

MAT 2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1^o SEMESTRE DE 2025

AGENDA 07

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos o **Teorema do Confronto**, um resultado que nos permite garantir a existência e calcular diversos limites. O teorema nos garante, *a grosso modo*, que se no entorno de um ponto x_0 , uma função $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ está limitada superiormente e inferiormente por funções f, h , respectivamente, que têm um mesmo limite em x_0 , então g tem o mesmo limite que estas funções.

O **Teorema do Confronto** é utilizado para calcularmos os limites fundamentais:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

justificando-os rigorosamente. Terminamos apresentando quatro resultados importantíssimos que nos descrevem o comportamento das funções contínuas: o **Teorema do Anulamento**, o **Teorema do Valor Intermediário**, o **Teorema da Limitação** e o **Teorema de Weierstraß**.

O **Teorema do Anulamento** nos garante que, conforme nossa intuição sugere, se uma função contínua está definida em um intervalo da forma $[a, b]$ e assume sinais opostos nos extremos deste intervalo, então o gráfico da função intersecta o eixo Ox em algum ponto entre a e b . Este teorema é muito utilizado em Análise Numérica, para garantir a existência de zeros de funções contínuas.

*jeancb@ime.usp.br

O **Teorema do Valor Intermediário**, por sua vez, nos diz a grosso modo que funções contínuas aplicam intervalos em intervalos.

O **Teorema da Limitação** nos garante que toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado, da forma $[a, b]$, é limitada. Finalmente, o **Teorema de Weierstraß** nos garante que funções contínuas definidas em intervalos limitados fechados assumem, efetivamente, um valor máximo e um valor mínimo.

1 O Teorema do Confronto

Teorema 1 (Teorema do Confronto) *Sejam $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ três funções, $x_0 \in A'$ e suponhamos que exista $r > 0$ tal que:*

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < r) \Rightarrow (f(x) \leq g(x) \leq h(x)).$$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado.

Por hipótese, temos:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$, de modo que para o $\varepsilon > 0$ dado acima existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow (|f(x) - L| < \varepsilon),$$

ou seja,

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta_1) \Rightarrow (L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon)$$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = L$, de modo que para o $\varepsilon > 0$ dado acima existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow (|h(x) - L| < \varepsilon),$$

ou seja,

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta_2) \Rightarrow (L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon)$$

Tomamos, portanto, $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, ou seja, δ será o menor dos números δ_1, δ_2, r . Tem-se, assim que:

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (L - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon)$$

e em particular:

$$(x \in A) \& (0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow (L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon)$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = L.$$

Corolário 2 (Teorema do Confronto para Limites Laterais à Direita) *Sejam $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ três funções, $x_0 \in A'$ e suponhamos que exista $r > 0$ tal que:*

$$(x \in A) \& (x_0 < x < x_0 + r) \Rightarrow (f(x) \leq g(x) \leq h(x)).$$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_{0+}} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_{0+}} h(x)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_{0+}} g(x) = L.$$

Corolário 3 (Teorema do Confronto para Limites Laterais à esquerda) *Sejam $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ três funções, $x_0 \in A'$ e suponhamos que exista $r > 0$ tal que:*

$$(x \in A) \& (x_0 - r < x < x_0) \Rightarrow (f(x) \leq g(x) \leq h(x)).$$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow x_{0-}} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_{0-}} h(x)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_{0-}} g(x) = L.$$

