

MAT 2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1º SEMESTRE DE 2025

AGENDA 08

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos formalmente a definição de derivada de uma função em um ponto, motivando-a por duas frentes distintas: uma cinemática e uma geométrica. Apresentamos, em seguida, as regras de derivação: regra da soma, da subtração, do produto, do quociente e a regra da cadeia, que serve para calcularmos a derivada de uma função composta.

Introdução

As ideias que levaram à introdução do conceito de derivada aparecem nos trabalhos de diversos autores, durante um longo período de tempo. Mas foi no século XVIII, com Newton e Leibniz, trabalhando independentemente um do outro, que esse conceito alcançou maturação completa.

Na obra de Leibniz, o conceito de derivada aparece ligado ao problema da tangente a uma curva, como veremos na sequência. Já na obra de Newton, que estava preocupado com seus trabalhos em Mecânica, a derivada foi introduzida como um recurso capaz de caracterizar aquilo que podemos chamar de “estado de movimento” num dado instante.

1 Motivação Cinemática

Consideremos uma partícula que se move numa trajetória qualquer. Seja $s = s(t)$ o espaço percorrido pela partícula até o instante t . Então:

*jeancb@ime.usp.br

$$\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$$

é o espaço percorrido desde o instante t até o instante $t + \Delta t$. A velocidade média, v_m , nesse intervalo de tempo que vai de t a $t + \Delta t$, é definida como sendo igual ao quociente do espaço percorrido pelo tempo gasto em percorrê-lo, isto é:

$$v_m = \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t}$$

Dizemos que o movimento é *uniforme* quando a velocidade média tem o mesmo valor, v , qualquer que seja o intervalo de tempo considerado. Neste caso, obtemos:

$$\frac{s(t) - s_0}{t} = v \text{ ou } s(t) = s_0 + v \cdot t,$$

onde s_0 é o espaço inicial. Esta última equação é chamada a *equação horária* do movimento. Seu gráfico é uma reta de declividade v , cortando o eixo dos s no ponto de ordenada s_0 .

Se o movimento não for uniforme, a velocidade média nada nos dirá sobre o estado do movimento no instante t (ou em qualquer outro instante entre t e $t + \Delta t$). De fato, podemos imaginar um sem-número de movimentos diferentes, entre os instantes t e $t + \Delta t$, todos com a mesma velocidade média: a partícula pode mover-se muito rapidamente em certos trechos, mais devagar em outros, e até parar algumas vezes até percorrer todo o percurso; e isto, como dissemos, de muitas maneiras distintas.

Como então caracterizar o “estado do movimento” num dado instante t ? Nossa experiência com a realidade física nos faz sentir que é preciso deixar *fluir* o tempo para podermos avaliar a rapidez ou a vagarosidade do movimento. O que podemos fazer, portanto, é imaginar intervalos de tempo Δt cada vez menores, para que as velocidades médias correspondentes possam nos dar informações cada vez mais precisas sobre o que se passa no instante t . Somos, assim, levados ao conceito de *velocidade instantânea*, $v = v(t)$, no instante t , como sendo:

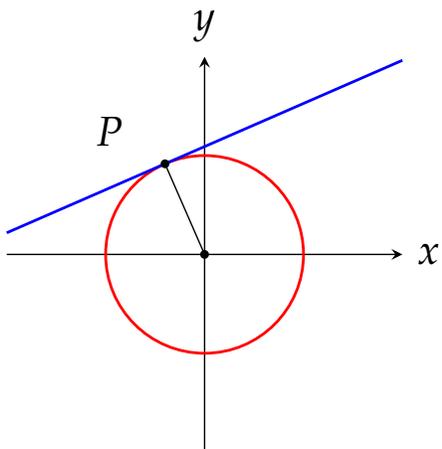
$$v(t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

A velocidade instantânea é, então, a “derivada do espaço em relação ao tempo”, conforme veremos na nossa definição de derivada.

