r)$, pois $s < r$ é arbitrário.

Agora, dado r' tal que $0 < r' < r$, tome s tal que $r' < s < r$, então como feito anteriormente, para $|z-z_0| \leqslant r'$, temos

$$|a_n(z-z_0)^n| < \left(\frac{r'}{s}\right)^n,$$

para n suficientemente grande. Assim, a série é uniformemente convergente em $D[z_0, r']$.

Para $s > r$ então $1/s < 1/r$. Logo, existe $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $1/s < \sqrt[n]{|a_n|}$, para todo $n > n_1$. Se tomarmos $|z-z_0| \geqslant s$ então

$$|a_n(z-z_0)^n| > \left(\frac{|z-z_0|^n}{s^n}\right).$$

Como $|(z-z_0)|/s \geqslant 1$ então o termo geral $a_n(z-z_0)^n$ não tende a zero quando $n \to \infty$. Segue disto que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ não pode ser convergente neste caso.

Exercício: prove os outros dois casos. $\square$

Observação 94. *Note que a sequência* $(\sqrt[n]{|a_n|})_{n\in\mathbb{N}}$*, pode ser ilimitada, daí definimos o limite superior como sendo* $+\infty$ *e* $r=0$ *é o raio de convergência; e pode ser limitada (e não convergente) então considera-se*

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}.$$

Observação 95. *De forma análoga ao caso real, se existir o limite da sequência* $\left(\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$*, podemos mostrar a igualdade abaixo:*

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}.$$

Agora, podemos enunciar o resultado abaixo:

Teorema 96 (Cauchy-Hadamard)**.** *Se* $r \neq 0$ *(como definido anteriormente) for finito então a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ *é convergente em valor absoluto para todo* $z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z-z_0| < r$ *e divergente para os números* $z \in \mathbb{C}$ *tais que* $|z-z_0| > r$*. Além disso, se* $0 \leqslant r' < r$ *a convergência da série é uniforme em* $D[z_0, r']$*.*
Quando $r = \infty$ *a série converge absolutamente para todo* $z \in \mathbb{C}$*. Se* $r = 0$ *a série converge apenas em* $z = z_0$*.*

Demonstração. Para $r > 0$ finito, a prova segue do lema anterior.

Seja agora $r = \infty$, é claro que para $z = z_0$ segue que $\sum a_n(z-z_0)^n$ é convergente. Tome agora z fixado e suponha $z \neq z_0$.

Como $r = \infty$, tem-se $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, assim dado $\epsilon = \dfrac{1}{2|z-z_0|}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n > n_0$.

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|z-z_0|}.$$

Logo, $\sqrt[n]{|a_n||z-z_0|^n} < |z-z_0|\dfrac{1}{2|z-z_0|} < 1$, $\forall n \geq n_0$.

Pelo Teste da Raiz, segue que $\sum |a_n(z-z_0)^n|$ é convergente. Como z é arbitrário, a convergência acontece para todo $z \in \mathbb{C}$.

Agora, se $r = 0$, para $z = z_0$ é óbvio que a série converge.

Seja $z_1 \in \mathbb{C}$, $z_1 \neq z_0$. Suponha, por contradição, que a série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z_1-z_0)^n$ seja convergente.

Assim, $(a_n(z_1 - z_0)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência limitada, isto é, $\exists M > 0$ tal que

$$|a_n(z_1 - z_0)^n| \leq M.$$

o que implica

$$\begin{aligned} |a_n||z_1 - z_0|^n \leq M, \qquad \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|}|z_1 - z_0| \leq M^{\frac{1}{n}} \\ \Rightarrow \sqrt[n]{|a_n|} \leq \frac{M^{\frac{1}{n}}}{|z_1 - z_0|} \end{aligned}$$

o que implica $\sqrt[n]{|a_n|}$ limitada, o que é um absurdo, pois $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$. □

Os exemplos seguintes mostram que nada podemos concluir com respeito aos pontos da fronteira do disco $D(z_0, r)$ de convergência da série de potências em $\mathbb{C}$.

Exemplo 97. *Considere a série* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} nz^n$. *Então,*

$$r = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = 1,$$

$\forall z \in D(0,1)$ *a série* $\sum nz^n$ *converge absolutamente.*

Para $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$, $z = x_0 + iy_0$, *temos*

$$\sum (x_0 + iy_0)^n n$$
$$|n(x_0 + iy_0)^n| = n|x_0 + iy_0|^n = 1^n n = n \to \infty.$$

Portanto, o termo geral $(n(x_0 + iy_0)^n)$ *com* $|x_0 + iy_0| = 1$ *não converge para zero. Assim,* $\sum nz^n$ *diverge* $\forall z \in \mathbb{C}$ *com* $|z| = 1$.

Exemplo 98. *Considere agora a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$. *Então,*

$$\begin{aligned} r &= \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2}}{\frac{1}{(n+1)^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n^2} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n}}{1} = 1. \end{aligned}$$

Portanto, a série converge absolutamente $\forall z \in D(0,1)$*. Tome agora* $z \in \mathbb{C}$, $|z| = 1$*, então* $\left|\dfrac{z^n}{n^2}\right| = \dfrac{|z|^n}{n^2} = \dfrac{1}{n^2}$.

Como $\sum \dfrac{1}{n^2}$ *converge,* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ *converge absolutamente* $\forall z$, $|z| = 1$.

Portanto, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n^2}$ *converge absolutamente* $\forall z \in D[0,1]$.

Exemplo 99. *Considere a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n}$*. Então,*

$$r = \frac{1}{\lim \sqrt[n]{\dfrac{1}{n}}} = 1.$$

Escolha $z_1 = 1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$*, a qual diverge.*

Escolha $z_2 = -1 \Rightarrow \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n}$*, a qual converge, pelo Teste de Leibniz.*

Neste exemplo, há pontos da fronteira do disco cuja série é convergente e há pontos em que a série é divergente.

Em muitas vezes é conveniente efetuar certas operações aritméticas em uma ou mais séries de potências, assim, para finalizar esta seção, vamos apresentar as operações clássicas.

Proposição 100. *Sejam* $f_1(z) = \sum a_n z^n$ *e* $f_2(z) = \sum b_n z^n$ *duas séries potências com raio de convergência* r_1 *e* r_2*, respectivamente. Então,*

a) $\sum c\, a_n z^n$ *tem raio de convergência* r_1 *e vale* $\sum c a_n z^n = c \sum a_n z^n$*, para* $c \in \mathbb{C}$*;*

b) $\sum a_n z^n + \sum b_n z^n = \sum (a_n + b_n) z^n$, $\forall z \in D(0, r)$*, onde* $r = \min\{r_1, r_2\}$*;*

c) Se $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$ *então a série* $\sum c_n z^n$ *converge absolutamente* $\forall z \in \mathbb{C}$ *tal que* $|z| < \min\{r_1, r_2\}$ *e*

$$\sum c_n z^n = \left(\sum a_n z^n\right) \left(\sum b_n z^n\right).$$

A prova desta proposição é deixada como exercício. Sugestão: use as mesmas ideias do caso real.

24 Exercícios

1. Calcule o raio de convergência das séries:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4+3i)^n} z^n$

b) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right) z^n$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{n}{(2i)^n} z^n$

d) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$

e) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

25 Resultados sobre séries de potências

Vejamos, nesta seção, como obter alguns fatos básicos sobre as séries de potências. Os primeiros dois resultados discorrem sobre o cálculo da derivada de uma série.

Proposição 101. *Se $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ possui raio de convergência $r > 0$ então a série das derivadas possui o mesmo raio de convergência r. Isto é, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ converge absolutamente $\forall z \in \mathbb{C}$, $|z| < r$.*

Demonstração. Sabemos que $r = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|a_n|}}$ é o raio de convergência de $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Também, segue que o raio convergência da série $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ é dado por $R = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n a_n|}}$. Como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ e usando propriedades de limite, obtemos

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{|n a_n|}} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}\sqrt[n]{|a_n|}} = r.$$

□

Teorema 102. *Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$. Então $f'(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$, $\forall z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$.*

Demonstração. Denote $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} na_n z^{n-1}$. Pela Proposição 101, g converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$ que satisfaz $|z| < R$.

