MAT 2453 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2025
Agenda 06

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos extensões do conceito de limite, a saber, os limites "infinitos" e os limites conforme a variável "tende" a mais ou menos infinito. Apresentamos, também, um estudo do comportamento de várias funções em mais ou menos infinito, bem como em pontos "singulares". Fazemos um estudo particular das funções racionais e de seus limites, e encerramos dando exemplo do cálculo de vários limites.

1 Mudança de Variável em Limites

Os teoremas apresentados nesta seção justificam uma técnica muito utilizada na resolução de limites: a técnica da mudança de variáveis.

Ilustramos esta técnica utilizando o exemplo visto na aula anterior.

Exemplo 1 *Calcular:*

$$\lim_{x \to 1} \sqrt{\frac{x^2 - 1}{x - 1}}$$

Solução:

Passo 1: *Procuramos ver a expressão do limite como uma composição, para verificar a continuidade da função. Sejam:*

*jeancb@ime.usp.br

$$\begin{array}{rcl} u :]-1,\infty[\setminus\{1\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{x^2-1}{x-1} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ u & \mapsto & \sqrt{u} \end{array}$$

de modo que:

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} = g(u) = \sqrt{u},$$

e por ser composta de funções contínuas, é uma função contínua em todo seu domínio (que exclui 1*);*

Passo 2: *Calculamos:*

$$\lim_{x\to 1} u(x) = \lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2,$$

Passo 3: *Como g é contínua em $u_0 = 2$, segue que:*

$$\lim_{u\to 2} \sqrt{u} = \sqrt{2}.$$

Vamos justificar o **Passo 3** da resolução acima usando o seguinte:

> **Teorema 2** *Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Se g é contínua em $f(x_0) = y_0 \in B$, então:*
>
> $$\lim_{x\to x_0} f(x) = y_0 \Rightarrow \lim_{x\to x_0} g(f(x)) = \lim_{u\to y_0} g(u)$$

Uma vez que g é contínua em $f(x_0) = y_0$, tem-se:

$$\lim_{u\to y_0} g(u) = g(y_0). \tag{1}$$

Resta-nos demonstrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Seja, portanto, $\varepsilon > 0$ dado.

Como g é contínua em y_0, para este $\varepsilon > 0$ existe um $\eta > 0$ tal que:

$$(y \in B)\&(|y - y_0| < \eta) \Rightarrow |g(y) - g(y_0)| < \varepsilon \tag{2}$$

Agora usamos a nossa hipótese de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$: para $\eta > 0$ obtido acima, existirá um $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \eta \tag{3}$$

Assim, sempre que $x \in A$ for tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, valerá, por (3):

$$|f(x) - y_0| < \eta$$

e por (2) teremos, consequentemente:

$$|g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon$$

Como dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - g(y_0)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = g(y_0) \overset{(1)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y)$$

Assim, o **Passo 3** se justifica como segue:

- Neste nosso caso, $u(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ faz o papel de $f(x)$, e:

$$\lim_{x \to 1} u(x) = 1.$$

- Uma vez que g é contínua em $u_0 = 2$, tem-se:

$$\lim_{u \to u_0} g(u) = g(u_0) = g(2) = \sqrt{2}$$

Um resultado mais geral, que nos permite aplicar a técnica da mudança de variáveis mesmo em casos em que a função g não é contínua em y_0, mas apenas tem limite em y_0 é enunciado e demonstrado a seguir:

Teorema 3 ("mudança de variável") *Sejam* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ *e* $g : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0 \ \ e \ \ \lim_{u \to y_0} g(u) = L.$$

Nestas condições, se existir $r > 0$ *tal que* $0 < |x - x_0| < r$ *implica* $f(x) \neq y_0$*, então:*

$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = \lim_{u \to y_0} g(u)$$

Por hipótese:

$$\lim_{u \to y_0} g(u) = L. \tag{4}$$

Precisamos demonstrar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \varepsilon$$

Seja, portanto, $\varepsilon > 0$ dado.

Como $\lim_{u \to y_0} g(u) = L$, para este $\varepsilon > 0$ existe um $\eta > 0$ tal que:

$$(y \in B)\&(0 < |y - y_0| < \eta) \Rightarrow |g(y) - L| < \varepsilon \tag{5}$$

Agora usamos a nossa hipótese de que $\lim_{x \to x_0} f(x) = y_0$: para $\eta > 0$ obtido acima, existirá um $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - y_0| < \eta \tag{6}$$

Assim, sempre que $x \in A$ for tal que $0 < |x - x_0| < \delta$, valerá, por (6):

$$|f(x) - y_0| < \eta$$

e por (5) teremos, consequentemente:

$$|g(f(x)) - L| < \varepsilon$$

Como dado qualquer $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \varepsilon,$$

segue que:

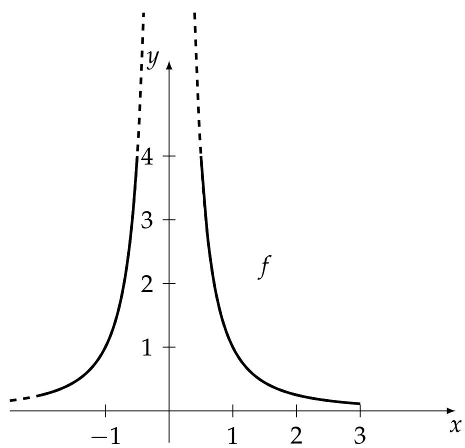
$$\lim_{x \to x_0} g(f(x)) = L \stackrel{(4)}{=} \lim_{y \to y_0} g(y)$$

2 Extensões do Conceito de Limite: Limites "Infinitos"

Motivação: Analisemos o comportamento da função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2} \end{array}$$

Gostaríamos de dizer que, quanto "mais próximo de 0" tomamos x, maior é $\dfrac{1}{x^2}$. Entretanto, a formulação de limite se dá no sentido inverso: para obter valores de $\frac{1}{x^2}$ tão grandes quanto se queira, basta tomarmos x suficientemente próximo de 0. Neste caso, gostaríamos de dizer, talvez, que "o limite de $f(x)$ conforme x tende a 0 é infinito". Na sequência daremos um significado preciso para isto.



