

MAT 2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1^o SEMESTRE DE 2025

AGENDA 09

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos as derivadas das funções elementares, definimos funções dadas implicitamente por equações e descrevemos como derivá-las e, em seguida, apresentamos como derivar a inversa de certas funções.

1 Funções Elementares e Suas Derivadas

As funções elementares classificam-se em dois tipos: funções elementares algébricas e funções elementares transcendentais. As funções elementares algébricas são: a função constante, a função afim, a função linear, a função polinomial de grau n , as funções racionais e, ainda, as chamadas “funções algébricas”, que veremos na sequência.

As funções elementares transcendentais são as funções com expoente irracional, isto é, funções do tipo $f(x) = x^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas e as funções ciclométricas.

As funções que são combinações das funções elementares não se denominam mais funções elementares, tampouco aquelas que não constam nesta lista apresentada acima.

Nestas notas veremos como derivá-las. A partir das derivadas destas funções elementares poderemos calcular as derivadas de muitas funções usando as regras de derivação vistas na aula anterior.

Lema 1 *Tem-se:*

*jeancb@ime.usp.br

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0$$

Podemos multiplicar o numerador e o denominador da expressão acima pela expressão conjugada de $\cos(x) - 1$, qual seja, $\cos(x) + 1$, obtendo para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x) \neq -1$, tem-se::

$$\frac{\cos(x) - 1}{x} = \frac{\cos(x) - 1}{x} \cdot \frac{(\cos(x) + 1)}{(\cos(x) + 1)} = \frac{\cos^2(x) - 1}{x \cdot (\cos(x) + 1)} - \sin^2(x) = \cos^2(x) - 1 \frac{-\sin^2(x)}{x \cdot (\cos(x) + 1)}$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin^2(x)}{x \cdot (\cos(x) + 1)} = - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}$$

Uma vez que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

e que $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos(x) + 1) = \lim_{x \rightarrow 0} \cos(x) + \lim_{x \rightarrow 0} 1 = \cos(0) + 1 = 1 + 1 = 2 \neq 0$, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \cdot \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1} = \overbrace{\left(\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} \right)}^{=1} \cdot \overbrace{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{\cos(x) + 1}}^{=0} = 0$$

Assim,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Teorema 2 (derivada da função seno) A função $\sin : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em todo o seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(\sin(x)) = \cos(x).$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dx}(\sin(x)) \right|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0 + \Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cdot \cos(\Delta x) + \sin(\Delta x) \cdot \cos(x_0) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(x_0) \cdot (\cos(\Delta x) - 1) + \sin(\Delta x) \cdot \cos(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \sin(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{=0} + \cos(x_0) \cdot \overbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}^{=1} = \cos(x_0).
 \end{aligned}$$

Teorema 3 (derivada da função cosseno) A função $\cos : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em todo o seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x).$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d}{dx}(\cos(x)) \right|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0 + \Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0) \cdot \cos(\Delta x) - \sin(x_0) \cdot \sin(\Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(x_0) \cdot (\cos(\Delta x) - 1) - \sin(x_0) \cdot \sin(\Delta x)}{\Delta x} = \\
 &= \cos(x_0) \cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}}_{=0} - \sin(x_0) \cdot \overbrace{\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}^{=1} = -\sin(x_0).
 \end{aligned}$$

Teorema 4 (Derivada da função x^n) Seja $n \in \mathbb{N}$, A função:

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\
 x &\mapsto x^n
 \end{aligned}$$

é derivável em qualquer ponto do seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}.$$

Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Tem-se:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d}{dx}(x^n) \right|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(x_0 + \Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \text{Teorema Binomial} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x_0^n + \binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x_0^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + n \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} n \cdot x_0^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + n \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1} \end{aligned}$$

Lema 5 Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. Tem-se:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln(a)$$

Fazemos a mudança de variável:

$$a^{\Delta x} - 1 = u$$

e observamos que:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} a^{\Delta x} - 1 = a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Também,

$$\ln(a^{\Delta x}) = \ln(u + 1)$$

de modo que $\Delta x \cdot \ln(a) = \ln(u + 1)$. Assim,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} &= \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \ln(a) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \cdot \ln(u+1)} = \\ &= \ln(a) \cdot \lim_{u \rightarrow 0} \frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}} = \ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(e)} = \ln(a) \end{aligned}$$