Mostremos que dado $z_0 \in \mathbb{C}$ com $|z_0| < R$, $f'(z_0) = g(z_0)$. De fato, para $z \in \mathbb{C}$ com $|z| < R$, temos

$$\begin{aligned}\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) &= \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n - \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z_0^n}{z - z_0} - \sum_{n=0}^{\infty} na_n z_0^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n(z^n - z_0^n)}{z - z_0} - \sum_{n=1}^{\infty} na_n z_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned}\frac{z^n - z_0^n}{z - z_0} &= \frac{(z - z_0)}{z - z_0}(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}) \\ &= z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}.\end{aligned}$$

Assim, podemos escrever

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n[z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1}].$$

Escolha $r \in \mathbb{R}$, tal que $R > r \geq \max\{|z|, |z_0|\}$, logo,

$$\begin{aligned}&|a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})| \\ &\qquad \leq |a_n||z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1}| + n|a_n||z_0|^{n-1} \\ &\qquad \leq |a_n|(nr^{n-1}) + n|a_n|r^{n-1} = 2n|a_n|r^{n-1}.\end{aligned}$$

Então,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})| \leq 2\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}.$$

Pela Proposição 101, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} na_n z^{n-1}$ converge absolutamente e uniformemente, para todo $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| < R$, segue disto que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n|a_n|r^{n-1}$ converge. Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - nz_0^{n-1})$$

converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z| < R$.

Mostremos agora que o limite desta série é zero. De fato, considere $N \in \mathbb{N}$ e a reduzida

$$S_N = \sum_{n=1}^{N} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1})$$

e denote

$$F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + z_0 z^{n-2} + \ldots + z_0^{n-2} z + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}).$$

Então

$$|F(z) - S_N(z)| = \left| \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n(z^{n-1} + \ldots + z_0^{n-1} - n z_0^{n-1}) \right|.$$

É claro que $F(z) - S_N(z) \to 0$, quando $N \to \infty$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $N > n_0$ tem-se

$$|F(z) - S_N(z)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{8}$$

Por outro lado, sabemos que $S_N(z_0) = 0$ e $S_N(z)$ é uma função polinomial e, portanto, contínua em $z = z_0$, ou seja, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$

$$|S_N(z)| = |S_N(z) - S_N(z_0)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{9}$$

Agora, tomando $N > n_0$ e $z \in \mathbb{C}$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta$, $(|z| < R,\ |z_0| < R)$ temos

$$|F(z)| \leq |S_N(z)| + |F(z) - S_N(z)| \overset{(8)(9)}{<} \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon$$

Portanto, $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - g(z_0) = 0$, o que implica $f'(z_0) = g(z_0)$.

□

Corolário 103. *Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ uma série de potências de raio de convergência $R > 0$. Então $f(z)$ tem derivadas de todas as ordens no disco $D(0, R)$ e mais*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)(n-2)\ldots(n-k+1) z^{n-k}.$$

Demonstração. Basta aplicar o teorema anterior recursivamente. □

O próximo resultado garante que toda função holomorfa pode ser expressada por uma série de potências. A representação de uma f através deste tipo de série de potências denomina-se **desenvolvimento de Taylor da função analítica f**.

Teorema 104 (Teorema de Taylor). *Sejam $\Omega \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorfa em Ω. Então, para todo $z_0 \in \Omega$ existe uma única série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ convergente em um disco $D(z_0, r) \subset \Omega$ tal que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, para todo $z \in D(z_0, r)$.*

Demonstração. Como Ω é aberto, existe $R > 0$ tal que $D(z_0, R) \subset \Omega$. Tome $0 < r < R$ e seja $\gamma : |z - z_0| = r$ orientada positivamente.

Seja $\xi \in \text{tr}(\gamma)$, vamos escrever primeiramente

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0 + z_0 - z} = \frac{1}{\xi - z_0} \, \frac{1}{1 - \left(\frac{z-z_0}{\xi - z_0}\right)}.$$

Sendo $|z - z_0| < |\xi - z_0| = r$, podemos considerar a série $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi - z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n$.

Calculemos o raio de convergência desta série:

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}\right|}{\left|\frac{1}{(\xi-z_0)^{n+2}}\right|} = \lim_{n\to\infty} |\xi - z_0| = \lim_{n\to\infty} r = r.$$

Portanto, a série converge absolutamente para todo $z \in \mathbb{C}$, $|z - z_0| < r$.

Lembremos que

$$\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n, \text{ com } |z| < 1.$$

Assim, para $w = \left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)$, tem-se

$$\frac{1}{\xi - z} = \frac{1}{\xi - z_0}\frac{1}{1-w} = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty} w^n = \frac{1}{\xi - z_0}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{z-z_0}{\xi-z_0}\right)^n$$

$$\therefore \frac{1}{\xi - z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n,$$

a qual converge uniformemente em $D(z_0, r)$. Multiplicando os dois lados da igualdade anterior por $\frac{f(\xi)}{2\pi i}$ e integrando termo a termo em relação à γ, obtemos

$$\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi - z)}\frac{1}{2\pi i}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}(z-z_0)^n \frac{1}{2\pi i}\, d\xi$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-z_0)^n}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{(\xi-z_0)^{n+1}}\, d\xi.$$

Lembrando a Fórmula Integral de Cauchy e sua consequência para derivadas:

$$\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}}\, d\xi,$$

podemos voltar na expressão anterior e identificar essas igualdades para obter

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n,$$

para todo z no interior do $\operatorname{tr}(\gamma)$, isto é, para todo $z \in D(z_0, r)$. Essa representação, em que $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$, é chamada de **Série de Taylor da função** f.

Mostremos agora a sua unicidade. Para isto, suponha que fixado $z_0 \in \Omega$ também temos a representação de f pela série de potências $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$, $\forall z \in \mathbb{C}$, com $|z - z_0| < r$. Ou seja,

$$f(z) = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots$$

$\forall z \in D(z_0, r) \subset \Omega$.

Assim, fazendo $z = z_0$ obtemos $f(z_0) = b_0$. Derivando essa série termo a termo, temos $f'(z) = b_1 + 2b_2(z - z_0) + \ldots$ logo, $f'(z_0) = b_1$. Repetindo as contas, obtemos $f^{(n)}(z_0) = n!b_n$.

Portanto, $b_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = a_n$. Ou seja, escolhido z_0, a representação da f em série de potências é única. □

Observação 105. *Quando $z_0 = 0$, a representação de Taylor de f é denominada* **representação de Maclaurin de** f

Observação 106. *O resultado anterior não é verdadeiro para funções de variável real. Por exemplo,*

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

Mostremos que existe $f^{(n)}(0)$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} f'_+(0) &= \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x} \\ u &= \frac{1}{x} \\ &= \lim_{u \to \infty} u e^{-u^2} = \lim_{u \to \infty} \frac{u}{e^{u^2}} \overset{L'H}{=} \lim_{u \to \infty} \frac{1}{2u e^{u^2}} = 0 \end{aligned}$$

Analogamente $f'_-(0) = 0$, concluindo

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}}, \, x \neq 0 \\ 0, \, x = 0 \end{cases}$$

Exercício: *$f^{(n)}(0) = 0$.*

Assim, $f^{(n)}(0)$ existe para todo $n \in \mathbb{R}$. Mas $f(x) \neq \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$.

Exemplo 107. *Represente por uma série a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = e^z$.*

Exercício 108. *Represente por uma série a função $f(z) = \dfrac{1}{1 - z^2}$.*

26 Exercícios

1. Determine o raio de convergência das séries dadas abaixo:

a)$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{2^n}{n!} z^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} n! z^n$ c) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{(z-i)^n}{n!}$

d) $\sum_{n=0}^{\infty} (\sqrt{2})^{3n} z^n$ e) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{3^n} z^{n^2}$ f) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!} z^n$

2. Se a série $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ possui raio de convergência $0 < R < \infty$ calcule o raio de convergência das seguintes séries:

a) $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{c_n}{n!} z^n$ b) $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (1 + \dfrac{1}{n}) z^n$

3. Represente em séries de potências em torno de $z_0 = 0$:

a) $e^z \text{Log}\,(1+z)$ b) $\dfrac{\operatorname{sen} z}{1 - z}$ c) $\dfrac{1}{(1-z)^2}$

d) $\cos z \operatorname{sen} z$ e) $\dfrac{1}{(1+z)^2}$ f) $\dfrac{\cos z}{(1+z)^2}$

g) $\dfrac{z^3}{z - 2i}$ h) $\dfrac{z^2 + 3}{\cosh z}$ i) $e^{1/\cos z}$

4. Determine a representação em série de potências da função $\cos z$, centrada em $z_0 = \pi/2$.

5. Seja $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa e limitada em $\mathbb{C}$. Se existem constantes $c > 0$ e $m \in \mathbb{N}$ tais que $|f(z)| \leq c|z|^m$, para todo $z \in \mathbb{C}$, então prove que f será um polinômio de grau $n \leq m$.

6. Seja $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ absolutamente convergente, prove que a série $\sum_{n=0}^{\infty} z_n^2$ também converge absolutamente.

7. Sejam f e g funções holoformas em um disco $D(z_0; r)$ com expansões em séries de Taylor dadas por $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ e $g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-z_0)^n$. Prove que a expansão em série de Taylor do produto fg em torno de z_0 tem a forma $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n$, onde $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

27 Séries de Laurent

Neste capítulo veremos uma importante representação também em série de uma função de variável complexa, conhecida como Série de Laurent, a qual generaliza a Série de Taylor, ou seja, em certas condições a Série de Laurent de uma função será a de Taylor. Mas primeiramente, é preciso analisarmos os zeros de uma função holomorfa, tema da próxima seção.