Definição 4 (limite infinito) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Dizemos que **o limite de** $f(x)$ **conforme** x **tende a** x_0 **é "infinito"**, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores de $f(x)$ arbitrariamente grandes bastar tomarmos valores de x suficientemente próximos de x_0. Simbolicamente,

$$\boxed{\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) > M)}$$

Assim, temos o seguinte:

Exemplo 5

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = \infty$$

De fato, seja $M > 0$ dado, tão grande quanto sua imaginação for capaz de pensar. Vamos encontrar um $\delta > 0$ tal que, se $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e $0 < |x - x_0| < \delta$, tem-se:

$$\frac{1}{x^2} > M.$$

Uma condição suficiente para que $\frac{1}{x^2} > M$ é que:

$$\frac{1}{M} > x^2 \iff$$

$$\iff |x| < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Assim, basta que tomemos $\delta = \dfrac{1}{\sqrt{M}}$, e teremos:

$$(x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \& \left(|x - 0| < \frac{1}{\sqrt{M}} \right) \Rightarrow \left(M < \frac{1}{x^2} \right)$$

Assim, por exemplo, se quisermos valores de x tais que $\frac{1}{x^2} > 10000$, basta tomarmos valores de x tais que $|x| < \frac{1}{\sqrt{10000}} = 0.01$.

O seguinte resultado é bastante útil na demonstração de certas propriedades operatórias dos limites:

Proposição 6 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty.$$

Então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Primeiramente, note que existe $\eta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow 0 < f(x)$$

De fato, dado $M > 0$, qualquer, existe $\eta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow 0 < M < f(x).$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$, para $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ existirá $\zeta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \zeta \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < f(x)$$

Assim, se tomarmos $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$, teremos $0 < f(x)$ e:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$$

Definição 7 (limites laterais "infinitos") *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação de A e $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

• *Dizemos que **"o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela direita é infinito"**, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \infty$$

se, e somente se, para qualquer $M > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x \in A \cap]x_0, x_0 + \delta[$ então $f(x) > M$. Ou seja,

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A)\&(x \in [x_0, x_0 + \delta[) \Rightarrow f(x) > M)$$

• *Dizemos que **"o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela esquerda é infinito"**, e escrevemos:*

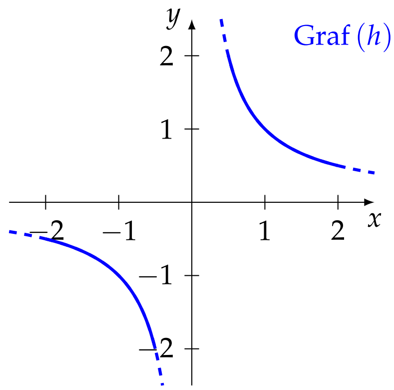
$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \infty$$

se, e somente se, para qualquer $M > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A$ então $f(x) > M$. Ou seja,

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A)\&(x \in]x_0 - \delta, x_0]) \Rightarrow f(x) > M)$$

Exemplo 8

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x} = \infty$$



Seja $M > 0$ dado. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que, se $0 < x < \delta$ então:

$$\frac{1}{x} > M.$$

Buscamos, portanto, uma condição suficiente para que isto ocorra em termos de x. Temos:

$$x > 0 \text{ e } \frac{1}{x} > M \iff \frac{1}{M} > x > 0$$

logo, basta tomarmos $\delta = \dfrac{1}{M}$, e teremos:

$$0 < x < \frac{1}{M} = \delta \Rightarrow M < \frac{1}{x}$$

Exemplo 9

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \tan(x) = \infty$$

Isto significa que, a fim de obter valores de $\tan(x)$ arbitrariamente grandes, basta que tomemos valores de x suficientemente próximos e à esquerda de $\dfrac{\pi}{2}$.

Para verificar isto, seja $M > 0$ um número tão grande quanto se queira. Vamos exibir um $\delta > 0$ tal que:

$$\frac{\pi}{2} - \delta < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow M < \tan(x)$$

Analisando o gráfico da função tangente (veja as NOTAS DA AULA 1*), constatamos que se trata de uma função estritamente crescente e que, quando restrita ao intervalo aberto:*

$$\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

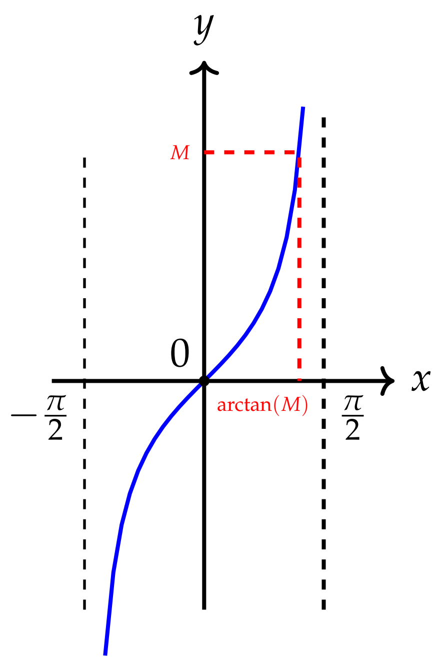
é bijetora, tendo por inversa a função arco-tangente.