Teorema 4 (Teorema do Confronto para Limites no Infinito) *Sejam $A \subset \mathbb{R}$ um subconjunto ilimitado à direita, $f, g, h : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ três funções. Se existir $M > 0$ tal que:*

$$(x \in A) \& (x > M) \Rightarrow (f(x) \leq g(x) \leq h(x)).$$

Se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow \infty} h(x)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$, existe $M_1 > 0$ tal que se $x > M_1$ implica $L - \varepsilon < f(x) < L + \varepsilon$, e em particular, $L - \varepsilon < f(x)$. Também, como $\lim_{x \rightarrow \infty} h(x) = L$, existe $M_2 > 0$ tal que $x > M_2$ implica $L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon$, e em particular, $h(x) < L + \varepsilon$. Finalmente, por hipótese, existe $M > 0$ tal que $x > M$ implica $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$. Ao tomarmos $N = \max\{M_1, M_2, M\} + 1$, ou seja, ao tomarmos N como o maior destes números mais 1, teremos:

$$x > N \Rightarrow L - \varepsilon \text{ pois } x > M_1 \underbrace{f(x) \leq g(x) \leq h(x)}_{\text{pois } x > M} \text{ pois } x > M_2 L + \varepsilon$$

de modo que $L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$, e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = L.$$

Definição 5 (função infinitésima em um ponto) *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in A'$. Dizemos que f é infinitésima em x_0 se, e somente se:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0.$$

Teorema 6 (limite do produto de uma função infinitésima por uma função limitada)

Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in (A \cap B)'$. Se f é uma função infinitésima em x_0 , ou seja, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$$

e se g é uma função limitada em algum intervalo contendo x_0 , isto é, existem $M > 0$ e $r > 0$ tais que:

$$(\forall x \in (A \cap B)')(0 < |x - x_0| < r \Rightarrow |g(x)| \leq M)$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Notemos, primeiramente, que:

$$(\forall x \in A \cap B)((0 < |x - x_0| < r) \Rightarrow |f(x) \cdot g(x)| = |f(x)| \cdot |g(x)| \leq |f(x)| \cdot M)$$

e portanto:

$$-M \cdot |f(x)| \leq f(x) \cdot g(x) \leq M \cdot |f(x)|$$

Pelo **Teorema do Confronto**, como $\lim_{x \rightarrow x_0} |f(x)| \cdot M = 0$ e $\lim_{x \rightarrow x_0} -M \cdot |f(x)| = 0$, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot g(x) = 0.$$

Note que nada exigimos quanto à existência ou não de um limite para a função g no teorema acima. A única coisa que se exige é que exista uma vizinhança de x_0 restrita à qual a função seja limitada. Isto é ilustrado na sequência:

Exemplo 7 Considere a função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0,$$

embora não exista o limite da função $\sin(1/x)$ conforme x tende a 0. De fato, note que a função $x \mapsto \sin(1/x)$ é limitada em todo o seu domínio (e, em particular, em qualquer vizinhança de $x = 0$):

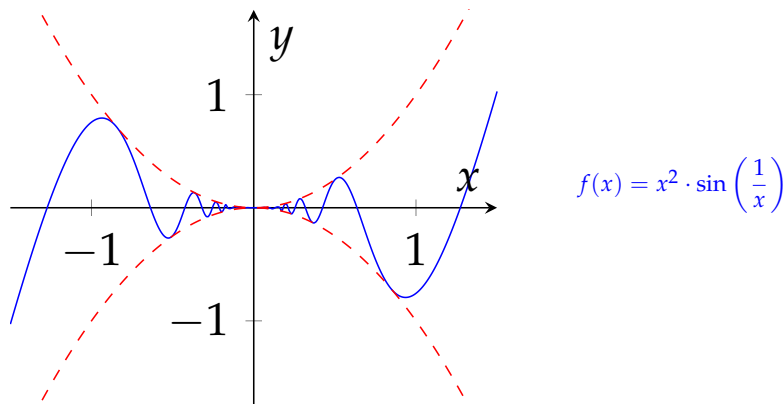
$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}) \left(\left| \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right| \leq 1 \right)$$

Ademais, a função $x \mapsto x^2$ é infinitésima em 0, uma vez que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0.$$

Assim, como f é produto de uma função infinitésima em 0 ($x \mapsto x^2$) por uma função limitada em um entorno de 0 ($x \mapsto \sin(1/x)$), segue do teorema anterior que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \left(\frac{1}{x} \right) = 0$$



Exemplo 8 Considere a função:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Afirmamos que $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot g(x) = 0$.