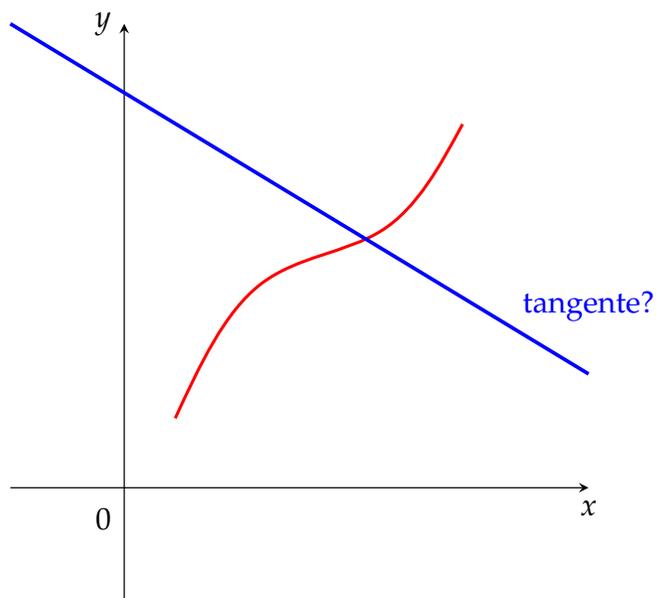
2 O Declive de uma Curva

Vamos considerar o problema que consiste em traçar a reta tangente a uma curva dada num determinado ponto da curva. No caso de uma circunferência, o problema é resolvido,

em Geometria Elementar, de duas maneiras simples e equivalentes: (1) a tangente à circunferência em um ponto P é a reta que passa por P perpendicularmente ao raio por este ponto. (2) a tangente à circunferência no ponto P é a reta que só toca a circunferência no ponto P .



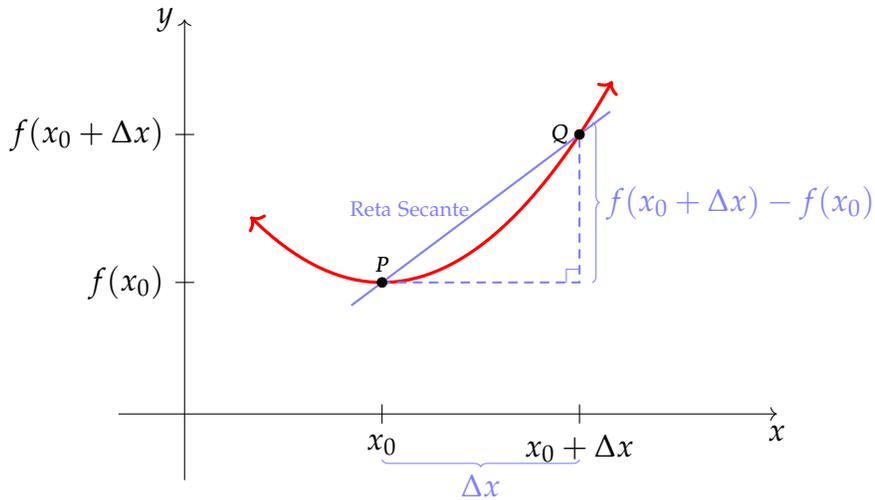
No caso de uma curva qualquer, a situação é mais complicada. A primeira solução só se aplicará se soubermos o que é o *raio* de uma curva num ponto - o que é uma questão tão delicada quanto a questão original de caracterizar tangente. A segunda solução tampouco é adequada a uma curva qualquer, como podemos ver facilmente no caso de uma interseção transversal:



Para resolver o problema, supomos que a curva seja o gráfico de uma certa função f . Sejam x_0 e $f(x_0)$ as coordenadas do ponto P onde desejamos traçar a tangente. Consideremos um

outro ponto Q do gráfico de f , cuja abscissa representamos por $x_0 + \Delta x$; então a ordenada de Q é $f(x_0 + \Delta x)$. O **declive** da reta secante PQ é dado pelo quociente:

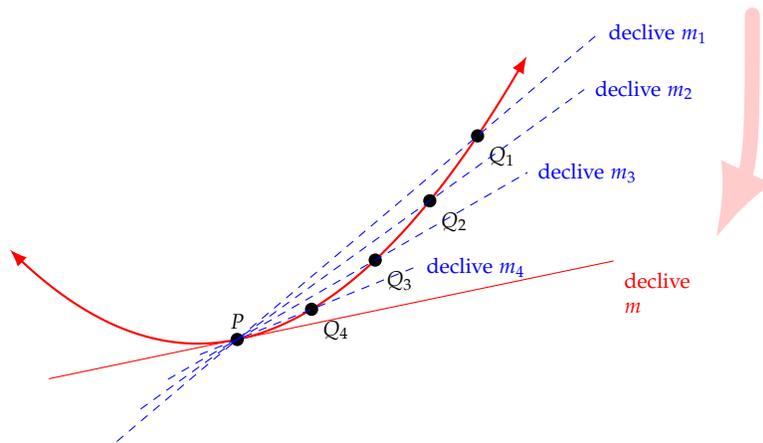
$$\text{declividade de } PQ = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$



chamado a **razão incremental**. Essa designação se justifica, já que Δx é realmente um incremento que damos à abscissa de P para obter a abscissa de Q ; em consequência, a ordenada $f(x_0 + \Delta x)$ é obtida de $f(x_0)$ mediante o incremento $f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)].$$