Assim, dado $M > 0$, $x = \arctan(M)$ é tal que $\tan(x) = M$. Assim, se tomarmos $\delta = \dfrac{\pi}{2} - \arctan(M)$, teremos:

$$\frac{\pi}{2} - \delta = \arctan(M) < x < \frac{\pi}{2} \underbrace{\Rightarrow}_{\tan \text{ é crescente}} M < \tan(x)$$

Logo,

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}_-} \tan(x) = \infty$$



O teorema a seguir é extremamente útil para calcular limites no infinito e demonstrar diversas de suas propriedades, reduzindo-os a limites <u>finitos</u>:

Teorema 10 *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$, A um conjunto ilimitado à direita, $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ e $g : B \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in B'$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = x_0$$

Então:

(a) *Se g é contínua em x_0, então:*

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to x_0} g(u).$$

(b) *Se g não estiver definida em x_0 e $\lim_{u\to x_0} g(u)$ existir, então:*

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = \lim_{u\to x_0} g(u).$$

Ad (a): De fato, se g é contínua em x_0, tem-se:

$$\lim_{u\to x_0} g(u) = g(x_0),$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$|u - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |g(u) - g(x_0)| < \varepsilon.$$

Para este $\delta(\varepsilon) > 0$, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = x_0$, existe um $M(\delta(\varepsilon)) > 0$ tal que:

$$x > M(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos exibir $M(\delta(\varepsilon)) > 0$ tal que:

$$x > M(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |g(f(x)) - g(x_0)| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{x\to\infty} g(f(x)) = g(x_0)$$

Ad (b): De fato, seja L tal que:

$$\lim_{u\to x_0} g(u) = L,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que:

$$0 < |u - x_0| < \delta(\varepsilon) \Rightarrow |g(u) - L| < \varepsilon.$$

Para este $\delta(\varepsilon) > 0$, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = x_0$, existe um $M(\delta(\varepsilon)) > 0$ tal que:

$$x > M(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |f(x) - x_0| < \delta(\varepsilon)$$

Logo, dado $\varepsilon > 0$, podemos exibir $M(\delta(\varepsilon)) > 0$ tal que:

$$x > M(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow |g(f(x)) - L| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} g(f(x)) = L = \lim_{u \to x_0} g(u).$$

Analogamente, temos a seguinte:

Definição 11 (limite menos infinito) *Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$. Dizemos que* ***o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 é "menos infinito"****, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores de $f(x)$ negativos e arbitrariamente grandes bastar tomarmos valores de x suficientemente próximos de x_0. Simbolicamente,

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow f(x) < -M)$$

Definição 12 (limites laterais "menos infinito") *Sejam $A \subset \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação de A e $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função.*

• *Dizemos que **"o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela direita é menos infinito"**, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = -\infty$$

se, e somente se, para qualquer $M > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x \in A \cap]x_0, x_0 + \delta[$ então $f(x) < -M$. Ou seja,

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A) \& (x \in [x_0, x_0 + \delta[) \Rightarrow f(x) < -M)$$

• *Dizemos que **"o limite de $f(x)$ conforme x tende a x_0 pela esquerda é menos infinito"**, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = -\infty$$

se, e somente se, para qualquer $M > 0$ for possível encontrar $\delta > 0$ tal que, se $x \in]x_0 - \delta, x_0[\cap A$ então $f(x) < -M$. Ou seja,

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists \delta > 0)((x \in A) \& (x \in]x_0 - \delta, x_0]) \Rightarrow f(x) < -M)$$

Exemplo 13

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Dado qualquer $M > 0$, tem-se:

$$\frac{1}{x} < -M \iff -\frac{1}{M} < x.$$

Logo, basta tomarmos $\delta = \dfrac{1}{M}$, e teremos:

$$0 - \frac{1}{M} < x < 0 \Rightarrow \frac{1}{x} < -M$$

Assim,

$$\lim_{x \to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Exemplo 14 *Dado qualquer $b > 1$, tem-se que:*

$$\lim_{x \to 0_+} \log_b(x) = -\infty$$

De fato, dado $M > 0$, vamos exibir $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in \mathbb{R}_+^*)\&(0 < x < \delta) \Rightarrow (\log_b(x) < -M).$$

Uma condição suficiente para que:

$$\log_b(x) < -M$$

é que:

$$x < b^{-M}$$

bastando, portanto, tomarmos $\delta = \dfrac{1}{b^M}$. Assim,

$$(x \in \mathbb{R}_+^*)\&\left(0 < x < \frac{1}{b^M}\right) \Rightarrow (\log_b(x) < -M)$$

Proposição 15 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in A'$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{f(x)} = 0.$$

Primeiramente, note que existe $\eta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < 0$$

De fato, dado $M > 0$, qualquer, existe $\eta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < -M < 0.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$, para $M = \dfrac{1}{\varepsilon} > 0$ existirá $\zeta > 0$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \zeta \Rightarrow f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$$

Assim, se tomarmos $\delta = \min\{\eta, \zeta\}$, teremos $f(x) < 0$ e:

$$\frac{1}{\varepsilon} < -f(x) = |f(x)|$$

$$\frac{1}{|f(x)|} = \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$$

Logo,

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow \frac{1}{f(x)} = \left|\frac{1}{f(x)} - 0\right| < \varepsilon$$

Exercício: sabemos, pelo exemplo acima, que $\lim_{x\to 0} \log(x) = -\infty$. Dado $M = 10^6$, exiba $\delta > 0$ tal que $0 < x < \delta \Rightarrow \log(x) < -10^6$.