De fato, basta notarmos que a função g é limitada e que a função $x \mapsto x$ é infinitésima em 0.

2 Limites Fundamentais

Vamos calcular, com o que vimos até agora, o seguinte limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Recorde que, pelo item (5) do **Teorema 1** das NOTAS DA AULA 02, de 26 de agosto de 2020, que existe $r > 0$ tal que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $0 < x < r$ vale:

$$0 < \sin(x) < x < \frac{\sin(x)}{\cos(x)} = \tan(x)$$

Dividimos os membros da inequação acima por $\sin(x)$, que é positivo sempre que $0 < x < r$ para obter:

$$0 < 1 < \frac{x}{\sin(x)} < \frac{1}{\cos(x)}$$

donde decorre que:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

Por outro lado, usando a paridade das funções seno e cosseno, tem-se que:

$$-r < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < r \Rightarrow \cos(-x) < \frac{\sin(-x)}{-x} < 1$$

implica:

$$-r < x < 0 \Rightarrow 0 < -x < r \Rightarrow \cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

Concluimos, portanto, que dado qualquer $x \in [-r, r]$ vale:

$$\cos(x) < \frac{\sin(x)}{x} < 1$$

Aplicamos, agora, o **Teorema do Confronto** para calcular o limite em pauta conforme x tende a 0, usando que:

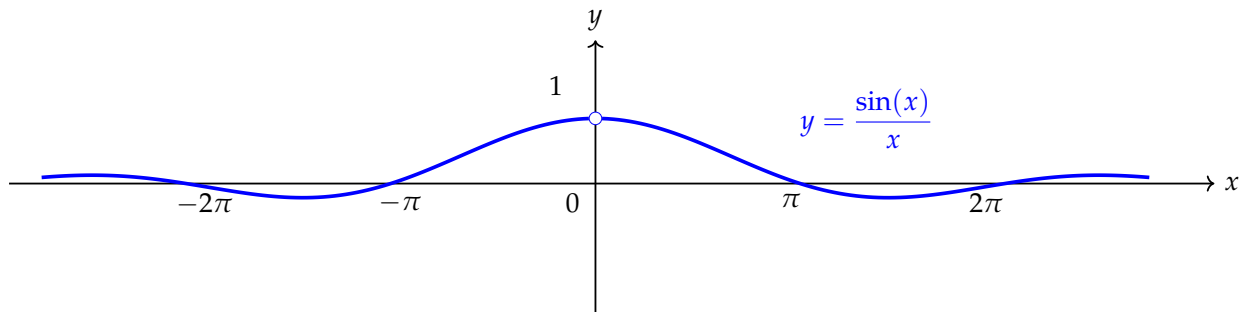
$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \text{ (continuidade da função cosseno)}$$

Obtemos:

$$1 = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \leq \lim_{x \rightarrow 0} 1$$

e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$



2.1 Aplicações

Exemplo 9 Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

Solução: Multiplicamos o numerador e o denominador da fração acima por $1 + \cos(x)$, e obtemos, para qualquer $x \neq (2k + 1) \cdot \pi$, $k \in \mathbb{Z}$:

$$\frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \frac{1 - \cos(x)}{x^2} \cdot \frac{1 + \cos(x)}{1 + \cos(x)} = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Tem-se, portanto, que a função $f(x) = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ coincide com a função $g(x) = \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$ em $]-\pi, \pi[\setminus \{0\}$. Pel“O” teorema, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \frac{1}{1 + \cos(x)}$$

Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 + \cos(x) = 1 + \cos(0) = 1 + 1 = 2 \neq 0,$$

de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = \frac{1}{\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \cos(x))} = \frac{1}{2}$$