Vamos imaginar agora que, enquanto o ponto P permanece fixado, o ponto Q se aproxima de P , passando por sucessivas posições $Q_1, Q_2, \dots, Q_n, \dots$. Logo, a secante PQ_i assumirá as posições $PQ_1, PQ_2, \dots, PQ_n, \dots$, com declives $m_1, m_2, \dots, m_n, \dots$ correspondentes. A expectativa é que a razão incremental já citada, que é o declive da secante, se aproxime de um determinado valor m , à medida que o ponto Q se aproxima de P . Isso acontecendo, definimos a **reta tangente** à curva no ponto P como sendo aquela que passa por P e cujo declive (ou coeficiente angular) é m . Este número m também será o que definimos por **declive da curva em P** .



O recurso analítico para “fazer Q se aproximar de P ” consiste em tomar o número Δx cada vez mais próximo de zero na razão incremental. Quando dizemos que “ Δx está tendendo a 0”, e escrevemos $\Delta x \rightarrow 0$, entendemos que Δx pode assumir tanto valores positivos quanto negativos. É claro que se imaginarmos Δx assumindo *valores exclusivamente positivos*, então o ponto Q estará se aproximando de P *pela direita*. Por sua vez, se imaginarmos Δx assumindo *valores exclusivamente negativos*, então o ponto Q estará se aproximando de P *pela esquerda*. Desta forma, exigiremos que os pontos onde vamos calcular derivadas sejam sempre pontos do domínio da função em apreço dos quais podemos nos aproximar tanto pela direita quanto pela esquerda. A este tipo de ponto denominaremos “pontos interiores” do domínio.

Desta forma, para obtermos valores arbitrariamente próximos de m , bastará tomarmos valores de Δx suficientemente próximos de 0. Assim,

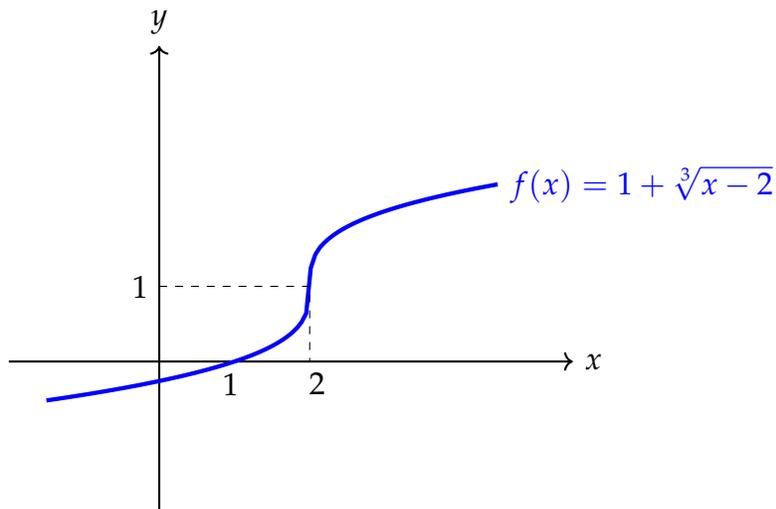
$$m = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Pode acontecer que a razão incremental tenda a ∞ ou $-\infty$ conforme $\Delta x \rightarrow 0$. Neste caso, definimos a **reta tangente** à curva $f(x)$ em x_0 como a reta $x = x_0$, que passa pelo ponto P e é paralela ao eixo Oy .

Exemplo 1 A função:

$$y = f(x) = 1 + \sqrt[3]{x - 2}$$

está definida para todo $x \in \mathbb{R}$, sendo positiva sempre que $x > 1$ e negativa para $x < 1$, anulando-se em $x = 1$. Seu gráfico tem o aspecto ilustrado a seguir:



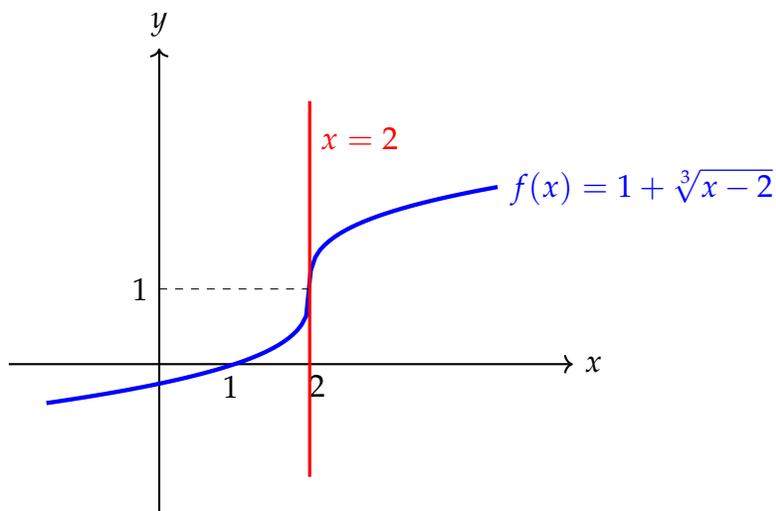
Para calcular a razão incremental em $x = 2$, observamos que:

$$f(2) = 1 \text{ e } f(2 + \Delta x) = 1 + \sqrt[3]{2 + \Delta x - 2} = 1 + \sqrt[3]{\Delta x}$$

de modo que:

$$\frac{f(2 + \Delta x) - f(2)}{\Delta x} = \frac{(1 + \sqrt[3]{\Delta x}) - 1}{\Delta x} = \frac{\sqrt[3]{\Delta x}}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{\Delta x^2}} = \frac{1}{|\Delta x|}$$

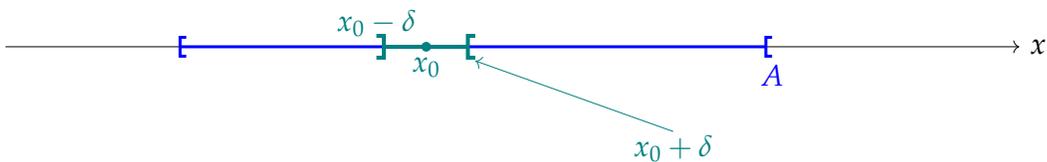
Isto mostra que a razão incremental tende a ∞ conforme Δx tende a 0. Consequentemente, a reta tangente à curva no ponto $P = (2, f(2)) = (2, 1)$ é a reta $x = 2$.



3 Derivadas

Definimos, nesta seção, o que é a derivada de uma função em um ponto do interior de seu domínio.

Definição 2 (ponto interior) Seja $A \subseteq \mathbb{R}$. Dizemos que $x_0 \in A$ é um **ponto interior** de A se existir $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq A$. Ao conjunto de todos os pontos interiores de A denominamos o **interior** de A , e denotamos por $\text{int}(A)$.

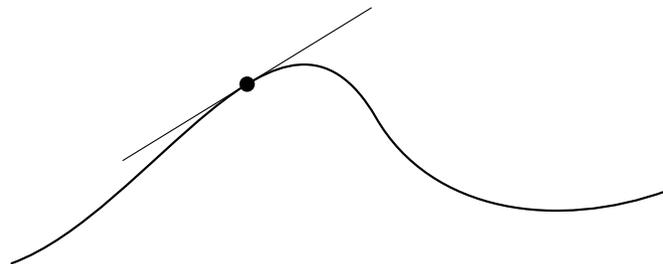


Definição 3 Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \text{int}(A)$. A **derivada de f em x_0** , denotada por $f'(x_0)$, é, sempre que existir, o limite:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1)$$

que também denotamos por $\frac{dy}{dx}(x_0)$.

Geometricamente, podemos interpretar a derivada como sendo a declividade da reta tangente ao gráfico de uma função em um ponto.



Exemplo 4 Calcular a derivada da função constante igual a $k \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto k \end{aligned}$$

Solução: A derivada desta função em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer é:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{k - k}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$$

Exemplo 5 Calcular a derivada da função identidade:

$$\begin{aligned} \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

Solução: A derivada desta função em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer é:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1$$

Exemplo 6 Calcular a derivada da função $f(x) = x^2$ em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2 - x_0^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 2x_0 + \Delta x = 2x_0. \end{aligned}$$

Exemplo 7 Calcular a derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ qualquer.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\Delta x} \cdot \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{(\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}. \end{aligned}$$

Exemplo 8 Calcular a derivada da função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a \cdot x + b \end{aligned}$$

onde $a \neq 0$, em $x_0 \in \mathbb{R}$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot (x_0 + \Delta x) + b - (a \cdot x_0 + b)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot x_0 + a \cdot \Delta x + b - a \cdot x_0 - b}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a = a. \end{aligned}$$

Exemplo 9 Calcular a derivada de:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt[3]{x} \end{aligned}$$

em $x_0 \in \mathbb{R}^*$.