Teorema 6 (Derivada da Função Exponencial) Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto a^x \end{aligned}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln(a)$$

Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln(a).$$

Como corolário do teorema acima, segue que:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \cdot \ln(e) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Teorema 7 (Derivada da Função Logarítmica) A função:

$$\begin{aligned} \ln: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln(x) \end{aligned}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}$$

Temos:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}(\ln(x)) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln(x + \Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{x + \Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) = \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) \ln \text{ é contínua } \ln\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) u = \frac{\Delta x}{x} \ln\left(\lim_{\Delta x \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{x \cdot u}}\right) = \\ &\lim_{\Delta x \rightarrow 0} u = 0 \ln\left(\lim_{u \rightarrow 0} [(1 + u)^{\frac{1}{u}}]^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Teorema 8 (Derivada da Função Logarítmica) Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log_a(x) \end{aligned}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Basta observarmos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$$

e derivamos:

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x) \right) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

Teorema 9 (derivada da função com expoente irracional) Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Temos:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

Note que:

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$$

de modo que, pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha \cdot \ln(x)}) = e^{\alpha \cdot \ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\alpha \cdot \ln(x)) = (e^{\ln(x)})^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

2 Cálculo de Algumas Derivadas

Exemplo 10 Calcular a derivada de $h(x) = \sin(x^3)$.

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \mapsto \sin(x^3) \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto \sin(y) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x^3 \end{aligned}$$

Assim, $f'(y) = \cos(y)$ e $g'(x) = 3x^2$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(g(x)) \cdot g'(x) = \cos(x^3) \cdot 3x^2 = 3x^2 \cdot \cos(x^3)$$

Exemplo 11 Calcular a derivada de $h(x) = e^{3x}$.

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x \mapsto e^{3x} \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto e^y \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} g: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x \end{aligned}$$

Assim, $f'(y) = e^y$ e $g'(x) = 3$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3 \cdot e^{3x}.$$

Exemplo 12 Calcular a derivada de $h(x) = (3x^2 + 1)^3$.

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\xrightarrow{g} \mathbb{R} \xrightarrow{f} \mathbb{R} \\ x &\mapsto 3x^2 + 1 \mapsto (3x^2 + 1)^3 \end{aligned}$$

onde:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto y^3 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2 + 1 \end{array}$$

Assim, $f'(y) = 3y^2$ e $g'(x) = 6x$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3g(x)^2 \cdot g'(x) = 3 \cdot (3x^2 + 1)^2 \cdot 6x = 18x \cdot (3x^2 + 1)^2.$$

Teorema 13 *Seja $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \text{int}(A)$. Então:*

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & e^{g(x)} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & e^y \end{array}$$

Assim, $f'(y) = e^y$, de modo que pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Teorema 14 *Seja $g: A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \text{int}(A)$ e tal que $(\forall x \in A)(g(x) > 0)$. Então:*

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Temos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & \ln(g(x)) \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y) \end{array}$$

Assim, $f'(y) = \frac{1}{y}$, de modo que pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

3 Observações

No Ensino Médio ficamos com uma impressão de que uma função deve ser sempre dada por uma expressão analítica (uma “lei”), como por exemplo:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3$$

$$g(y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

ou mesmo:

$$h(t) = \cos(2\pi t).$$

Na verdade, há mais de 250 anos esta era a definição de função. Segundo o próprio Leonhard Euler,

“Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma forma, pela variável e por números (ou “constantes”).”

No entanto, no curso de Cálculo vemos que a noção de função como “uma associação dada por uma fórmula” é muito limitada para seus propósitos.

A noção atual de função, no entanto, vai muito além das definidas por Euler, como vimos nas AGENDA 01. As funções definidas implicitamente nos ajudam a dissipar esta “impressão” errada que temos de função, conforme veremos na seção seguinte.