Finalmente, note que $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\sin(x)}{x} \right)^2 = 1$$

Logo,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos^2(x)}{x^2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{1 + \cos(x)} = 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Exemplo 10 Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x}$$

Solução: Tem-se, para qualquer $x \neq 0$:

$$\frac{\sin(5x)}{x} = \frac{\sin(5x)}{x} \cdot \frac{5}{5} = 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} 5 \cdot \frac{\sin(5x)}{5x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x}$$

Aqui, a função $x \mapsto \sin(5x)/5x$ pode ser vista como composição $g \circ f$:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}\{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R}\{0\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 5x & \mapsto & \frac{\sin(5x)}{5x} \end{array}$$

onde $f(x) = 5x$ e $g(y) = \frac{\sin(y)}{y}$.

Assim, como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} y = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} 5x = 0$$

segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1,$$

e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{x} = 5 \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(5x)}{5x} = 5 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin(y)}{y} = 5 \cdot 1 = 5$$

3 O número e

Consideremos a sequência:

$$\begin{array}{ccc} a : \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

Afirmamos que esta sequência tem por limite um certo número que é maior do que 2 e menor do que 3.

Teorema 11 A sequência $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ converge para um número entre 2 e 3.

Pelo Teorema Binomial, tem-se:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + \frac{n}{1} \cdot \frac{1}{n} + \frac{n \cdot (n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^3 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \dots [n - (n-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^n \end{aligned}$$

que pode ser escrito, alternativamente, como:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) + \dots \\ &\quad \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \end{aligned}$$

Vamos mostrar agora que sempre que $n < m$ teremos:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

De fato, passando de n para $n+1$, tem-se $1 - \frac{1}{n} < 1 - \frac{1}{n+1}$, e cada parcela da soma acima cresce:

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< \frac{1}{1 \cdot 2} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \\ &\vdots \\ \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) &< \\ &< \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \end{aligned}$$

Note, ainda, que mais uma parcela positiva é somada para obtermos $\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n$, a saber $\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n+1)} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right) \cdot \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$. Segue, portanto, que:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

de modo que se $n < m$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n + k = m$, e portanto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \cdots < \left(1 + \frac{1}{n+k}\right)^{n+k} = \left(1 + \frac{1}{m}\right)^m$$

Assim, concluímos que há pelo menos um elemento de X para cada número natural, sendo X um conjunto infinito.

Se mostrarmos que X é um conjunto limitado, a existência do ponto de acumulação seguirá do **Teorema de Bolzano-Weierstraß**.

Mostremos, agora, a limitação de X : tem-se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{n}\right) &< 1 \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) &< 1 \\ &\vdots \\ \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right) &< 1 \end{aligned}$$

e portanto:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n}$$

Note também que:

$$\frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} < \frac{1}{2^2}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} < \frac{1}{2^3}, \quad \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

donde segue que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{soma da P.G. de razão } \frac{1}{2}}$$

Logo:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < 1 + \left[1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{n-1}}\right] = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 + \left[2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3$$

Como já sabemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $2 \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, segue que dado qualquer elemento x de X tem-se $2 \leq x < 3$. Logo $X \subset [2, 3[$, e X é limitado. A existência do ponto de acumulação decorre do **Teorema de Bolzano Weierstraß**.

Definição 12 *Seja e o único número real (cuja existência é garantida pelo teorema acima) tal que:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pode-se demonstrar que e é um número irracional, e seu valor com dez algarismos significativos é:

$$e = 2.7182818284 \dots$$

Teorema 13 *A função:*

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \end{aligned}$$

é tal que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Vamos mostrar este resultado utilizando o fato conhecido de que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$$

e o **Teorema do Confronto para Limites no Infinito**.