28 Zeros de Funções

Veremos que os zeros de uma função holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$, a qual não é identificamente nula, são isolados, isto é, se $z_0 \in \Omega$ tal que $f(z_0) = 0$, então em algum disco $D(z_0, r)$, $r > 0$ não existe outro zero da função f.

Teorema 109. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que todas as derivadas de f se anulam em z_0 então f se anula em $D(z_0, r)$ para algum $r > 0$, isto é, $f(z) = 0$, para todo $z \in D(z_0, r)$.*

Demonstração. Como f é holomorfa em Ω então, pelo Teorema de Taylor, existe $R > 0$ tal que para todo $z \in D(z_0, R)$ a função f pode ser representada pela seguinte série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n, \ \forall z \in D(z_0, R).$$

Mas por hipótese, $f^{(n)}(z_0) = 0$, para todo $n = 0, 1, \ldots$, segue então que f é nula no disco $D(z_0, R)$. Portanto, basta tomar $r = R$ da representação em série e conclui-se a prova do resultado. $\square$

Teorema 110. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Se $z_0 \in \mathbb{C}$ é tal que $f(z_0) = 0$ e nem todas as derivadas de f se anulam em z_0, então z_0 é um zero isolado de f.*

Demonstração. Por hipótese existe m inteiro positivo tal que $f^{(m)}(z_0) = 0$ e $f^{(m+1)}(z_0) \neq 0$, assim $f^{(j)}(z_0) = 0$, $\forall\, j = 0, \ldots, m$.

Como f é holomorfa em Ω, pelo Teorema de Taylor, existe $R > 0$ tal que para todo $z \in D(z_0, R)$, a função f pode ser representada pela série de potências

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n, \ \forall\, z \in D(z_0, R).$$

Pelas hipóteses sobre a f, a série se torna

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n = (z - z_0)^{m+1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+1+n)}(z_0)(z - z_0)^n}{(m+1+n)!} \\ &= (z - z_0)^{m+1} \cdot g(z), \end{aligned}$$

em que $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(m+1+n)}(z_0)(z - z_0)^n}{(m+1+n)!}$ é uma função holomorfa em $D(z_0, R)$ e, portanto, contínua.

Note que $g(z_0) = \dfrac{f^{(m+1)}(z_0)}{(m+1)!} \neq 0$.

E como g é contínua em z_0, dado $\epsilon = \dfrac{|g(z_0)|}{2} > 0$, existe $\delta > 0$, com $\delta < R$ tal que $0 < |z - z_0| < \delta \Rightarrow |g(z_0) - g(z)| < \dfrac{|g(z_0)|}{2}$.

Assim,

$$\begin{aligned} |g(z_0)| - |g(z)| \leqslant |g(z_0) - g(z)| &< \frac{|g(z_0)|}{2} \\ \Rightarrow |g(z_0)| - \frac{|g(z_0)|}{2} &< |g(z)| \\ \therefore |g(z)| > \frac{|g(z_0)|}{2} &> 0, \ \ \forall\, z \in D(z_0, \delta). \end{aligned}$$

Voltando na representação em série da f, temos

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |(z - z_0)^{m+1} g(z)| = |(z - z_0)^{m+1}||g(z)| \\ &\Rightarrow |f(z)| > |z - z_0|^{m+1} \frac{|g(z_0)|}{2} > 0, \end{aligned}$$

para todo $z \in D(z_0, \delta) - \{z_0\}$. Portanto, z_0 é um zero isolado de f. $\square$

Observação 111. *Nas condições do Teorema 110, se o ponto z_0 é um zero isolado de f então existe uma função holomorfa $g : D(z_0, R) \to \mathbb{C}$ satisfazendo*

$$f(z) = (z - z_0)^k g(z);$$

para algum natural k, com $g(z_0) \neq 0$.

Definição 112. *Seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa em um domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ contendo z_0, um zero isolado de f. O número k da observação anterior é chamado* **ordem do zero** *z_0 de f.*

Exemplo 113. *Considere a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(z) = 1 - |z|^2$. Então, busquemos os zeros de f:*

$$\begin{aligned} f(z) = 0 &\Rightarrow 1 - |z|^2 = 0 \\ &\Rightarrow |z|^2 = 1 \\ &\Rightarrow |z| = 1. \end{aligned}$$

Essa função não pode ser holomorfa. Pois os zeros de f são os pontos da fronteira do disco $D(0,1)$ e, portanto, não são isolados. (Se fosse holomorfa, pelo resultado anterior os zeros teriam que ser isolados).

Exemplo 114. *Considere agora a função $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dada por $f(z) = 1 - \cos z$.*

a) Mostremos que $z_0 = 0$ é um zero de ordem 2 de f. De fato,

$$\begin{gathered} f(0) = 1 - 1 = 0 \\ f'(z) = \operatorname{sen} z,\ f'(0) = 0 \\ f''(z) = \cos z,\ f''(0) = 1 \neq 0. \end{gathered}$$

b) Vamos reescrever f como sendo $f(z) = z^2 g(z)$. Para isto, precisamos definir a função $g(z)$. Vamos usar a prova do resultado principal.

Note que

$$\begin{aligned} \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ &\Rightarrow f(z) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} \\ &f(z) = 1 - \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \frac{z^8}{8!} - \dots\right) \\ &\qquad = (1-1) - z^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{z^2}{4!} - \frac{z^4}{6!} + \frac{z^6}{8!} - \dots\right) \\ &\Rightarrow f(z) = z^2\left(\frac{1}{2} - \frac{z^2}{4!} + \frac{z^4}{6!} - \frac{z^6}{8!} + \dots\right) \end{aligned}$$

Portanto, $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n}}{(2n+2)!}$.

Exemplo 115. *Vamos expressar a função* $f(z) = \dfrac{e^z}{z^3}$ *na forma de série de potências em torno de* $z = 0$. *Como conhecemos a expansão da exponencial, temos*

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

$$f(z) = \frac{\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}}{z^3} = \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{2!z} + \frac{1}{3!} + \frac{z}{4!} + \ldots$$

Esta não é uma série de potências, pois envolve expoentes negativos, essa série é conhecida por **série de Laurent**, *a qual generaliza a série de Taylor. Este é o tema da próxima seção.*

Exercício 116. *Mostre que* $z = 0$ *é um zero de ordem 3 da função* $f(z) = z\,sen\,(z^2)$.

Exercício 117. *Determine os zeros e suas ordens para a função:*
a) $f(z) = (z + 2 - i)^2$
b) $f(z) = z^4 + z^2$
c) $f(z) = e^{2z} - e^z$

29 Construção das Séries de Laurent

Dada uma função holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$, onde $\Omega \subset \mathbb{C}$ é um domínio e $z_0 \in \Omega$, vimos que existe um disco $D(z_0, r) \subset \Omega$, com $r > 0$, no qual $f(z)$ é representada univocamente por uma série de potências para todo $z \in D(z_0, r)$.

A recíproca também é válida, isto é, dada um série de potências, existe $R > 0$ tal que a série $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, com $z \in D(z_0, R)$ e R satisfazendo

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad \text{ou} \quad R = \lim_{n\to\infty} \frac{|a_n|}{|a_{n+1}|},$$

define uma função holomorfa.

No entanto, se f for holomorfa em Ω exceto em um ponto $z_0 \in \Omega$, não podemos aplicar o Teorema de Taylor. Então, surge naturalmente a pergunta: podemos representar f localmente por outro tipo de série?

A resposta é sim e faremos isso a seguir. Considere $z_0 \in \mathbb{C}$ e sejam r_1 e r_2 dois números reais positivos ($r_2 < r_1$), vamos definir as seguintes curvas:

$C_1 = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r_1\}$ orientada positivamente;

$C_2 = \{z \in \mathbb{C}; |z - z_0| = r_2\}$ orientada positivamente.

E considere o anel (ou coroa circular):

$$\mathscr{A} = \mathscr{A}(z_0, r_1, r_2) = \{z \in \mathbb{C};\, r_2 < |z - z_0| < r_1\}.$$

Seja f holomorfa em $\mathscr{A}$ e sobre C_1 e C_2. Veremos que f pode ser representada por uma série de potências, que pode conter parcelas com expoentes positivos e negativos de $(z - z_0)$, como descrito abaixo

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m}, \;\; z \in \mathscr{A}, \tag{10}$$

a qual converge uniformemente na coroa circular. Provaremos que as sequências (a_n) e (b_m) são obtidas por integração, isto é,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_1} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta,\; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{11a}$$

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_2} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-m+1}}\, d\xi,\; m = 1, 2, \ldots \tag{11b}$$

A série em (10) é chamada **Série de Laurent** de f em torno de $z = z_0$.