4 Funções Implícitas

Motivação: Na Geometria Analítica frequentemente encontramos curvas representadas sob a forma $F(x, y) = 0$ para alguma função $F :]a, b[\times]c, d[\subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Por exemplo, temos:

uma reta é dada pela equação: $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$

uma circunferência é dada pela equação: $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$

e assim por diante. Em alguns casos podemos “isolar” uma variável em termos da outra, mas em muitos casos isto não é possível. A seguir definimos o que entendemos por uma **função definida implicitamente por uma equação**.

Definição 15 (função dada implicitamente) *Sejam $I, J \subseteq \mathbb{R}$ dois intervalos (abertos, fechados, semi-abertos, limitados ou ilimitados). Seja $F : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis. Dizemos que **a equação**:*

$$F(x, y) = 0$$

define implicitamente uma função $y = y(x)$ se, e somente se:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in I \times J \mid F(x, y) = 0\}$$

for uma função de domínio I e contradomínio J - ou seja, se, e somente se para todo $x \in I$ existir um, e somente um $y = y(x) \in J$ tal que:

$$F(x, y) = F(x, y(x)) = 0.$$

*Por outro lado, dizemos que **a equação**:*

$$F(x, y) = 0$$

define implicitamente uma função $x = x(y)$ se, e somente se:

$$\mathcal{F} = \{(y, x) \in J \times I \mid F(x, y) = 0\}$$

for uma função de domínio J e contradomínio I - ou seja, se, e somente se para todo $y \in J$ existir um, e somente um $x = x(y) \in I$ tal que:

$$F(x, y) = F(x(y), y) = 0.$$

Definição 16 (Função Algébrica) *Chamamos de **função algébrica** a toda função definida implicitamente por uma equação da forma:*

$$p_0(x) \cdot y^n + p_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x) \cdot y + p_n(x) = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $(\forall i \in \{0, 1, \dots, n\})(p_i(x) \text{ é um polinômio})$.

Exemplos e Contraexemplos:

(a) Toda função algébrica é definida implicitamente por uma equação $F(x, y) = 0$, onde:

$$\begin{array}{ccc} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & p_0(x) \cdot y^n + p_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x) \cdot y + p_n(x) \end{array}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $(\forall i \in \{0, 1, \dots, n\})(p_i(x) \text{ é um polinômio})$.

(b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. A função:

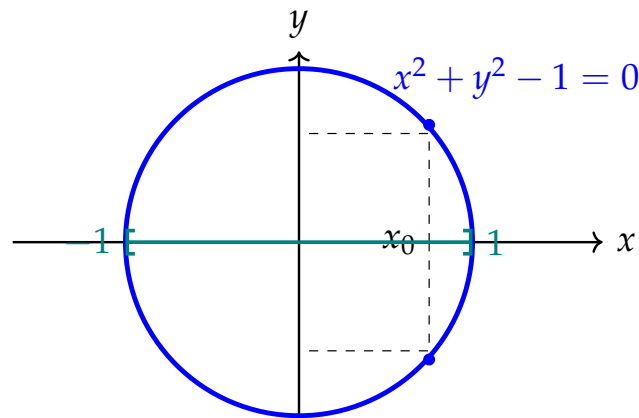
$$\begin{aligned} F: \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto a \cdot x + b \cdot y + c \end{aligned}$$

define, implicitamente mediante a equação $F(x, y) = ax + by + c = 0$, uma função y em termos de x se tivermos $b \neq 0$ e uma função x em termos de y , se $a \neq 0$. Com efeito, dado $x \in \mathbb{R}$, existe um único $y \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, a saber, $y = \frac{1}{b} \cdot (c - a \cdot x)$. Por outro lado, se $a \neq 0$, dado $y \in \mathbb{R}$ existe um único x tal que $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, a saber $x = \frac{1}{a} \cdot (c - b \cdot y)$.