Dado $x \geq 1$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \leq x < n + 1$$

de modo que:

$$\frac{1}{n+1} < \frac{1}{x} \leq \frac{1}{n}$$

$$1 + \frac{1}{n+1} < 1 + \frac{1}{x} \leq 1 + \frac{1}{n}$$

e como $n \leq x < n + 1$, tem-se:

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Observe que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e \cdot 1 = e$$

e que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)} = \frac{e}{1} = e$$

Pelo **Teorema do Confronto para Limites no Infinito (Teorema 4)**, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$$

Para demonstrar que:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

efetuamos uma mudança de variável $t = -(x + 1)$, de modo que $x = -(t + 1)$. Note que:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -(t + 1) = -\infty,$$

de modo que podemos escrever:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{t+1}\right)^{-t-1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t+1}{t}\right)^{t+1} = \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t+1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^t \cdot \left(1 + \frac{1}{t}\right) = e \cdot 1 = e.\end{aligned}$$

Uma simples mudança de variável nos permite concluir o seguinte:

Corolário 14 *Tem-se:*

$$\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

Exercício.

Exemplo 15 *Calcular:*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5}$$

Solução:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 = e \cdot 1^5 = e.$$

Exemplo 16 *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x}$$

Solução: *Tem-se:*

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{3x} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \cdot \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \\ &= \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \right] = e \cdot e \cdot e = e^3\end{aligned}$$

Exemplo 17 *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$$

Solução: *Fazemos uma mudança de variável, $y = \frac{x}{2}$, observamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \infty$, e temos:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^{2y} = \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y}\right)^y \right]^2 = e^2$$

Exemplo 18 *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3}$$

Solução:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+3}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-1+4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x+3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x-1+4}$$

Neste ponto, fazemos a mudança de variável $y = \frac{x-1}{4}$, observamos que $\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x-1}{4} = \infty$, e obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x-1} \right)^{x-1+4} = \lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^{4y+4} = \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right)^y \right]^4 \cdot \left[\lim_{y \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{y} \right) \right]^4 = e^4$$

4 Propriedades das Funções Contínuas

Nesta seção apresentaremos algumas propriedades das funções contínuas. Alguns fatos que serão provados nesta seção são:

- Toda função contínua f , definida em um intervalo fechado da forma $[a, b]$, que muda de sinal entre a e b , se anula em algum ponto entre a e b ;
- Toda função contínua definida em um intervalo fechado e limitado, $[a, b]$, é uma função limitada;
- Toda função $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ contínua assume um máximo e um mínimo em $[a, b]$.

Teorema 19 (Teorema do Anulamento) *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $f(a) \cdot f(b) < 0$ (ou seja, se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos), existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Para fixarmos as ideias, suponhamos $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Façamos $a = a_0$ e $b = b_0$; seja c_0 o ponto médio do segmento $[a_0, b_0]$. Tem-se:

$$f(c_0) < 0 \text{ ou } f(c_0) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_0) < 0$, e façamos $c_0 = a_1$ e $b_0 = b_1$. Temos $f(a_1) < 0$ e $f(b_1) > 0$. Seja c_1 o ponto médio do segmento $[a_1, b_1]$. Temos:

$$f(c_1) < 0 \text{ ou } f(c_1) \geq 0.$$

Suponhamos $f(c_1) \geq 0$ e façamos $a_1 = a_2$ e $c_1 = b_2$. Assim, $f(a_2) < 0$ e $f(b_2) \geq 0$. Prosseguindo com esse raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos encaixados:

$$[a_0, b_0] \supset [a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

com $b_n - a_n = \frac{b-a}{2^n}$, de modo que $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n - a_n = 0$ e tal que para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$f(a_n) < 0 \text{ e } f(b_n) \geq 0 \quad (1)$$

Pelo **Teorema dos Intervalos Encaixados**, existirá um único $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$a_n \leq c \leq b_n.$$