Observação 118. *Podemos observar que quando f for holomorfa num domínio contendo C_1, o integrando da integral (11b) é também uma função holomorfa e, portanto, a integral é nula (já que C_2 é fechado). Assim, a série em (10) se reduz a série de Taylor da f. Portanto uma expansão de Laurent, pode ser considerada uma generalização da série de Taylor.*

Teorema 119 (Teorema de Laurent)**.** *Seja f uma função holomorfa na coroa circular $\mathscr{A} = \{z \in \mathbb{C},\, r_1 < |z - z_0| < r_2\}$. Então f admite uma única representação de Laurent dada por*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{(z - z_0)^m},$$

sendo uniformemente convergente em $\mathscr{A}$. Os coeficientes a_n e b_m são dados por

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta, \quad b_m = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-m+1}}\, d\xi,$$

em que $n \geqslant 0$, $m \geqslant 1$ são naturais e γ é um caminho fechado contido em $\mathscr{A}$ orientado positivamente contendo z_0 em seu interior.

Exercício 120. *Faça a demonstração do Teorema de Laurent.*

Observação 121. *O domínio anelar $\mathscr{A}$ dado no teorema não precisa ter a forma de um "anel" (padrão), também pode assumir as formas*

i) $r_1 = 0$ *e* $r_2 > 0$ *finito;*

ii) $r_1 \neq 0$ *e* $r_2 = \infty$*;*

iii) $r_1 = 0$ *e* $r_2 = \infty$*.*

30 Exemplos

Exemplo 122. *Dada* $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$*, vamos determinar a Série de Laurent de* f *para os seguintes domínios:*

a) $0 < |z| < 1$*;*

b) $1 < |z|$*;*

c) $0 < |z-1| < 1$*;*

d) $1 < |z-1|$*.*

a) Como f *é holomorfa em* $A = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z| < 1\}$*, seque que* f *admite expansão de Laurent. Vamos a construção:*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} \cdot \frac{1}{1-z} = -\frac{1}{z}[1 + z + z^2 + z^3 + \ldots], \text{ pois } |z| < 1$$
$$\Rightarrow f(z) = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - z^3 - \ldots, \forall z \in A.$$

Note que $b_1 = -1$*.*

b) $A = \{z \in \mathbb{C}; |z| > 1\}$*,* f *é holomorfa em* A*, logo admite expansão de Laurent. Note que* $|z| > 1 \Rightarrow \left|\dfrac{1}{z}\right| < 1$*. Assim,*

$$f(z) = \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z \cdot z\left(1 - \frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{z^2\left(1 - \frac{1}{z}\right)}$$
$$f(z) = \frac{1}{z^2}\left[1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \ldots\right], \text{ pois } \left|\frac{1}{z}\right| < 1$$
$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^4} + \frac{1}{z^5} \ldots, \forall\, z \in A.$$

Note que $b_1 = 0$.

c) Agora, $A = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z-1| < 1\}$. *Como novamente* f *é holomorfa em* A*, segue que* f *admite representação em Série de Laurent. Assim,*

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+(z-1)} \\ &= \frac{1}{z-1}\left[1-(z-1)+(z-1)^2-(z-1)^3+\dots\right] \\ &= \frac{1}{z-1} - 1 + (z-1) - (z-1)^2 + (z-1)^3, \dots \quad \forall\, z \in A. \end{aligned}$$

Note que $b_1 = 1$.

d) Neste caso, $A = \{z \in \mathbb{C}, |z-1| > 1\}$. *Note que* $\left|\dfrac{1}{z-1}\right| < 1$.

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} \cdot \frac{1}{1+z-1} = \frac{1}{z-1} \frac{1}{(z-1)\left(\frac{1}{z-1}+1\right)} = \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{z-1}+1} \\ f(z) &= \frac{1}{(z-1)^2}\left[1 - \frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \dots\right] \\ &= \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{(z-1)^4} - \dots, \quad \forall\, z \in A \end{aligned}$$

e $b_1 = 0$.

Exemplo 123. *Usando a expressão dos* a_n *e* b_m *dados no Teorema de Laurent, vamos encontrar a expansão de Laurent de*

$$f(z) = \frac{e^{z-1}}{(z-1)^3}, \ \forall\, z \in \mathbb{C} - \{1\}.$$

Como f *é holomorfa em* $\mathbb{C} - \{1\}$*, admite expansão de Laurent,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-1)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z-1)^{-m},$$

onde

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\eta)}{(\eta - z_0)^{n+1}}\, d\eta, \quad e \quad b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{-m+1}}\, d\xi.$$

Calculando a_n:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z-1}}{(z-1)^{n+4}}\,dz \overset{F.I.C}{=} \frac{1}{2\pi i} g^{(n+3)}(1)\frac{2\pi i}{(n+3)!},$$

onde $g(z) = e^{z-1} \Rightarrow g^{(n)}(z) = e^{z-1} \Rightarrow g^{(n)}(1) = 1.$

Portanto, $a_n = \dfrac{1}{(n+3)!}$, $n = 0, 1, 2, 3 \ldots$

Calculando b_m:

$$b_m = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z-1}}{(z-1)^{-m+4}}\,dz.$$

Observe que para $m \geqslant 4$, o integrando $\dfrac{e^{z-1}}{(z-1)^{-m+4}}$ é uma função inteira e como γ é fechado, segue que $b_m = 0$, $\forall m \geqslant 4$. Para os demais:

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z-1}}{(z-1)^3}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{2!}2\pi i = \frac{1}{2}$$

$$b_2 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z-1}}{(z-1)^2}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot\frac{1}{1!}2\pi i = 1$$

$$b_3 = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{e^{z-1}}{z-1}\,dz = \frac{1}{2\pi i}\cdot 1\cdot 2\pi i = 1$$

Então

$$\frac{e^{z-1}}{(z-1)^3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n+3)!}(z-1)^n + \frac{1}{2}\frac{1}{z-1} + \frac{1}{(z-1)^2} + \frac{1}{(z-1)^3}.$$

Exercício 124. *Encontre a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ nos seguintes casos:*

a) $1 < |z| < 3$;

b) $|z| > 3$;

c) $0 < |z+1| < 2$;

d) $|z| < 1$.

Exercício 125. *Encontre a série de Laurent para $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ nos seguintes casos:*

a) $0 < |z-1| < 2$;

b) $0 < |z-3| < 2$.

Exercício 126. *Encontre a série de Laurent para* $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^5}$ *, para* $0 < |z|$.

Exercício 127. *Encontre a série de Laurent para* $f(z) = z\cos\dfrac{1}{z}$ *, para* $0 < |z|$.

31 Singularidades isoladas

32 Classificação

Para a classificação das singularidades de uma função f, veremos que a expansão de série de Laurent da f terá um papel crucial. E, para isto, precisaremos da seguinte definição:

Definição 128. *Na representação de Laurent de uma função holomorfa f definida em uma região anelar $A = \{z \in \mathbb{C},\, 0 < |z - z_0| < r\}$, a série de potências negativas de $(z - z_0)$ é chamada de* **parte principal de** $f(z)$ **em torno de** z_0.

Definição 129. *Um ponto z_0 é chamado de* **ponto singular (ou singularidade)** *isolado da função f quando existir uma vizinhança de z_0 tal que f é holomorfa nessa vizinhança exceto em z_0.*

Exemplo 130. *A origem é ponto singular isolado das seguintes funções:*

i) $f_1(z) = \dfrac{\operatorname{sen} nz}{z}$;

ii) $f_2(z) = \dfrac{1}{z^n}$, $n \in \mathbb{N}$;

iii) $f_3(z) = e^{\frac{1}{z}}$.

Se z_0 é uma singularidade de f então existe um número positivo $r > 0$ tal que f é holomorfa na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C},\, 0 < |z - z_0| < r\}$ e, portanto, admite expansão em série de Laurent, isto é, podemos escrever:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{\infty} b_m (z - z_0)^{-m},$$

onde a_n e b_m são dados no Teorema de Laurent.

Assim, essa representação passa a ser o instrumento apropriado para o estudo do comportamento deste tipo de função. Um estudo importante é sobre o comportamento da $f(z)$ quando $z \to z_0$. Nesta situação, há três possibilidades:

i) f fica limitada quando $z \to z_0$;

ii) f fica ilimitada para z próximo de z_0 (explodindo para mais infinito);

iii) f é não-limitada mas indeterminada.

Por conta destes possíveis comportamentos, classifica-se o ponto singular isolado, como veremos a seguir.

33 Singularidade removível

Nesta seção faremos o estudo do ponto singular denominado removível e veremos como este ponto influencia na Série de Laurent da f.