Geometricamente temos uma reta - que, contanto que não seja vertical, sempre é gráfico de uma função;

(c) A função:

$$\begin{aligned} F: [-1, 1] \times [-1, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 + y^2 - 1 \end{aligned}$$

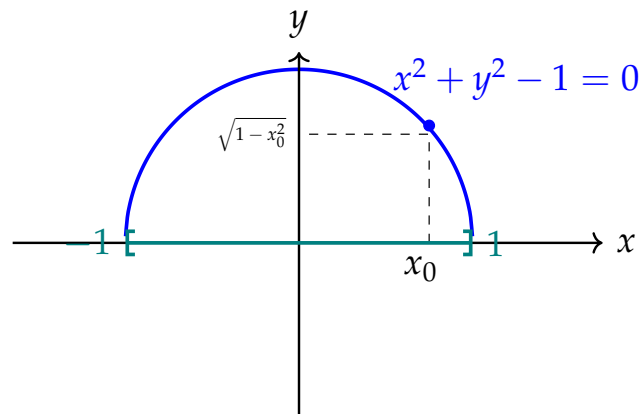


não define, implicitamente, mediante a equação $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, uma função y em termos de x com domínio em $[-1, 1]$ e contradomínio em $[-1, 1]$, ou mesmo uma função x em termos de y . Com efeito, para um dado $x \in]-1, 1[$ existem sempre dois valores de y , $\pm\sqrt{1-x^2}$, que satisfazem $F(x, y) = 0$, ou seja, tem-se: $F(x, -\sqrt{1-x^2}) = 0$ e $F(x, \sqrt{1-x^2}) = 0$. Logo, a relação definida por:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

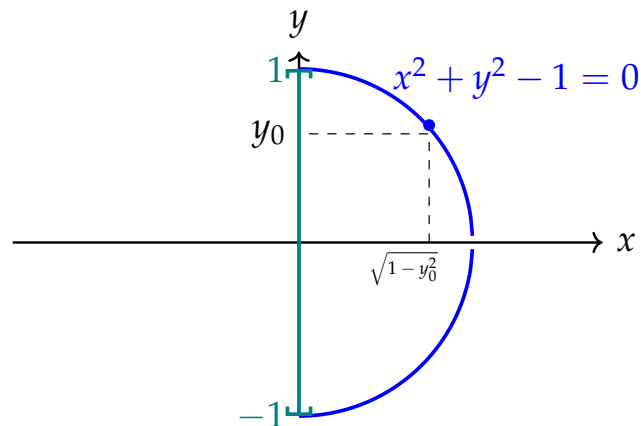
não define uma função $y = y(x)$, de $[-1, 1]$ em $[-1, 1]$. Pode-se verificar, do mesmo modo, que a equação $F(x, y) = 0$ tampouco define uma função $x = x(y)$. Geometricamente, temos que a equação $x^2 + y^2 = 1$ representa uma circunferência unitária centrada na origem - que sabemos não ser gráfico de função.

Não obstante, é fácil verificar que a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define uma função de $[-1, 1]$ em $[0, 1]$, e até mesmo define uma função $y = y(x)$ de $[-1, 1]$ em $[0, -1]$.



Observe, ainda, que a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define implicitamente uma função $x = x(y)$, de $[-1, 1]$ em $[0, 1]$, dada por:

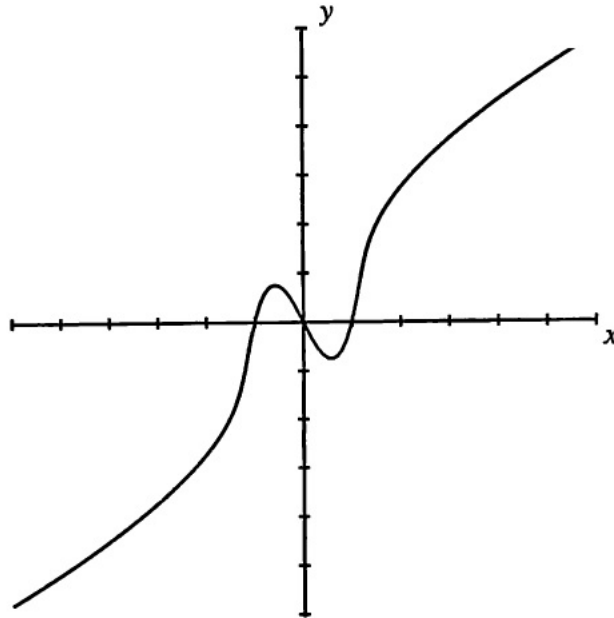
$$\{(y, x) \in [-1, 1] \times [0, 1] \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$



(d) A função:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y^5 + 16y - 32x^3 + 32x \end{aligned}$$

define, implicitamente, mediante a equação $F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$, uma função y em termos de x .



Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fixado, e consideremos a função de y dada por:

$$\begin{array}{rcl} F_{\bar{x}} : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} \end{array}$$

que é tal que:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} = -\infty$$

e:

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} = \infty$$

Dado $M > 0$, existem $N_1, N_2 > 0$ tais que $y > N_1$ implica $F_{\bar{x}}(y) > M$ e $y < -N_2$ implica $F_{\bar{x}}(y) < -M$. Tomemos $y_2 < -N_2$ e $N_1 < y_1$, e teremos:

$$F_{\bar{x}}(y_2) < -M < 0 < M < F_{\bar{x}}(y_1)$$

Desta forma, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, existe algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Finalmente, observe que $F_{\bar{x}}$ é estritamente crescente, ou seja, para quaisquer números $y_1 < y_2$ tem-se:

$$F_{\bar{x}}(y_1) < F_{\bar{x}}(y_2) \text{ (verifique!)}$$

Assim, o $\bar{y}$ tal que $F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ é único.

Segue, portanto, que dado qualquer $\bar{x} \in \mathbb{R}$ existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

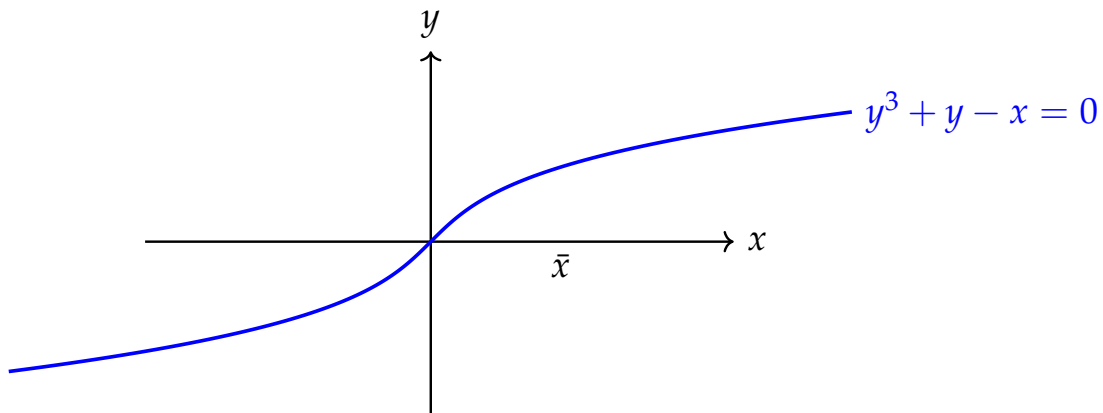
(e) Considere:

$$\begin{aligned} F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto y^3 + y - x \end{aligned}$$

Afirmamos que a equação $F(x, y) = 0$, ou seja:

$$y^3 + y - x = 0$$

define y como função implícita de x .



Para verificar esta afirmação, devemos comprovar que dado $\bar{x} \in \mathbb{R}$ qualquer, existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^3 + \bar{y} - \bar{x} = 0$.

Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fixado, e considere:

$$\begin{aligned} F_{\bar{x}} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ y &\mapsto y^3 + y - \bar{x} \end{aligned}$$

Verifica-se que $F_{\bar{x}}$ é estritamente crescente e que:

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \rightarrow -\infty} y^3 + y - \bar{x} = -\infty$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \rightarrow \infty} y^3 + y - \bar{x} = \infty$$

Em virtude disto, dado $M > 0$, existem $N_1, N_2 > 0$ tais que $y > N_1$ implica $F_{\bar{x}}(y) > M$ e $y < -N_2$ implica $F_{\bar{x}}(y) < -M$. Tomemos $y_2 < -N_2$ e $N_1 < y_1$, e teremos:

$$F_{\bar{x}}(y_2) < -M < 0 < M < F_{\bar{x}}(y_1)$$

Desta forma, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, existe algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Como para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$ existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^3 + \bar{y} - \bar{x} = 0$, e portanto y é uma função de x definida implicitamente pela equação $y^3 + y = x$.