3 Extensões do Conceito de Limite: Limites no Infinito

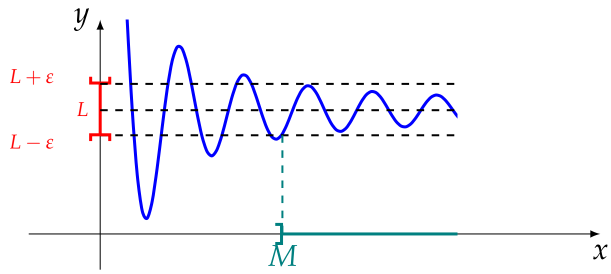
A definição de limite de uma função conforme sua variável "tende ao infinito" é inteiramente análoga à definição de limite de sequência: diz-se que o limite de $f(x)$ conforme x tende ao infinito é L se, e somente se, a fim de obter valores de $f(x)$ arbitrariamente próximos de L bastar tomarmos valores de x suficientemente grandes. Mais precisamente, temos a seguinte:

Definição 16 (limite no infinito) *Sejam A um conjunto ilimitado superiormente, $f : A \subset \mathbb{R}$ uma função e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que* ***o limite de** $f(x)$ **conforme** x **tende ao infinito é** L, e escrevemos:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir $M > 0$ tal que, se $x \in A$ é tal que $x > M$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Em símbolos:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \iff (\forall\varepsilon > 0)(\exists M > 0)((x \in A)\&(M < x) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$



De modo análogo, temos a seguinte:

Definição 17 (limite em menos infinito) *Sejam A um conjunto ilimitado inferiormente, $f : A \subset \mathbb{R}$ uma função e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que* ***o limite de $f(x)$ conforme x tende ao infinito é*** *L, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$$

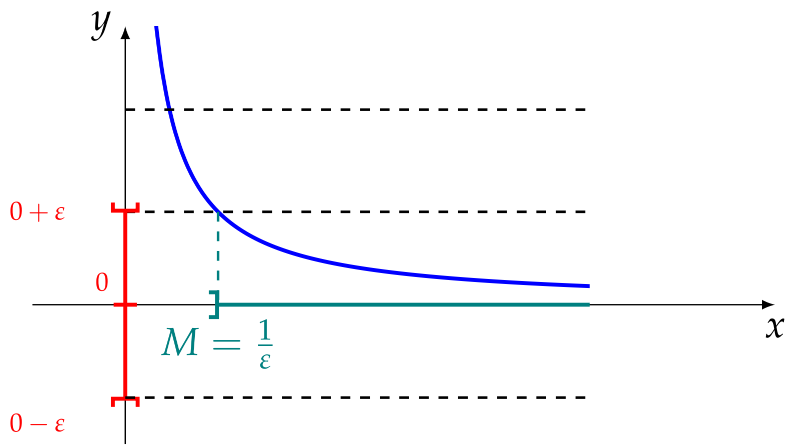
se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir $M > 0$ tal que, se $x \in A$ é tal que $x < -M$ então $|f(x) - L| < \varepsilon$. Em símbolos:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists M > 0)((x \in A) \& (x < -M) \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon)$$

O comportamento das funções conforme sua variável tende a mais ou menos infinito é também chamado de "comportamento assintótico".

Exemplo 18 *Temos:*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$



De fato, dado $\varepsilon > 0$, *basta tomarmos* $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ *e teremos:*

$$M = \frac{1}{\varepsilon} < x \Rightarrow \frac{1}{x} = \left|\frac{1}{x} - 0\right| < \varepsilon$$

Exemplo 19 *Temos:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$, *basta tomarmos* $M = \dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$ *e teremos:*

$$M = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < x \Rightarrow \frac{1}{x^2} = \left|\frac{1}{x^2} - 0\right| < \varepsilon$$

Exemplo 20

$$\lim_{x\to-\infty} e^x = 0$$

De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, *a fim de que:*

$$|e^x - 0| < \varepsilon$$

basta que:

$$x < \ln(\varepsilon)$$

Logo, para qualquer $M > 0$ *existe* $K = -\ln(\varepsilon) > 0$ *tal que:*

$$x < \ln(\varepsilon) \Rightarrow |e^x - 0| < \varepsilon.$$

Exemplo 21 *Temos:*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{x} = 1.$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$*, basta tomarmos* $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$ *e teremos:*

$$M = \frac{1}{\varepsilon} < x \Rightarrow \frac{1}{x} = \left| \frac{x+1}{x} - 1 \right| < \varepsilon$$

Exemplo 22

$$\lim_{x\to-\infty} \operatorname{arctan}(x) = -\frac{\pi}{2}$$

De fato, dado $\varepsilon > 0$*, basta tomarmos* $M = -\tan(-\dfrac{\pi}{2} + \varepsilon)$*, e teremos*

$$x < -\tan(-\frac{\pi}{2} + \varepsilon) \Rightarrow \tan(x) < -\frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

ou seja,

$$\left| \operatorname{arctan}(x) - \left(\frac{\pi}{2}\right) \right| < \varepsilon$$

Exemplo 23 *Calcular:*

$$\lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}}$$

Usaremos o ***Teorema 10****. Fazemos* $u(x) = \dfrac{1}{x}$*, de modo que:*

$$\lim_{x\to 0_-} u(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Portanto,

$$\lim_{x\to 0_-} e^{\frac{1}{x}} = \lim_{u\to-\infty} e^{u} = 0.$$

Teorema 24 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $L \in \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = M$$

Então:

(a) $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = L + M$

(b) $\lim_{x\to\infty}(f-g)(x) = L + M$

(c) $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = L \cdot M$

(d) Se $\lim_{x\to\infty} g(x) \neq 0$, *então* $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{L}{M}$

Para demonstrar este teorema, vamos usar o **Teorema 10**.