Definição 131. *Uma singularidade isolada p de f é denominada* **removível** *quando f for limitada em uma vizinhança $D(p,r) - \{p\}$.*

O resultado a seguir justifica o conceito de singularidade removível. Pois se existir $\lim\limits_{z \to p} f(z) = c$, podemos construir uma função $g : D(p,r) \to \mathbb{C}$ tal que $g(z) = f(z)$ para $z \in D(p,r) - \{p\}$ e $g(p) = c$, que é uma extensão de f holomorfa no disco $D(p,r)$.

Teorema 132. *Um ponto p é uma singularidade removível de f se, e só se, $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ existe.*

Demonstração. Supondo que exista $\lim_{z \to p} f(z)$ então existe uma vizinhança de p (exceto p) em que f é limitada, ou seja, p é um ponto singular removível.

Suponha que p seja um ponto singular removível, isto é, $\exists r > 0$ tal que f é limitada em $D(p,r) - \{p\}$. Mostremos que existe o $\lim_{z \to p} f(z)$. Para isto, basta mostrar que $b_m = 0$ para todo $m = 1, 2, \ldots$.

De fato,

$$|b_m| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-p)^{-m+1}}\, dz \right|$$

onde γ é a circunferência de centro p e raio $r_1 < r$. Por hipótese, existe $M > 0$ tal que $|f(z)| \leqslant M$, para todo $z \in D(p,r) - \{p\}$.

Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} |b_m| &\leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{|f(z)|}{|z-p|^{-m+1}}\, |dz| \leqslant \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\gamma} \frac{M}{r_1^{-m+1}}\, |dz| \\ &\leqslant \frac{M}{2\pi r_1^{-m+1}} 2\pi r_1 = M r_1^m, \end{aligned}$$

como r_1 é arbitrário, fazendo $r_1 \to 0$, tem-se $Mr_1^m \to 0$. Segue disto que $b_m = 0$, $m = 1, 2, \ldots$. A série de Laurent de f se reduz a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-p)^n.$$

Calculando então o limite de $f(z)$ expressa pela série acima, quando $z \to p$, temos

$$\lim_{z \to p} f(z) = a_0.$$

Portanto, o $\lim\limits_{z \to p} f(z)$ existe. $\square$

Exemplo 133. *Seja $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}$. Mostremos que $z = 0$ é uma singularidade removível e construa uma extensão inteira de f.*

De fato, pela definição, temos

$$\lim_{z \to 0} \frac{\operatorname{sen} z}{z} \overset{L'H}{=} \lim_{z \to 0} \frac{\cos z}{1} = 1.$$

Assim, podemos considerar uma função g que assume os valores de f exceto na singularide e de modo que g seja holomorfa. Basta definr

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} z}{z}, \, z \neq 0 \\ 1, \, z = 0. \end{cases}$$

Mostre que g' existe e que $g'(0) = 0$.

Exemplo 134. *Considere $f(z) = \dfrac{z-3}{z^2-9}$. Então, f possui dois pontos singulares isolados, a saber 3 e -3. Calculando o limite, temos*

$$\lim_{z \to 3} \frac{z-3}{z^2-9} = \frac{1}{6}.$$

Logo, $z = 3$ é um ponto singular removível. Podemos, portanto, definir a extensão holomorfa de f por

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{z-3}{z^2-9}, \, z \notin \{3, -3\} \\ \\ \dfrac{1}{6}, \, z = 3. \end{cases}$$

E quanto ao outro ponto, $z = -3$? O que acontece com $\lim\limits_{z \to -3} \dfrac{z-3}{z^2-9}$?

Ainda temos que considerar o caso em que f não é limitada em uma vizinhança do ponto singular z_0. Veremos duas situações:

i) f diverge para ∞ no ponto z_0;

ii) f é indeterminada em z_0 (não existe o limite e nem diverge para ∞).

34 Polos

Definição 135. *Um ponto singular isolado z_0 de uma função holomorfa f denomina-se um* **polo** *se $f(z) \to \infty$ quando $z \to z_0$.*

Por exemplo, a origem é um ponto singular de $f(z) = \dfrac{1}{z^n}$, o qual é polo, pois f se torna ilimtada quando z fica próximo de 0.

Proposição 136. *Um ponto z_0 é um polo de f se, e somente se, z_0 for um zero da extensão holomorfa de $\dfrac{1}{f}$ a algum disco aberto.*

Demonstração. Suponha que z_0 seja um polo de f, então existe um disco aberto $D(z_0, r)$, $r > 0$, tal que $|f(z)| > 1$ para todo $z \in D(z_0, r) - \{z_0\}$. A aplicação $g : D(z_0, r) - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definida por $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ é holomorfa neste domínio, portanto, z_0 é uma singularidade isolada de g.

Como $|g(z)| < 1$ em $D(z_0, r) - \{z_0\}$, segue que z_0 é singularidade removível. Assim, g possui extensão holomorfa definida por

$$g(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{f(z)}, & z \in D(z_0, r) - \{z_0\} \\ \\ \lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f(z)} = 0, & z = z_0, \end{cases}$$

ou seja, z_0 é um zero de g.

Reciprocamente, seja $g : D(z_0, r) \to \mathbb{C}$ holomorfa, diferente da função nula e possuindo um zero isolado em z_0 (isolado, pois g é holomorfa). Logo, existe $0 < r' < r$ tal que em $D(z_0, r')$ não existem zeros de g distintos de z_0. Consideremos então a função holomorfa $f : D(z_0, r') - \{z_0\} \to \mathbb{C}$ definida por $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$. Portanto, $f(z) \to \infty$ quando $z \to z_0$. Concluímos que z_0 é um polo de f.

$\square$

35 Ordem um polo e singularidade essencial

Da relação existente entre zeros de uma função holomorfa e polos dada pela Proposição 136, é possível classificar a ordem de um polo.

Definição 137. *Dizemos que um polo z_0 de uma função holomorfa f é de* **ordem** *k, com $k \in \mathbb{N}$, se z_0 for um zero de ordem k da extensão holomorfa de $\frac{1}{f}$. Quando $k = 1$, dizemos que z_0 é um* **polo simples**.

E para finalizar a classificação das singularidades de uma função f, vamos introduzir a seguinte definição.

Definição 138. *Seja z_0 um ponto singular isolado de uma função holomorfa f. Diz-se que z_0 é um* **ponto singular essencial**, *se f for indeterminada em z_0, isto é, f não possui limite em z_0, nem diverge para infinito neste ponto.*

Já vimos que para o caso de singularidade removível, a parte principal da Série de Laurent é nula. Assim, com respeito à Série de Laurent de uma função holomorfa f em uma região anelar A, temos dois casos a considerar:

i) se a parte principal contém apenas um número finito de termos, isto é, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $b_k \neq 0$ e $b_{k+1} = b_{k+2} = \ldots = 0$. Neste caso,

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - z_0)} + \ldots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

para $z \in A$. E o ponto singular z_0 é um **polo de ordem** k da função f e vale a recíproca - **Exercício 1 da Seção 6.5**.

ii) se a parte principal contem uma infinidade de termos, o ponto singular z_0 é um **ponto singular essencial** da função f e vale a recíproca - **Exercício 2 da Seção 6.5**.

Exemplo 139. *Considere $f(z) = e^{\frac{1}{z}}$. Note que f é holomorfa em seu domínio. Façamos o cálculo quando $z \to 0$ de f segundo as semirretas $Imz = 0$, isto é, $z = x + iy = x$. Note que $e^{1/x} \to \infty$ se $x > 0$ e $e^{1/x} \to 0$ se $x < 0$. Isso implica que f é indeterminada na origem. Portanto, 0 é ponto singular essencial.*

Po outro lado, usando agora a expansão em Série de Taylor da função exponencial, isto é,

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}, \qquad \forall \ w \in \mathbb{C},$$

podemos escrever a série de Laurent de $f(z) = e^{1/z}$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n}, \quad z \neq 0.$$

Observamos que, de fato há uma infinidade de termos com expoentes negativos.

A seguir, faremos um resultado que permite determinar se uma singularidade é polo de ordem k através do cálculo de um limite. Muitas vezes, esse caminho facilita na verificação deste tipo de singularidade em vez da construção da Série de Laurent.

Proposição 140. *Uma singularidade z_0 de uma função f holomorfa na coroa circular*

$$A = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\} \quad r > 0,$$

é um polo de ordem k se, e só se, $\lim_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z)$ existe e é diferente de zero.

Demonstração. Suponha que z_0 seja um polo de ordem k, assim f admite a expansão de Laurent na forma

$$f(z) = \frac{b_1}{z - z_0} + \ldots + \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \ \text{ com } b_k \neq 0.$$

(Exercício 1 da próxima lista)

Multiplicando ambos os lados dessa igualdade por $(z - z_0)^k$ e calculando o limite, obtemos $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = b_k \neq 0$.

Reciprocamente, suponha que existe $\lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0)^k f(z) = w_0 \neq 0$.