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x} - \sqrt[3]{x_0}) \cdot ((\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})}{\Delta x \cdot ((\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot ((\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2})} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{(\sqrt[3]{x_0 + \Delta x})^2 + \sqrt[3]{x_0 + \Delta x} \cdot \sqrt[3]{x_0} + \sqrt[3]{x_0^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \end{aligned}$$

3.1 Derivadas Laterais

Uma vez que a derivada de uma função em um ponto é um limite, a depender das circunstâncias ela pode ou não existir. Faz sentido, por tanto, introduzirmos a noção de derivada lateral à direita e à esquerda. Aqui nós não exigimos que o ponto seja interior ao domínio, apenas que pertença e seja ponto de acumulação lateral.

Definição 10 Sejam $A \subset \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação à esquerda de A e $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A **derivada lateral à direita de f em x_0** , denotada por $f'_+(x_0)$ é o limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

sempre que este limite existir.

Definição 11 Sejam $A \subset \mathbb{R}$, x_0 um ponto de acumulação à direita de A e $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A **derivada lateral à esquerda de f em x_0** , denotada por $f'_-(x_0)$ é o limite:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

sempre que este limite existir.

Exemplo 12 Calcular as derivadas laterais da função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

em $x_0 = 0$.

Solução: Temos:

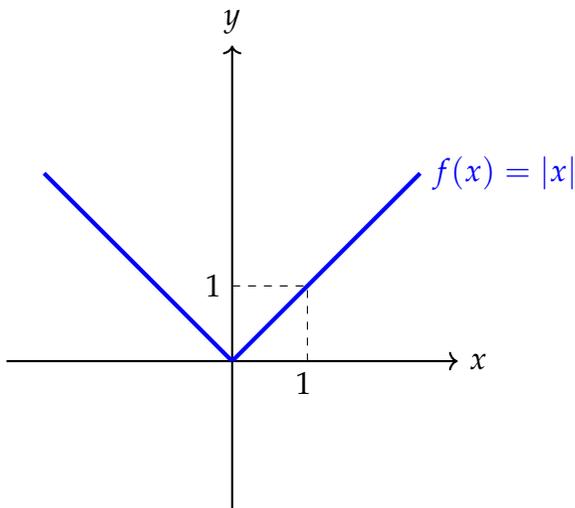
$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^+} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0^-} \frac{f(0 + \Delta x) - f(0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{|\Delta x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} -1 = -1.$$

Segue, portanto, que o limite:

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{|0 + \Delta x| - |0|}{\Delta x}$$

não existe, de modo que a função $f(x) = |x|$ não admite derivada em $x_0 = 0$.



Definição 13 (derivabilidade) Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(A)$ e $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **derivável em** x_0 se, e somente se as derivadas laterais, $f'_+(x_0)$ e $f'_-(x_0)$ são iguais, ou seja, se, e somente se, f admite derivada em x_0 .

Exemplo 14 A função $f(x) = |x|$ não é derivável em $x_0 = 0$.

Assim como a continuidade, a derivabilidade é uma propriedade pontual. Estendemos o conceito de derivabilidade para conjuntos de modo análogo ao que fizemos para continuidade:

Definição 15 Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é **derivável em** $D \subset A$ se, e somente se f for derivável em todos os pontos de D . Em símbolos,

$$f \text{ é derivável em } D \subseteq A \iff (\forall x_0 \in D)(\exists f'(x_0))$$

Exemplo 16 A função $f(x) = x^2$ é derivável em \mathbb{R} , uma vez que:

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(f'(x_0) = 2 \cdot x_0)$$

Exemplo 17 A função $f(x) = \sqrt{x}$ é derivável em \mathbb{R}_+^* , pois:

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*) \left(f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \right)$$

Exemplo 18 A função $f(x) = a \cdot x + b$ é derivável em \mathbb{R} , pois:

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R})(f'(x_0) = a)$$

Exemplo 19 A função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é derivável em \mathbb{R}^* , uma vez que:

$$(\forall x_0 \in \mathbb{R}^*) \left(f'(x_0) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x_0^2}} \right)$$

Definição 20 (função derivada) Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. A **função derivada de** f é a função:

$$\begin{aligned} f' : D \subset A \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f'(x), \end{aligned}$$

onde $D \subseteq A$ é o maior subconjunto onde f é derivável.

Exemplo 21 A derivada da função $f(x) = x^2$ é:

$$\begin{array}{lcl} f' : \mathbb{R} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x \end{array}$$

Observe que, neste caso, $D = \mathbb{R}$, uma vez que podemos calcular $f'(x) = 2 \cdot x$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 22 A derivada da função $f(x) = \sqrt{x}$ é:

$$\begin{array}{lcl} f' : \mathbb{R}_+^* \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{2\sqrt{x}} \end{array}$$

Observe que, neste caso, $D = \mathbb{R}_+^*$, uma vez que podemos calcular $f'(x) = 1/2\sqrt{x}$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exemplo 23 A derivada da função $f(x) = a \cdot x + b$ é:

$$\begin{array}{lcl} f' : \mathbb{R} \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & a \end{array}$$

Observe que, neste caso, $D = \mathbb{R}$, uma vez que podemos calcular $f'(x) = a$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$.