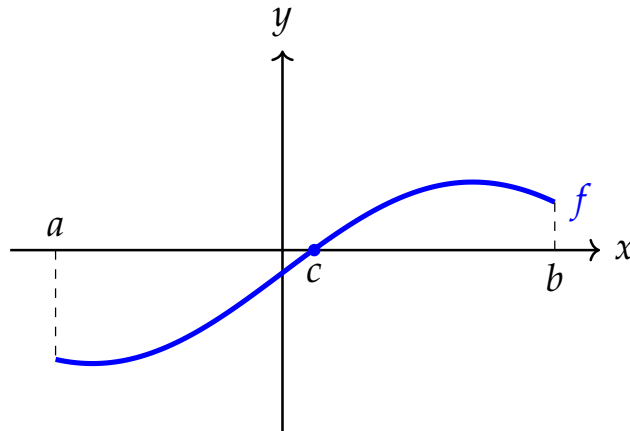
As sequências de termos gerais $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergem, por construção, para c . Segue, da continuidade de f que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = f(c) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = f(c) \quad (2)$$

Segue de (1) e de (2) que:

$$f(c) \leq 0 \text{ e } f(c) \geq 0$$

e portanto $f(c) = 0$.



Teorema 20 (Teorema do Valor Intermediário) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, dado qualquer γ entre $f(a)$ e $f(b)$, existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = \gamma$.

Para fixarmos as ideias, suponhamos que $f(a) < \gamma < f(b)$. Consideremos a função:

$$\begin{aligned} g: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) - \gamma \end{aligned}$$

Como f é contínua em $[a, b]$, segue que g também é contínua em $[a, b]$ (por quê?). Temos, ainda:

$$g(a) = f(a) - \gamma < 0 \text{ e } g(b) = f(b) - \gamma > 0.$$

Pelo **Teorema do Anulamento** segue que existe um $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = f(c) - \gamma = 0$, ou seja, tal que:

$$f(c) = \gamma.$$

Lema 21 *Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, $x_0 \in I' \cap I$ e*

$$\begin{aligned} x: \mathbb{N} &\rightarrow I \subset \mathbb{R} \\ n &\mapsto x_n \end{aligned}$$

uma sequência tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$. Então:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n\right) = f(x_0)$$

Precisamos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, é possível encontrarmos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Seja, então, $\varepsilon > 0$ um número tão pequeno quanto quisermos. Como f é contínua em x_0 , existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in I) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Como, por hipótese, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, para este $\delta > 0$ - oriundo da continuidade de f em x_0 - existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, se $n > n_0$ então $|x_n - x_0| < \delta$. Desta forma, basta tomarmos este n_0 , e teremos:

$$n > n_0 \Rightarrow |x_n - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x_n) - f(x_0)| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(x_0).$$

Teorema 22 (Teorema da Limitação) *Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, então existe $M > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in [a, b])(|f(x)| \leq M).$$

Suponhamos, por absurdo, que f não seja limitada em $[a, b]$. Façamos $a = a_1$ e $b = b_1$; Como f é ilimitada, dado $M = 1 > 0$, existe $x_1 \in [a_1, b_1]$ tal que $|f(x_1)| > 1$. Seja c_1 o ponto médio do intervalo $[a_1, b_1]$ de modo que f não é limitada em $[a_1, c_1]$ ou não é limitada em $[c_1, b_1]$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que f não seja limitada em $[c_1, b_1]$, e façamos $a_2 = c_1$ e $b_2 = b_1$. Como f não é limitada em $[a_2, b_2]$, dado $M = 2 > 0$, existe $x_2 \in [a_2, b_2]$ tal que $|f(x_2)| > 2$. Prosseguindo com este raciocínio, construiremos uma sequência de intervalos encaixados:

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset [a_3, b_3] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

satisfazendo as condições da **Propriedade dos Intervalos Encaixados** tal que, para cada número natural $M = n > 0$ existe $x_n \in [a_n, b_n]$ tal que:

$$|f(x_n)| > n$$

Ora, segue, portanto, que para qualquer $M > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $M < n_0$, e para todo $n \geq n_0$ tem-se $|f(x_n)| > M$. Concluimos, disto, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = \infty$$