Defina a função $h(z) = (z - z_0)^k f(z)$, para $z \in A$, com a propriedade que $\lim\limits_{z \to z_0} h(z) = w_0$. Logo, z_0 é uma singularidade removível de h.

Neste caso a parte principal da série de Laurent de h em torno de z_0 é igual a zero, isto é, $b_m = 0, m = 1, 2, \ldots$ e

$$h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad \text{onde } a_0 = w_0.$$

Portanto,

$$(z - z_0)^k f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{w_0}{(z - z_0)^k} + \frac{a_1}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{a_{k-1}}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{k+n} (z - z_0)^n.$$

Como $w_0 \neq 0$, segue que z_0 é um polo de ordem k de f, o que conclui a prova do resultado. □

Classifiquemos as singularidades das funções definidas a seguir.

Exemplo 141. *Considere* $f(z) = \dfrac{e^z \text{Log}\,(z+1)}{z^4(z-2)}$. *As singularidades são* $z_0 = 0$ *e* $z_1 = 2$. *Note que*

$$\lim_{z\to 0} z^4 f(z) = \lim_{z\to 0} z^4 \frac{e^z \text{Log}\,(z+1)}{z^4(z-2)} = 0,$$

logo $z_0 = 0$ *não é um polo de ordem* 4.

Agora,

$$\begin{aligned}\lim_{z\to 0} z^3 f(z) &= \lim_{z\to 0} \frac{e^z \text{Log}\,(z+1)}{z(z-2)} = \lim_{z\to 0} e^z \frac{\text{Log}\,(z+1)}{z} \frac{1}{z-2} \\ &= \lim_{z\to 0} e^z \underbrace{\lim_{z\to 0} \frac{\text{Log}\,(z+1)}{z}}_{L'H\hat{o}p.} \lim_{z\to 0} \frac{1}{z-2} = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2} \neq 0.\end{aligned}$$

Portanto, $z_0 = 0$ *é um polo de ordem 3.*

Mostremos que $z_1 = 2$ *é polo simples. De fato,*

$$\lim_{z\to 2} \frac{(z-2)e^z \text{Log}\,(z+1)}{z^4(z-2)} = \lim_{z\to 2} \frac{e^z \text{Log}\,(z+1)}{z^4} = \frac{e^2 \text{Log}\,3}{2^4} \neq 0.$$

Exemplo 142. *Seja* $f(z) = \dfrac{z - \operatorname{sen} z}{z^3}$. *Então* $z_0 = 0$ *é uma singularidade de* f.

Como

$$\begin{aligned} sen\, z &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{sen^{(n)}(0)\, z^n}{n!} = 0 + z - \frac{z^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} \\ \Rightarrow f(z) &= \frac{z - \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}}{z^3} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} - \frac{z^4}{7!} + \ldots,\end{aligned}$$

segue que $z_0 = 0$ *é uma singularidade removível.*

Exemplo 143. *Seja* $f(z) = \dfrac{5z-2}{z(z-1)}$. *Temos duas singularidades isoladas* $z_0 = 0$ *e* $z_1 = 1$.

Para z_0, *temos*

$$\lim_{z\to 0} z f(z) = \lim_{z\to 0} \frac{5z-2}{z-1} = 2 \neq 0.$$

Portanto, $z_0 = 0$ *é um polo simples. E para* z_1, *temos*

$$\lim_{z \to 1} \frac{(z-1)(5z-2)}{z(z-1)} = \lim_{z \to 1} \frac{5z-2}{z} = 3 \neq 0.$$

Segue que $z_1 = 1$ é também um polo simples.

Para finalizar esta seção, vale comentar que podemos também considerar o infinito como sendo uma singularidade de uma função holomorfa definida em uma região ilimitada do plano complexo.

Definição 144. *Seja f uma função holomorfa no domínio ilimitado $\Omega = \{z \in \mathbb{C} : \ |z| > R\}$, $R > 0$. Dizemos que o* **infinito é uma singularidade removível, polo de ordem k ou singularidade essencial de f,** *se o número complexo zero for, respectivamente, singularidade removível, polo de ordem k ou singularidade essencial da função $g(w) = f(1/w)$, holomorfa em $A = \{w \in \mathbb{C} : \ 0 < |w| < 1/R\}$.*

Em vista desta definição, todos os resultados demonstrados anteriormente podem ser aplicados ao estudo do comportamento da g em $z_0 = 0$.

Exemplo 145. *Consideremos $f(z) = e^z$, então o que podemos afirmar sobre o comportamento de f quando $z \to \infty$? Como zero é uma singularidade essencial de $g(z) = e^{1/z}$, segue que o infinito é uma singularidade essencial de f, ou seja, fica indeterminado o limite de f quando $z \to \infty$.*

36 Exercícios

1. Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja um polo de ordem $k > 0$ de uma função holomorfa f é que a representação de Laurent no anel $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_0| < R\}$ se reduza a

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{m=1}^{k} \frac{b_m}{(z - z_0)^m}, \ b_k \neq 0.$$

2. Uma condição necessária e suficiente para que z_0 seja uma singularidade essencial de uma função holomorfa f é que a representação de Laurent no anel $A = \{z \in \mathbb{C} : \ 0 < |z - z_0| < R\}$ possua uma infinidade de coeficientes b_m, diferentes de zero.

3. Mostre que $z = 0$ é uma singularidade removível e construa uma extensão holomorfa de f:

a) $f(z) = \dfrac{e^{2z} - 1}{z}$ b) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen}(4z) - 4z}{z^2}$

4. Construa a Série de Laurent de cada função em torno de z_0 e depois classifique a singularidade:

a) $f(z) = z(1 - \cos^2 z); \quad z_0 = 0$ b) $f(z) = 1 - e^{z-1}; \quad z_0 = 1$

5. Determine a ordem dos polos das funções abaixo:

a) $f(z) = \dfrac{3z-1}{z^2+2z+5}$ b) $f(z) = \tan z$

c) $f(z) = \dfrac{1-\cosh z}{z^4}$ d) $f(z) = \dfrac{1}{1+e^z}$

6. Classifique as singularidades e forneça a parte principal no ponto $z_0 = 0$.

a) $f(z) = \dfrac{\cot z}{z^2}$ b) $f(z) = z^3 \operatorname{sen}\dfrac{1}{z}$

c) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z^3}$

7. Uma função f é **meromorfa** se for holomorfa em todo um domínio Ω, exceto possivelmente por polos em Ω e o infinito é uma singularidade essencial. Mostre que a função $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1}$ é meromorfa.

8. Prove o Teorema de Casorati-Weierstrass: Seja z_0 um ponto singular essencial de uma função holomorfa f. Então, dado qualquer número complexo L, existe uma sequência $(z_n)_n$ satisfazendo:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = z_0 \quad \text{e} \quad \lim_{n\to\infty} f(z_n) = L.$$

9. Prove que as únicas singularidades isoladas de uma função racional f são polos ou singularidades removíveis.

37 Resíduos

Seja f uma função holomorfa em uma vizinhança Ω de um ponto singular isolado z_0. Consideremos uma curva γ dada pela circunferência de centro em z_0 e contida em Ω. Sabemos que a integral

$$P = \int_\gamma f(z)\, dz$$

não é necessariamente nula (pois envolve a singularidade z_0).

O número complexo $R = \frac{P}{2\pi i}$ é tal que a função definida abaixo

$$z \mapsto f(z) - \frac{R}{z - z_0}, \qquad z \in \Omega - \{z_0\}$$

possui integral nula ao longo de γ. Por esta razão o número R é denominado **resíduo de f no ponto singular z_0.** Notação para o resíduo de uma função f no ponto z_0: $R(z_0)$ ou $R(f, z_0)$.

O resíduo está associado ao termo b_1 da série de Laurent. Para verificar isto, basta considerar a série de Laurent de uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$ em torno da singularidade z_0, isto é,

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \frac{b_2}{(z - z_0)^2} + \ldots,$$

uniformemente convergente no anel $A = \{z \in \Omega : \ 0 < |z - z_0| < r\}$ contido em Ω. E notar que se γ é a circunferência $\{z \in \Omega : \ |z - z_0| = r_1\}$, com $r_1 < r$, então a integral

$$\int_\gamma (z - z_0)^n \, dz = 0, \quad n \in \mathbb{Z}, n \neq -1.$$

Segue disto que a função

$$z \mapsto f(z) - \frac{b_1}{z - z_0},$$

possui integral nula ao longo de γ. Assim, o resíduo de f no ponto singular isolado z_0 é o coeficiente b_1 do desenvolvimento de Laurent de f em torno de z_0.