Exemplo 24 A derivada da função $f(x) = \sqrt[3]{x}$ é:

$$\begin{array}{lcl} f' : \mathbb{R}^* \subset \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}} \end{array}$$

Observe que, neste caso, $D = \mathbb{R}$, uma vez que podemos calcular $f'(x) = 1/3\sqrt[3]{x^2}$ para qualquer que seja $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

4 Derivabilidade e Continuidade

Veremos um importante resultado que nos garante que se uma função é derivável em um ponto, esta é contínua neste ponto. A recíproca, entretanto, é falsa, conforme vimos.

Teorema 25 Toda função derivável em um ponto é diferenciável neste mesmo ponto.

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \text{int}(A)$. Considere a função:

$$\begin{aligned} \eta : A \setminus \{x_0\} \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \end{aligned}$$

Podemos escrever, portanto:

$$f(x) - f(x_0) = (\eta(x) + f'(x_0)) \cdot (x - x_0)$$

$$f(x) = f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0. \end{aligned}$$

e portanto:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} [f(x_0) + \eta(x) \cdot (x - x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)] = f(x_0) + 0 + 0 = f(x_0)$$

de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0),$$

e portanto f é contínua em x_0 .

Observação 26 Note que a demonstração de que $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = 0$ é necessária para garantir que $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) \cdot (x - x_0) = 0$. De fato, se não garantíssemos que $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) = 0$, não seria lícito concluir que $\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) \cdot (x - x_0) = 0$. De fato, se tivéssemos, por exemplo, $\eta(x) = \frac{1}{(x - x_0)^3}$, teríamos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \eta(x) \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^3} \cdot (x - x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{(x - x_0)^2} = \infty$$

Observação 27 Nem toda função contínua em um ponto é derivável neste ponto. Por exemplo, $f(x) = |x|$, embora contínua em 0 não é derivável em 0 - as derivadas laterais são diferentes.

O exemplo a seguir nos alerta para o fato de que existem curvas que são “contínuas” mas que não admitem reta tangente em nenhum de seus pontos - de modo que **continuidade não implica derivabilidade**. Na verdade, da teoria desenvolvida pelo matemático francês René Louis Baire (1874-1932), pode-se deduzir que a “maioria¹” das funções contínuas de $[0, 1]$ em \mathbb{R} não admite derivada em nenhum ponto².

Exemplo 28 (Floco de Neve de Helge von Koch) *Considere a curva construída como segue:*

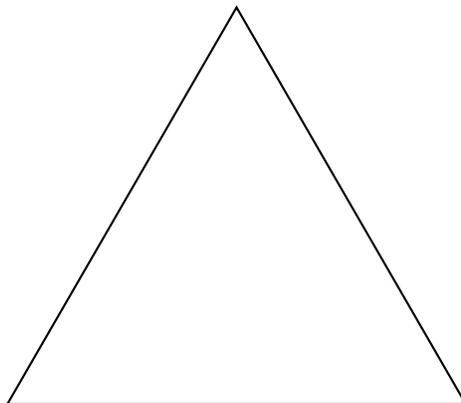
Passo 0: *Desenhe um triângulo equilátero T_0 , de lado com medida 1;*

Passo 1: *Divida cada um dos lados de T_0 em três segmentos iguais, e substitua o segmento do meio por dois segmentos, cada um medindo $\frac{1}{3}$, saindo do triângulo. O objeto resultante será um objeto T_1 com formato de estrela de seis pontas - um polígono de 12 lados, cada lado medindo $\frac{1}{3}$;*

Passo 2: *Repita o procedimento em cada um dos 12 lados de T_1 , substituindo o segmento do meio de cada lado, de comprimento $\frac{1}{9}$ por dois segmentos de comprimento $\frac{1}{9}$. Isto nos fornecerá uma figura T_2 , com 48 lados, cada um medindo $\frac{1}{9}$;*

Passo 3: *Repita o procedimento em cada um dos 48 lados de T_2 , substituindo o segmento do meio de cada lado, de comprimento $\frac{1}{27}$ por dois segmentos de comprimento $\frac{1}{27}$. Isto nos fornecerá uma figura T_3 , com 192 lados, cada um medindo $\frac{1}{27}$;*

*Repita o processo, indutivamente, para obter T_n , e seja $K = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n$ a figura resultante. K é denominado **floco de neve de Helge von Koch**, e uma aproximação de seu aspecto é dada na figura a seguir:*



¹constituem um conjunto “denso” em $C([0, 1], \mathbb{R})$.