Seja $c \in \mathbb{R}$ o único elemento tal que, para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$c \in [a_n, b_n].$$

Uma vez que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para c e a função f é contínua em c , segue que $x \mapsto |f(x)|$ é contínua¹ em c pelo **Lema 21** que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = |f(c)|.$$

No entanto, temos $\lim_{n \rightarrow \infty} |f(x_n)| = \infty$, o que é um absurdo. Como assumir que f é contínua e ilimitada em $[a, b]$ nos leva a um absurdo, concluimos que se f é contínua em $[a, b]$, então f é limitada em $[a, b]$.

Definição 23 Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ assume um máximo em A se existir um $x_M \in A$ tal que $f(x_M) = \sup\{f(x) \in B \mid x \in A\}$. Outrossim, uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ assume um mínimo em A se existir um $x_m \in A$ tal que $f(x_m) = \inf\{f(x) \in B \mid x \in A\}$

Exemplo 24 Tem-se que a função:

$$\begin{aligned} \sin : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sin(x) \end{aligned}$$

assume um máximo e um mínimo em $\mathbb{R}$. De fato, basta considerarmos $x_M = \frac{\pi}{2}$ e $x_m = \frac{3\pi}{2}$, e teremos:

¹pelo **Lema 5** das NOTAS DA AULA 07 e pelo **Teorema 21** das NOTAS DA AULA 09

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(-1 = \sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) \leq \sin(x) \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \right)$$

Exemplo 25 A função:

$$\begin{aligned} h :]0, \infty[&\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$

não assume nem um máximo nem um mínimo em $]0, \infty[$. De fato, o conjunto imagem de h , $h[]0, \infty[=]0, \infty[$ não é limitado superiormente, de modo que não admite supremo e, a fortiori, um máximo em $]0, \infty[$. Também, temos $\inf\left\{\frac{1}{x} \mid x \in]0, \infty[\right\} = 0$, mas não existe nenhum número real positivo x_m tal que:

$$\frac{1}{x_m} = 0.$$

Assim, a função não assume nem máximo nem mínimo em seu domínio.

Teorema 26 (Teorema de Weierstrass) Se $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $x_m, x_M \in [a, b]$ tais que:

$$(\forall x \in [a, b])(f(x_m) \leq f(x) \leq f(x_M))$$

Suponhamos, por absurdo, que f não assuma o valor $L = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, de modo que para todo $x \in [a, b]$ temos:

$$f(x) < L.$$

Podemos, então, definir a função:

$$\begin{aligned} g : [a, b] &\subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto L - f(x) \end{aligned}$$

que é tal que para todo $x \in [a, b]$, $g(x) > 0$.

Como g é contínua (pois f é contínua) e não se anula em $[a, b]$, a função recíproca de g :

$$\begin{aligned} \frac{1}{g} : K \subseteq \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{L - f(x)} \end{aligned}$$

é contínua em $[a, b]$, e portanto, pelo **Teorema da Limitação**, é limitada.

Assim sendo, existe $H > 0$ tal que:

$$(\forall x \in [a, b]) \left(\frac{1}{L - f(x)} < H \right)$$

Desta forma,

$$\frac{1}{H} < L - f(x)$$

e

$$(\forall x \in [a, b]) \left(f(x) < L - \frac{1}{H} \right)$$

o que implica que L não é $\sup\{f(x)|x \in [a, b]\}$ - pois não é a menor das cotas superiores, uma vez que $L - \frac{1}{H}$ é cota superior para $\{f(x)|x \in [a, b]\}$, o que é um absurdo.

Logo, se f é contínua em $[a, b]$, então f assume um máximo em $[a, b]$.

Faça como exercício a demonstração para o extremo inferior.

References

- [1] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.