38 Cálculo de Resíduo para Polos

Consideremos o caso em que z_0 é um **polo simples** de uma função f holomorfa na região anelar $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$, e cuja representação de Laurent é dada por

$$f(z) = \frac{b_1}{(z - z_0)} + a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots.$$

Assim, podemos escrever

$$f(z) = g(z) + \frac{b_1}{z - z_0} \Rightarrow (z - z_0)f(z) = (z - z_0)g(z) + b_1,$$

sendo g holomorfa. Neste caso, o resíduo pode ser calculado pelo limite

$$R(z_0) = b_1 = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Portanto, temos o seguinte resultado

Teorema 146. *Se f é holomorfa em $A = \{z \in \mathbb{C}; 0 < |z - z_0| < r\}$, com $r > 0$ e z_0 é um polo simples de f, então*

$$R(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z).$$

Exemplo 147. *Seja $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$, para $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z - i| < 1$. Note que f possui um polo simples em $z_0 = i$ e, portanto, o resíduo é dado por*

$$R(i) = \lim_{z \to i} (z - i) \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{2i}.$$

É possível generalizar o resultado anterior para o caso em que z_0 é um polo de ordem k.

Teorema 148. *Seja f holomorfa na região $A = \{z \in \mathbb{C}, 0 < |z - z_0| < r\}$, com $r > 0$. Se z_0 um polo de ordem k de f, então*

$$R(z_0) = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} [(z - z_0)^k f(z)].$$

Demonstração. Como z_0 é um polo de ordem k de f segue que a expansão de Laurent de f em torno de z_0 é dada por

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - z_0)^{k-1}} + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Assim,

$(z - z_0)^k f(z) = b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \ldots + b_1 (z - z_0)^{k-1} + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k}.$

O que implica

$$\frac{d}{dz}[(z - z_0)^k f(z)] = b_{k-1} + 2b_{k-2}(z - z_0) + \ldots + (k-1) b_1 (z - z_0)^{k-2} +$$

$\sum_{n=0}^{\infty} (n+k) a_n (z - z_0)^{n+k-1}.$

Usando indução finita, é possível provar que

$$\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z - z_0)^k f(z)] = (k-1)! b_1 + k! a_0 (z - z_0) + (k+1)! a_1 (z - z_0)^2 + (k+2)! a_2 (z - z_0)^3 + \ldots.$$

Portanto,

$$\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = (k-1)!b_1.$$

Conclui-se que

$$\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-z_0)^k f(z)] = b_1 = R(z_0).$$

$\square$

Exemplo 149. *Calculemos os resíduos da* $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)^2(z-3)}$ *em cada ponto singular.*

Note que f *possui dois pontos singulares:* $z_0 = 1$, $z_1 = 3$. *Para* $z_0 = 1$, *temos*

$$\lim_{z\to 1}(z-1)^2 f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{1}{z-3} = -\frac{1}{2} \neq 0,$$

portanto $z_0 = 1$ *é polo de ordem* 2, *logo o resíduo é dado por*

$$R(1) = \frac{1}{(2-1)!}\lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}((z-1)^2 f(z)) = \lim_{z\to 1} -\frac{1}{(z-3)^2} = -\frac{1}{4}.$$

Agora, para $z_1 = 3$, *temos*

$$R(3) = \lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{1}{(z-1)^2} = \frac{1}{4}.$$

Exercício 150. *Calcule os resíduos de* $f(z) = \dfrac{1}{z^4+1}$ *em cada ponto singular.*

39 Teorema dos Resíduos

Nesta seção, veremos a importância da determinação dos resíduos em cada ponto singular de uma função no cálculo de certas integrais.

Teorema 151 (Teorema dos Resíduos)**.** *Seja* $w = f(z)$ *uma função holomorfa em um domínio* Ω, *exceto nos pontos singulares isolados distintos* $z_1, z_2, \ldots, z_n$ *pertencentes a* Ω. *Se* $R_1, R_2, \ldots, R_n$ *são os resíduos de* f *nesses pontos singulares respectivamente, então*

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i(R_1 + \ldots + R_n) = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} R_j,$$

sendo C *um contorno fechado contido em* Ω, *orientado positivamente e contendo todos os* z_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, *em seu interior.*

Demonstração. Consideremos os valores $r_1 = \min|z_j - z_k|$ e $r_2 = \min d(z_j, \mathrm{tr}(C))$ e tomemos o número positivo $\delta = \min\left\{\frac{r_1}{2}, \frac{r_2}{2}\right\}$.

Sejam γ_j as circunferências de centro z_j e raio r, com $0 < r < \delta$, para $1 \leqslant j \leqslant n$, orientadas positivamente. Como consequência do Teorema de Cauchy, temos

$$\int_C f(z)\,dz = \int_{\gamma_1} f(z)\,dz + \ldots + \int_{\gamma_n} f(z)\,dz \tag{12}$$

Denotando $R_1, \ldots, R_n$ o resíduo de f em $z_1, \ldots, z_n$ respectivamente, sabemos que

$$\int_{\gamma_j} \left[f(z) - \frac{R_j}{(z - z_j)}\right] dz = 0$$
$$\Rightarrow \int_{\gamma_j} f(z)\,dz = R_j 2\pi i, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Substituindo cada integral em (12), obtemos

$$\int_C f(z)\,dz = 2\pi i R_1 + \ldots + 2\pi i R_n = 2\pi i[R_1 + \ldots + R_n].$$

□

Façamos algumas aplicações do Teorema dos Resíduos.

Exemplo: Calcule $\displaystyle\int_{|z|=4} \frac{4z-3}{(z-2)^3(z-1)(z-3)}\,dz$.

Usando o Teorema dos Resíduos, sabemos que

$$\int_{|z|=4} \frac{4z-3}{(z-2)^3(z-1)(z-3)}\,dz = 2\pi i(R(2) + R(1) + R(3)).$$

Vamos então determinar cada resíduo. Para isto, classifiquemos as singularidades:
$z_0 = 1$ é um polo simples e vale

$$\lim_{z\to 1}(z-1)f(z) = \lim_{z\to 1}\frac{4z-3}{(z-2)^3(z-3)} = \frac{1}{2} = R(1) \neq 0.$$

$z_1 = 3$ é também polo simples e vale

$$\lim_{z\to 3}(z-3)f(z) = \lim_{z\to 3}\frac{4z-3}{(z-2)^3(z-1)} = \frac{9}{2} = R(3) \neq 0.$$

$z_2 = 2$ é um polo de ordem 3, pois

$$\lim_{z\to 2}(z-2)^3 f(z) = \lim_{z\to 2}\frac{4z-3}{(z-1)(z-3)} = -5 \neq 0.$$

E vale:

$$\begin{aligned} R(2) &= \frac{1}{2!}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}[(z-2)^3 f(z)] = \frac{1}{2}\lim_{z\to 2}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{4z-3}{(z-1)(z-3)}\right] \\ R(2) &= -5 \end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{|z|=4}\frac{4z-3}{(z-2)^3(z-1)(z-3)}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2}+\frac{9}{2}-5\right) = 0.$$

Exercício 152. *Calcule o resíduos de f em cada ponto singular:*

a) $f(z) = \dfrac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

b) $f(z) = \dfrac{e^{zt}}{z^2(z^2+2z+2)}$

c) $f(z) = \dfrac{z^2+4}{z^3+2z^2+2z}$

40 Resíduo Logarítmico

Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfa no domínio simplesmente conexo Ω e seja γ um caminho fechado, orientado positivamente e contido em Ω. Suponha que f não possua zeros em $\mathrm{tr}(\gamma)$. Então, o número complexo

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma}\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

é denominado **resíduo logaritmo da função f relativamente a γ**. Este nome é atribuído pelo fato de que o integrando é a derivada da função $w = \mathrm{Log}(f(z))$.

Para o estudo da integral dada anteriormente, consideremos duas situações:

1. Suponha que f possua no interior de γ um único zero z_0 de ordem m.

Como f é holomorfa em Ω e γ, $\mathrm{tr}(\gamma) \subset \Omega$, tem-se que $f(z) = (z-z_0)^m g(z)$, onde g é uma função holomorfa em Ω e diferente de zero sobre γ e em seu interior.

Derivando f, obtemos

$$f'(z) = m(z - z_0)^{m-1} g(z) + (z - z_0)^m g'(z),$$

o que implica

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = m(z - z_0)^{-1} + h(z), \tag{13}$$

onde $h(z) = \dfrac{g'(z)}{g(z)}$ é uma função holomorfa em $\mathrm{tr}(\gamma)$ e em seu interior. Integrando (13) ao longo de γ, temos

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m \int_\gamma \frac{1}{z - z_0}\, dz + \int_\gamma h(z)\, dz = m2\pi i$$
$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = m$$

o **valor do resíduo logarítmico é a ordem do zero z_0 da função f.**

2. Suponha agora que f possua no interior de γ um único polo de ordem k.
Assim, podemos usar a representação de Laurent em torno deste ponto singular z_0, isto é,

$$\begin{aligned}
f(z) &= \frac{b_k}{(z - z_0)^k} + \ldots + \frac{b_1}{(z - z_0)} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \\
f(z) &= (z - z_0)^{-k} \left[b_k + b_{k-1}(z - z_0) + \ldots + b_1 (z - z_0)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^{n+k} \right] \\
&= (z - z_0)^{-k} g(z),
\end{aligned}$$

onde g é uma função holomorfa em $\mathrm{tr}(\gamma)$ e no seu interior. Logo,

$$f'(z) = -k(z - z_0)^{-k-1} g(z) + (z - z_0)^{-k} g'(z).$$

Integrando $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, tem-se

$$\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = \int_\gamma \frac{-k}{(z - z_0)}\, dz + \int_\gamma \frac{g'(z)}{g(z)}\, dz = -k2\pi i$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)}\, dz = -k.$$

Neste caso, **o resíduo logarítmico dado por menos a ordem do polo**.