Ad (a): Fazemos $u = \frac{1}{x}$, de modo que $\lim_{x\to\infty} u = 0$ e:

$$L = \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{u\to 0} f(u)$$

$$M = \lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{u\to 0} g(u)$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \lim_{u\to 0}(f+g)(u) = \lim_{u\to 0} f(u) + \lim_{u\to 0} g(u) = L + M$$

$$\lim_{x\to\infty}(f-g)(x) = \lim_{u\to 0}(f-g)(u) = \lim_{u\to 0} f(u) - \lim_{u\to 0} g(u) = L - M$$

$$\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \lim_{u\to 0}(f\cdot g)(u) = \lim_{u\to 0} f(u) \cdot \lim_{u\to 0} g(u) = L + M$$

Se $M \neq 0$:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \lim_{u\to 0}\left(\frac{f}{g}\right)(u) = \frac{\lim_{u\to 0} f(u)}{\lim_{u\to 0} g(u)} = \frac{L}{M}$$

Observação 25 *O teorema acima também é válido se substituirmos $x \to \infty$ por $x \to -\infty$.*

4 Extensões do Conceito de Limite: Limites Infinitos no "Infinito"

Definição 26 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado à direita e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de $f(x)$ conforme x tende ao infinito é mais infinito**, e escrevemos:*

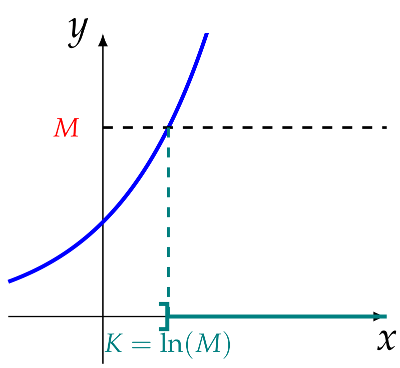
$$\lim_{x \to \infty} g(x) = \infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores arbitrariamente grandes e positivos de $f(x)$ for suficiente tomarmos valores suficientemente grandes de x. Assim,

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists K > 0)((x > K) \Rightarrow (f(x) > M)).$$

Exemplo 27

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$$



De fato, dado qualquer $M > 0$, a fim de que:

$$M < e^x$$

basta que:

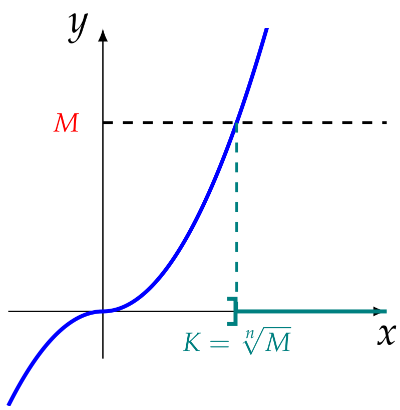
$$\ln(M) < x$$

Logo, para qualquer $M > 0$ existe $K = \ln(M) > 0$ tal que:

$$x > \ln(M) \Rightarrow e^x > M.$$

Exemplo 28 *Para $n \in \mathbb{N}$, tem-se:*

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty.$$



De fato, dado $M > 0$, a fim de que:

$$M < x^n$$

basta tomarmos $x > \sqrt[n]{M} > 0$, e teremos:

$$x > \sqrt[n]{M} \Rightarrow x^n > M$$

Definição 29 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado à direita e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que **o limite de $f(x)$ conforme x tende ao infinito é menos infinito**, e escrevemos:*

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores arbitrariamente grandes e negativos de $f(x)$ for suficiente tomarmos valores suficientemente grandes de x. Assim,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists K > 0)((x > K) \Rightarrow (f(x) < -M)).$$

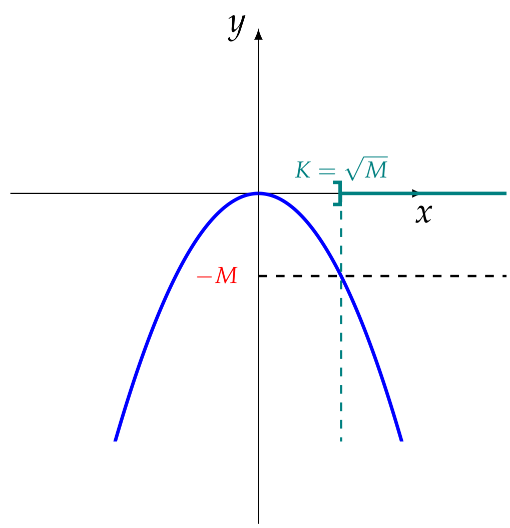
Exemplo 30

$$\lim_{x\to\infty} -x^2 = -\infty,$$

uma vez que dado qualquer $M > 0$, a fim de que:

$$-x^2 < -M, \text{ ou seja, de que } M < x^2,$$

basta tomarmos $x > \sqrt{M}$.