²cf. <https://www.math3ma.com/blog/baire-category-nowhere-differentiable-functions-part-two>

4.1 Curvas sem Tangentes e Movimento Browniano

Já mencionamos, na seção anterior, que existem funções contínuas sem derivadas em nenhum ponto de seu domínio. Vários matemáticos, a começar com Bolzano (1781-1849), em 1834, construíram funções desse tipo, mas o exemplo que atraiu maior atenção foi o que Weierstrass (1815-1897) apresentou à Academia de Berlim em 1872³. A construção de uma função contínua sem derivada, com todas as simplificações possíveis, é ainda um processo muito delicado, que não cabe apresentar detalhadamente num curso introdutório de Cálculo.

A ideia de curva contínua sem tangente - por exemplo, uma curva só constituída de pontos angulosos - não condiz bem com a nossa intuição geométrica. Seria de esperar que um tal objeto não passasse de um ente puramente matemático, sem correspondente no mundo físico. O curioso é que o contrário é que é verdade. Existe, na natureza, um tipo importante de movimento, chamado movimento browniano, cuja trajetória é uma curva contínua sem tangente. Vale a pena fazer uma digressão explicativa desse fenômeno.

Em 1827, o botânico escocês Robert Brown (1773-1858) investigava o processo de fertilização numa certa espécie de flor. Ele notou ao microscópio, que os grãos de polen em suspensão na água apresentavam um rápido movimento desordenado. Embora Brown supusesse, inicialmente, que esse movimento fosse característico das células sexuais masculinas, esta ideia teve de ser abandonada, já que subseqüentes observações mostraram que partículas de outros materiais em suspensão num líquido apresentavam o mesmo comportamento. Os físicos só começaram a estudar esse fenômeno muito mais tarde, porém sem resultados significativos, até que, em 1905, Albert Einstein (1879-1955) escreveu um trabalho decisivo sobre o movimento browniano. Isto ocorreu no mesmo ano em que Einstein publicava seu primeiro trabalho sobre a Teoria da Relatividade e um outro estudo memorável sobre o efeito fotoelétrico.

Nessa época, as idéias de átomos e moléculas ainda eram usadas pelos físicos menos como entidades reais do que como hipóteses explicativas de certos fenômenos. Partindo dessas hipóteses, Einstein procurou deduzir consequências que pudessem ser verificadas experimentalmente: isto seria uma confirmação da existência daquelas entidades. Procedendo desse modo e considerando que partículas em suspensão num fluido sofrem o impacto de inúmeras moléculas à sua volta, Einstein foi levado a prever um movimento errático das partículas, precisamente o chamado movimento browniano. É curioso notar que Einstein descobriu esse fenômeno num estudo puramente teórico. Só depois de terminar suas investigações é que ele veio a saber dos estudos anteriores sobre o movimento browniano.

Finalmente, na década de 1920, o matemático americano Norbert Wiener (1894-1964) iniciou uma teoria matemática do movimento browniano. Wiener deu uma interpretação precisa à ideia de "movimento ao acaso" de uma partícula. No contexto dessa teoria, ele demonstrou

³ $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n \cdot \cos(9^n \cdot \pi \cdot x)$

que a trajetória efetiva da partícula é uma curva contínua, porém sem tangente em ponto algum. Fisicamente, o que se passa é que a partícula está, a cada instante, recebendo o impacto desordenado das moléculas do fluido, de sorte que, em seu movimento, ela muda continuamente de direção, não possuindo, portanto, velocidade instantânea definida em ponto algum.

5 Regras de Derivação

Nesta seção apresentamos algumas propriedades “operatórias” das derivadas: a derivada da soma, da subtração, do produto e do quociente.

Teorema 29 (derivada da soma) *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in \text{int}(A)$. Então a função:*

$$\begin{aligned} f + g : A \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) + g(x) \end{aligned}$$

é derivável em x_0 e:

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

$$\begin{aligned} (f + g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f + g)(x_0 + \Delta x) - (f + g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) + g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0). \end{aligned}$$

Exemplo 30 *Calcular a derivada da função polinomial:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c \end{aligned}$$

Temos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(a \cdot x^2 + b \cdot x + c) = \frac{d}{dx}(a \cdot x^2) + \frac{d}{dx}(b \cdot x) + \frac{d}{dx}(c) = a \frac{d}{dx}(x^2) + b = 2a \cdot x + b$$