De modo geral, se f possuir no interior de γ os zeros $z_1, \ldots, z_n$, cuja soma das ordens é N e os polos $\xi_1, \ldots, \xi_k$, cuja soma das ordens é P, então teremos

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = N - P.$$

Levando em conta os significados de N e P, temos o seguinte resultado.

Teorema 153. *Seja f uma função holomorfa em um domínio simplesmente conexo Ω, exceto em uma quantidade finita de polos. Seja $C \subset \Omega$ um contorno fechado simples, orientado positivamente e cujo interior contenha os polos e/ou uma quantidade finita de zeros de f. Então,*

$$\int\limits_{C} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = 2\pi i(N - P).$$

Observação 154. *Seja $z_0 \in tr(\gamma)$ e lembremos que γ é uma curva fechada e orientada positivamente, assim, podemos pensar esse z_0 como sendo os pontos extremos coincidentes da γ. Ao variar z sobre $tr(\gamma)$ a partir de z_0, a função $w = \log(f(z))$ varia continuamente a partir de $w_0 = \log(f(z_0))$. Mas quando z retorna ao ponto inicial z_0, o ponto $w = \log(f(z))$ não retorna (em geral) em w_0, pois $\log(f(z)) = \ln|f(z)| + iarg(f(z))$ havendo uma variação nos argumentos, $\theta_0 = \arg(f(z_0))$ e $\theta_1 = \arg(f(z))$ quando z retorna a z_0. Neste caso*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}\left[\log\Big(f(z_0^f)\Big) - \log\Big(f(z_0^i)\Big)\right] \\
\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{1}{2\pi i}[\ln|f(z_0)| + i\theta_1 - \ln|f(z_0)| - i\theta_0] \\
\Rightarrow \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz &= \frac{\theta_1 - \theta_0}{2\pi}.
\end{aligned}$$

Vamos denotar por $\triangle\gamma\mathrm{Log}\,(f(z))$ a variação do argumento do $\log(f(z))$ quando z percorre γ uma vez no sentido positivo, iniciando e terminando em z_0. Logo, temos a relação

$$N - P = \frac{1}{2\pi}\triangle\gamma\log(f(z)).$$

Podemos enunciar o Princípio do Argumento:

Proposição 155. *A soma das ordens dos zeros, menos a dos polos de uma função f no interior de γ, é igual a $1/2\pi$ multiplicado pela variação do argumento do $\log(z)$, quando z descreve γ uma vez no sentido postivo.*

Um dos resultados importantes da Análise Complexa, enunciado abaixo, fornece condições para que duas funções tenham o mesmo número de zeros em um específico conjunto.

Teorema 156 (Teorema de Rouché)**.** *Sejam f e g duas funções holomorfas ambas definidas num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$. Seja $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ um caminho fechado em Ω, simples, contínuo e orientado positivamente. Se $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$, $\forall z \in tr(\gamma)$ então f e g possuem igual número de zeros no interior de γ.*

Demonstração. Sejam f e g holomorfas em $\mathrm{tr}(\gamma)$ e no seu interior satisfazendo $|f(z) - g(z)| < |f(z)|$ em $\mathrm{tr}(\gamma)$. Logo, nem f e nem g podem ter zeros em $\mathrm{tr}(\gamma)$, pois se existisse $z_0 \in \mathrm{tr}(\gamma)$ tal que $f(z_0) = 0$ teríamos um absurdo, $|g(z_0)| < 0$.

Portanto, $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathrm{tr}(\gamma)$. Defina então a função $h(z) = \dfrac{g(z)}{f(z)}$ e, por hipótese, temos

$$|f(\gamma(t)) - g(\gamma(t))| < |f(\gamma(t))| \Rightarrow \quad |1 - h(\gamma(t))| < 1, \qquad t \in [a,b].$$

Se z_0 é um ponto no interior de $\mathrm{tr}(\gamma)$ então z_0 é zero de h se, e só, se, z_0 é zero de g. Também, sabemos que w_0 no interior de $\mathrm{tr}(\gamma)$ é um polo de h se, e só se, w_0 é um zero de f. Assim, se mostrarmos que

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = 0$$

teremos que o número de zeros de h no interior de $\mathrm{tr}(\gamma)$ é igual ao seu número de polos neste conjunto, ou seja, f e g terão o mesmo número de zeros.

Para calcular a integral acima, vamos usar a definição de integral sobre curvas, assim

$$\int_\gamma \frac{h'(z)}{h(z)}\, dz = \int_a^b \frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))}\gamma'(t)\, dt.$$

Se denotarmos $\alpha(t) = h(\gamma(t))$, então $\alpha(t) \in D(1,1)$, para todo $t \in [a,b]$ e vale

$$\int_a^b \frac{h'(\gamma(t))}{h(\gamma(t))}\gamma'(t)\, dt = \int_a^b \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)}\, dt = \int_\alpha \frac{1}{z}\, dz = 0.$$

A última igualdade segue do fato da função $F(z) = 1/z$ ser holomorfa na região ao longo de α e no seu interior, pois $\alpha([a,b]) \subset D(1,1)$ e também o fato do caminho ser fechado, o que completa a prova.

□

41 Exercícios

1. Prove o Teorema de Hurwitz: Sejam γ um caminho fechado orientado positivamente em $\mathbb{C}$, (f_n) uma sequência de funções holomorfas no fecho do interior de $\mathrm{tr}(\gamma)$, representado por $\bar{I}(\gamma)$. Suponhamos que (f_n) converge uniformemente para $f \neq 0$ em $I(\gamma)$. Se f não se anula em γ, então existe $n_0 = n_0(\gamma)$ tal que f e f_n possuem o mesmo número de zeros no interior de γ, para todo $n > n_0$.

2. Usando o Teorema de Rouché, prove que: Todo polinômio de grau $n \geqslant 1$, com coeficientes complexos, possui exatamente n zeros em $\mathbb{C}$.

3. Calcule as integrais:

a) $\displaystyle\int_C \tan z \, dz$, onde o caminho C é a circunferência $|z| = 2$.

b) $\displaystyle\int_C \frac{e^z}{z^4 + 5z^3} \, dz$, onde o caminho C é a circunferência $|z| = 2$.

c) $\displaystyle\int_{|z|=2} \frac{\operatorname{senh} z}{z^6} \, dz$

d) $\displaystyle\int_{|z|=1} e^{1/z} \, dz$.

e) $\displaystyle\int_{|z-2i|=4} \frac{z+1}{z^2(z-2i)} \, dz$.

f) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{\tan z}{z} \, dz$.

g) $\displaystyle\int_{|z-1|=2} \frac{e^{z-11}}{(z-1)^3} \, dz$.

4. Faça um estudo sobre aplicações do Teorema de Resíduos para o cálculo de integrais reais impróprias, analisando pelo menos dois casos e fazendo exemplos.

Referências

[1] ABREU, A. H. S. - *Funções de Variável Complexa, Teoria e Aplicações*, Editora STC, Lisboa-Portugal, 2009.

[2] BOYER, C. B.; MERZBACH, U C. - *História da matemática.* 3a. ed., São Paulo: Blucher, 2012.

[3] CHURCHILL, R.V. - *Variáveis complexas e suas aplicações*, Editora McGraw-Hill do Brasil, 1978.

[4] LINS NETO, A. - *Funções de uma variável complexa*, Projeto Euclides, 2a. edição, IMPA, 1996.

[5] MEDEIROS, L.A. - *Introdução às funções complexas*, McGraw-Hill do Brasil Ltda, 1972.

[6] PIANOSCHI, T. A. - *Visualização das funções complexas e do teorema fundamental da álgebra.* Dissertação de Mestrado em Matemática â Universidade Estadual Paulista, Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Rio Claro - SP, 2013.

[7] SOARES, M.G. - *Cálculo em uma variável complexa.* Coleção Matemática Universitária, 4a edição, IMPA, 2006.

[8] ZILL, D.G., SHANAHAN, P.D. - *Um curso introdutório à Análise Complexa com Aplicações*, 2a. edição, LTC, 2011.