Definição 31 *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ ilimitado à esquerda e $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dizemos que* ***o limite de $f(x)$ conforme x tende a menos infinito é infinito****, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores arbitrariamente grandes e positivos de $f(x)$ for suficiente tomarmos valores suficientemente grandes e negativos de x. Assim,

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty \iff (\forall M > 0)(\exists K > 0)((x < -K) \Rightarrow (M < f(x))).$$

Observação 32 *Se $n \in \mathbb{N}$ é um número par, então a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array}$$

é <u>decrescente</u> em $]-\infty, 0]$ e <u>crescente</u> em $[0, \infty[$. Com efeito, sendo n par, x^n é uma função par, pois dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = x^n = f(x)$$

Desta forma, se verificarmos que $f \restriction_{[0,\infty[}: [0, \infty[\to \mathbb{R}$ é crescente, seguir-se-á que $f \restriction_{]-\infty,0]}:]-\infty, 0] \to \mathbb{R}$ é decrescente.

Sejam $x, y > 0$ tais que $x > y$, de modo que existe $h > 0$ tal que $x = y + h$. Então, pelo ***Teorema Binomial*** *segue que:*

$$f(x) = f(y+h) = (y+h)^n = y^n + \underbrace{\left[C_{n,1} y^{n-1} \cdot h + C_{n,2} y^{n-2} \cdot h^2 + \cdots + C_{n,n-1} y \cdot h^{n-1} + h^n\right]}_{>0}$$

e portanto $x > y \Rightarrow x^n = (y+h)^n > y^n$.

Exemplo 33 *Se* $n \in \mathbb{N}$ *é um número par, então:*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty.$$

De fato, dado $M > 0$*, a fim de que:*

$$x^n > M$$

basta tomarmos $x < -\sqrt[n]{M}$*, e teremos:*

$$f(-\sqrt[n]{M}) < f(-x) \iff M < x^n$$

Logo,

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$$

Definição 34 *Sejam* $A \subseteq \mathbb{R}$ *ilimitado à esquerda e* $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$*. Dizemos que* ***o limite de*** $f(x)$ ***conforme*** x ***tende a menos infinito é menos infinito****, e escrevemos:*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

se, e somente se, a fim de obter valores arbitrariamente grandes e negativos de $f(x)$ *for suficiente tomarmos valores suficientemente grandes e negativos de* x*. Assim,*

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty \iff (\forall M > 0)(\exists K > 0)((x < -K) \Rightarrow (f(x) < -M)).$$

Exemplo 35 *Se* $n \in \mathbb{N}$ *é um número ímpar, então:*

$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

De fato, para n *ímpar, a função* $f(x) = x^n$ *é ímpar, pois:*

$$f(-x) = (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n = -x^n = -f(x)$$

Note que, em $[0, \infty[$ *a função é crescente, uma vez que dados quaisquer* $x, y > 0$, $x > y$*, existe* $h > 0$ *tal que* $x = y + h$ *e, pelo* ***Teorema Binomial*** *segue que:*

$$f(x) = f(y+h) = (y+h)^n = y^n + [\text{termos positivos}]$$

Disto decorre que $f \restriction_{]-\infty,0]}$ *é* *crescente*. *De fato, se* $x < y < 0$ *então* $0 < -y < -x$ *e, portanto,*

$$0 < f(-y) < f(-x) \iff 0 < -f(y) < -f(x) \iff f(x) < f(y) < 0.$$

Assim, dado $M > 0$, tomando $K = \sqrt[n]{M}$, teremos:

$$x < -\sqrt[n]{M} \Rightarrow f(x) = x^n < -M$$

Logo,

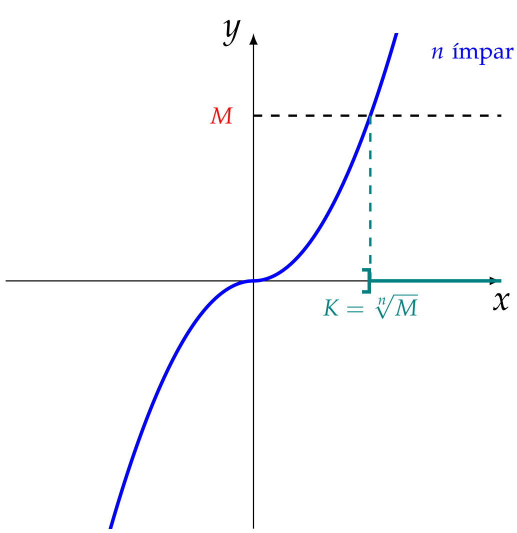
$$\lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty.$$

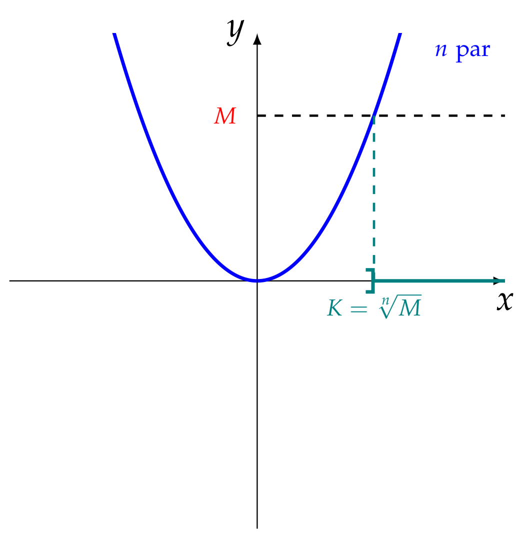
Resumindo: tem-se, para $n \in \mathbb{N}$ ímpar:

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = -\infty$$

Resumindo: tem-se, para $n \in \mathbb{N}$ par:

$$\lim_{x \to \infty} x^n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \to -\infty} x^n = \infty$$





5 Propriedades "Operatórias" dos Limites Infinitos

Os teoremas desta seção são de fácil demonstração, e ficam a cargo do aluno.