Teorema 31 (derivada da subtração) *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in \text{int}(A)$. Então a função:*

$$f - g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) - g(x)$$

é derivável em x_0 e:

$$(f - g)'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0).$$

$$\begin{aligned} (f - g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f - g)(x_0 + \Delta x) - (f - g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) + g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) - g'(x_0). \end{aligned}$$

Teorema 32 (derivada do produto) Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in \text{int}(A)$. Então a função:

$$f \cdot g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f(x) \cdot g(x)$$

é derivável em x_0 e:

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

Note que como f e g são deriváveis em x_0 , f e g são contínuas em x_0 , de modo que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0)$$

$$\begin{aligned}
(f \cdot g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \cdot g)(x_0 + \Delta x) - (f \cdot g)(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) + f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x)}{\Delta x} + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) + \lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(x_0) \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\
&= f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).
\end{aligned}$$

Exemplo 33 Calcular a derivada da função:

$$h(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{x}$$

Solução: Neste caso, $h(x) = f(x) \cdot g(x)$, onde $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sqrt[3]{x}$. Sabe-se que:

$$f'(x) = 2x \text{ e } g'(x) = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

de modo que:

$$h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) = 2x \cdot \sqrt[3]{x} + x^2 \cdot \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

Teorema 34 (derivada do quociente) Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $x_0 \in \text{int}(A)$ tais que $g(x_0) \neq 0$. Então a função:

$$\begin{aligned}
\frac{f}{g} : A \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
x &\mapsto \frac{f(x)}{g(x)}
\end{aligned}$$

é derivável em x_0 e:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Tem-se, para todo x tal que $g(x) \neq 0$:

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) \cdot g(x) = f(x).$$

Derivando os dois membros da igualdade acima, obtemos:

$$\left[\left(\frac{f}{g}\right)(x) \cdot g(x)\right]' = f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) \cdot g(x) + \left(\frac{f}{g}\right)(x) \cdot g'(x) = f'(x)$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \left[f'(x) - \left(\frac{f}{g}\right)(x) \cdot g'(x)\right]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \left[f'(x) - \frac{f(x)}{g(x)} \cdot g'(x)\right]$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{1}{g(x)} \cdot \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Logo:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{[g(x_0)]^2}$$

Exemplo 35 Calcular a derivada da função dada por:

$$h(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - 3}$$

Solução: Temos aqui um quociente f/g , onde $f(x) = x^2 + 2$ e $g(x) = x^2 - 3$, de modo que $f'(x) = 2x$ e $g'(x) = 2x$. Assim,

$$\left(\frac{x^2 + 2}{x^2 - 3}\right)' = \frac{2x \cdot (x^2 - 3) - (x^2 + 2) \cdot 2x}{(x^2 - 3)^2}$$

6 Derivada da Função Composta: a Regra da Cadeia

Encerramos estas notas apresentando a **Regra da Cadeia**, que nos permite calcular a derivada de funções compostas em termos das funções componentes:

Teorema 36 (Regra da Cadeia) Sejam $f : B \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}$ e $g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ duas funções, $x_0 \in \text{int}(A)$ tais que g é derivável em x_0 e f é derivável em $g(x_0)$. Então $f \circ g : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow C \subseteq \mathbb{R}$ é derivável em x_0 e:

$$(f \circ g)'(x_0) = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0).$$

$$\begin{aligned} (f \circ g)'(x_0) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - (f \circ g)(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - (f \circ g)(x_0)}{\Delta x} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f \circ g)(x_0 + \Delta x) - (f \circ g)(x_0)}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

Aqui, fazemos a mudança de variável $y = g(x_0 + \Delta x)$, $y_0 = g(x_0)$, de modo que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} y = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x_0 + \Delta x) = g(x_0) = y_0$$

e portanto:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} = f'(y_0) = f'(g(x_0))$$

Assim,

$$\begin{aligned} &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(g(x_0 + \Delta x)) - f(g(x_0))}{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(y) - f(y_0)}{y - y_0} \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} = f'(g(x_0)) \cdot g'(x_0). \end{aligned}$$

Exemplo 37 Derivar a função:

$$h(x) = \sqrt{x^2 + 2}$$

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & [2, \infty[& \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 2 & \mapsto & \sqrt{x^2 + 2} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{ccc} f : & [2, \infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} g : & \mathbb{R} & \rightarrow & [2, \infty[\\ & x & \mapsto & x^2 + 2 \end{array}$$

Assim, $f'(y) = \frac{1}{2\sqrt{y}}$ e $g'(x) = 2x$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{g(x)}} \cdot g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 2}}$$

References

- [1] ÁVILA, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.
- [2] GOODMAN, S.E., **Beginning Topology**. Editora Thomson Brooks/Cole. 2005.
- [3] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.