Teorema 36 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty \ \ e \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Então:

(1) $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \infty$

Ad (1): Seja $M > 0$ dado. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, dado $\frac{M}{2} > 0$ existem $K_1, K_2 > 0$ tais que:

$$x > K_1 \Rightarrow f(x) > \frac{M}{2}$$

$$x > K_2 \Rightarrow g(x) > \frac{M}{2}$$

Assim, basta tomarmos $K = K_1 + K_2$ e teremos:

$$x > K_1 + K_2 \Rightarrow M = \frac{M}{2} + \frac{M}{2} < f(x) + g(x) = (f+g)(x),$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \infty$$

Ad (2): Seja $M > 0$ dado. Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ e $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, dado $\sqrt{M} > 0$ existem $K_1, K_2 > 0$ tais que:

$$x > K_1 \Rightarrow f(x) > \sqrt{M}$$

$$x > K_2 \Rightarrow g(x) > \sqrt{M}$$

Assim, basta tomarmos $K = K_1 + K_2$ e teremos:

$$x > K_1 + K_2 \Rightarrow M = \sqrt{M}\cdot\sqrt{M} < f(x)\cdot g(x) = (f\cdot g)(x),$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \infty$$

Teorema 37 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \;\; e \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Então:

(1) $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \infty$, *se* $L > 0$

(3) $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = -\infty$, *se* $L < 0$

Ad (1):
Caso 1: $L > 0$.

Dado $M > 0$, como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, existe $K_1 > 0$ tal que:

$$x > K_1 \Rightarrow g(x) > M$$

Também, como $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, dado $\varepsilon = L > 0$ existe K_2 tal que:

$$x > K_2 \Rightarrow |f(x) - L| < L \iff 0 < f(x) < 2L \Rightarrow 0 < f(x)$$

Assim, dado $M > 0$, basta tomarmos $K = K_1 + K_2 > 0$ e teremos:

$$x > K = K_1 + K_2 \Rightarrow M = 0 + M < f(x) + g(x) = (f+g)(x)$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = \infty.$$

Caso 2: $L < 0$.

Seja $M > 0$ dado.

Sem perda de generalidade, suponha que $M > |2L| = -2L$.

Como $\lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$, dado $M + 2L > 0$ existe $K_1 > 0$ tal que:

$$x > K_1 \Rightarrow M + 2L < g(x).$$

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, dado $\varepsilon = |L| > 0$, existe K_2 tal que:

$$x > K_2 \Rightarrow |f(x) - L| < |L| \iff -|L| < f(x) - L < |L| \Rightarrow L - |L| = 2L < f(x)$$

Assim, se $x > K_1 + K_2$ então:

$$M + 2L < g(x).$$

Assim, dado $M > 0$, consideramos basta tomarmos $K = K_1 + K_2$, se

$$x > K = K_1 + K_2 \Rightarrow M = 2L + (M - 2L) < f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty} (f + g)(x) = \infty.$$

Ad (2): Dado $\dfrac{2M}{L} > 0$ existe $K_1 > 0$ tal que:

$$x > K_1 \Rightarrow g(x) > \frac{2M}{L}$$

Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, dado $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$ existe $K_2 > 0$ tal que:

$$x > K_2 \Rightarrow |f(x) - L| < \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{L}{2} < f(x).$$

Assim, se tomarmos $K = K_1 + K_2$, se $x > K = K_1 + K_2$ então:

$$M = \frac{L}{2} \cdot \frac{2M}{L} < f(x) \cdot g(x)$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty} f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

Ad (3): Como $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$, tem-se $\lim_{x\to\infty} -f(x) = -L > 0$, de modo que pelo item (2), tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} -f(x) \cdot g(x) = \infty.$$

Desta forma, dado $M > 0$, existe $K > 0$ tal que:

$$x > K \Rightarrow M < -f(x) \cdot g(x)$$

ou seja,

$$x > K \Rightarrow f(x) \cdot g(x) < -M,$$

de modo que:

$$\lim_{x\to\infty} f(x)\cdot g(x) = -\infty.$$

Teorema 38 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \;\; e \;\; \lim_{x\to\infty} g(x) = \infty$$

Então:

$$\lim_{x\to\infty} (f\cdot g)(x) = -\infty$$

Seja $M > 0$ dado. Então, para $\sqrt{M} > 0$ existem $K_1, K_2 > 0$ tais que:

$$x > K_1 \Rightarrow f(x) < -\sqrt{M}$$

$$x > K_2 \Rightarrow \sqrt{M} < g(x)$$

Ao tomarmos $K = K_1 + K_2$, segue que:

$$x > K = K_1 + K_2 \Rightarrow (f(x) < -\sqrt{M})\&(\sqrt{M} < g(x)) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\sqrt{M} < -f(x))\&(\sqrt{M} < g(x)) \Rightarrow M < -f(x)\cdot g(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x)\cdot g(x) < -M.$$

Logo,

$$\lim_{x\to\infty} (f\cdot g)(x) = -\infty.$$

Teorema 39 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \;\; e \;\; \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

Então:

$$\lim_{x\to\infty} (f+g)(x) = -\infty$$

Análoga à do item (1) do **Teorema 37**.

Teorema 40 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty \ \ e \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

Então:

(1) $\lim_{x\to\infty}(f+g)(x) = -\infty$

(2) $\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \infty$

Análoga à do **Teorema 36**.

Teorema 41 *Sejam A um conjunto ilimitado à direita, $f, g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \ \ e \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = -\infty$$

Então:

$$\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = -\infty \ se \ L > 0$$

$$\lim_{x\to\infty}(f\cdot g)(x) = \infty \ se \ L < 0$$

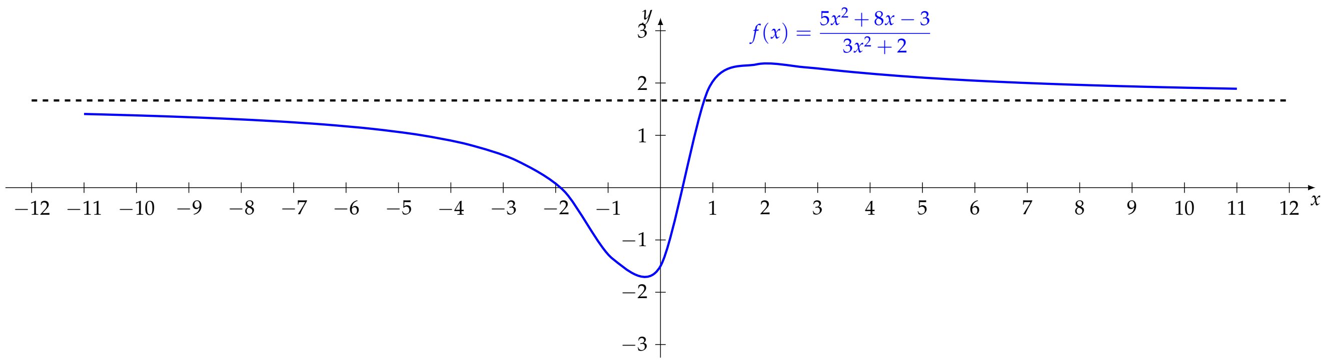
Análoga à do **Teorema 39**.

6 Limites no Infinito de Funções Racionais

Para determinar o limite de uma função racional quando x tende a mais ou menos infinito, podemos dividir o numerador e o denominador pela maior potência de x que aparece no denominador. O que acontece depois depende dos graus dos polinômios envolvidos.

Exemplo 42 (Numerador e Denominador de Mesmo Grau)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} = \frac{5}{3}$$



Exemplo 43 (Grau do Numerador Menor que o Grau do Denominador)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{11x+2}{2x^3-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} = \frac{0+0}{2-0} = 0.$$

Exemplo 44 (Grau do Numerador Maior que o Grau do Denominador)

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2-3}{7x+4} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}}$$

O numerador da expressão acima tende a $-\infty$*, enquanto o denominador tende a* 7*. Assim,*

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x-\frac{3}{x}}{7+\frac{4}{x}} = -\infty.$$

Exemplo 45 (Grau do Numerador Maior que o Grau do Denominador)

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \lim_{x\to\infty} \frac{-4x+\frac{7}{x}}{2-\frac{3}{x}-\frac{10}{x^2}}$$

O numerador da expressão acima tende a ∞*, enquanto o denominador tende a* 2*. Assim,*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-4x^3+7x}{2x^2-3x-10} = \infty$$

7 Cálculo de Alguns Limites

Exemplo 46 *Calcular:*

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x-1}$$

*Aqui fazemos $u = x - 1$, de modo que $\lim_{x\to 1_+} u = 0$. Como para todo $x > 1$ tem-se $u = x - 1 > 0$, tem-se que u se aproxima de 0 por valores maiores do que 0, ou seja, pela direita. Como consequência do **Teorema 10**, tem-se:*

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{1}{x-1} = \lim_{u\to 0_+} \frac{1}{u} = \infty.$$

Exemplo 47 *Calcular:*

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{x-1}$$

*Aqui fazemos $u = x - 1$, de modo que $\lim_{x\to 1_-} u = 0$. Como para todo $x < 1$ tem-se $u = x - 1 < 0$, tem-se que u se aproxima de 0 por valores menores do que 0, ou seja, pela esquerda. Como consequência do **Teorema 10**, tem-se:*

$$\lim_{x\to 1_-} \frac{1}{x-1} = \lim_{u\to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty.$$

Exemplo 48 *Calcular:*

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2+3x}{x^2-4}$$

Vemos que $\lim_{x\to 2_+} x^2 + 3x = 10$ e $\lim_{x\to 2_+} x^2 - 4 = 0$.

Neste caso, separamos o fator de $x^2 - 4$ responsável pelo anulamento, isto é, $x - 2$. Assim, temos, para qualquer $x \neq 2$:

$$\frac{x^2+3x}{x^2-4} = \frac{x^2+3x}{(x-2)\cdot(x+2)}$$

*Assim, pel**O Teorema** tem-se:*

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2+3x}{x^2-4} = \lim_{x\to 2_+} \frac{1}{x-2} \cdot \frac{x^2+3x}{x+2}$$

*Como $\lim_{x\to 2_+} \dfrac{1}{x-2} = \infty$ e $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^2+3x}{x+2} = \dfrac{5}{2}$, segue pelo item (3) do **Teorema 37** que:*

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x^2+3x}{x^2-4} = \infty$$

References

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 1/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Maurer, W. A., **Fundamentos Aritméticos e Topológicos**, Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1977.