5 Derivação de Funções Definidas Implicitamente por uma Equação

Em muitos casos, dada uma equação da forma $F(x, y) = 0$, é possível explicitar y como função de x , de modo que o processo de derivação de y com respeito a x é dado pelo limite do quociente da razão incremental. Por exemplo, as equações

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$

$$y + \sin(x) - 2 = x \Rightarrow y = x + 2 - \sin(x)$$

definem explicitamente y como função de x .

No entanto, se tivermos as equações:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - x - y = 0$$

ou:

$$a^y - y + 2x = 3$$

é impossível explicitar y em termos de x .

Nestes casos, a fim de obter uma expressão que defina $y'(x)$, consideramos a expressão como $F(x, y(x)) = 0$ e a derivamos utilizando as regras de derivação já conhecidas, ou seja, as regras da soma, diferença, produto, quociente e, sempre que derivarmos y devemos ter em mente que y é uma função de x e usar sempre a **Regra da Cadeia**.

Exemplo 17 Calcular a derivada da função y dada implicitamente pela equação:

$$y^3 + y = x$$

Solução: derivamos os dois membros da igualdade:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Usamos as propriedades operatórias da derivação (regras da soma e da cadeia) para obter:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y) = \frac{d}{dx}(y^3(x)) + \frac{d}{dx}(y(x)) = 3y(x)^2 \cdot y'(x) + y'(x) = 1$$

Finalmente isolamos (quando possível) y' :

$$y'(x) = \frac{1}{3y(x)^2 + 1}$$

Exemplo 18 Calcular a derivada da função y dada implicitamente pela equação:

$$y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$$

Solução: derivamos os dois membros da igualdade:

$$\frac{d}{dx}(y^5 + 16y - 32x^3 + 32x) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

Usamos as propriedades operatórias da derivação (regras da soma e da cadeia), sempre tendo em mente que y é uma função de x , para obter:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^5) + \frac{d}{dx}(16y(x)) - \frac{d}{dx}(32x^3) + \frac{d}{dx}(32x) = 0 \quad (1)$$

Pela **Regra da Cadeia** temos:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^5) = 5 \cdot y(x)^4 \cdot y'(x)$$

Temos, também:

$$\frac{d}{dx}(16 \cdot y(x)) = 16 \cdot \frac{d}{dx}(y(x)) = 16 \cdot y'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(32x^3) = 32 \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = 32 \cdot (3 \cdot x^2) = 96x^2$$

$$\frac{d}{dx}(32x) = 32 \cdot \frac{d}{dx}(x) = 32$$

Assim, a equação (1) fica:

$$5 \cdot y(x)^4 \cdot y'(x) + 16 \cdot y'(x) - 96 \cdot x^2 + 32 = 0$$

donde tem-se:

$$[5 \cdot y(x)^4 + 16] \cdot y'(x) = 96x^2 - 32$$

e como para qualquer $x \in \mathbb{R}$ $5y(x)^4 + 16 \geq 16 > 0$, segue que:

$$y'(x) = \frac{96x^2 - 32}{5y(x)^4 + 16}$$

6 Derivada de Função Inversa

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow B \subseteq \mathbb{R}$ uma função bijetora, e seja $g : B \rightarrow A$ a sua inversa, de modo que:

$$(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$$

Se supusermos g derivável em $x \in B$ e f derivável em $g(x)$ e tal que $f'(g(x)) \neq 0$, ao derivar ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(\text{id}_B(x)) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Pela **Regra da Cadeia**, segue que:

$$f'(g(x)) \cdot g'(x) = 1$$

e portanto:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Como $g = f^{-1}$, temos:

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

Exemplo 19 Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural. Sabemos que a inversa da função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é a inversa de $f(x) = x^n$, cuja derivação já conhecemos. Pela fórmula dada no teorema anterior, segue que:

$$\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n \cdot g(x)^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Exemplo 20 Calcular a derivada da função:

$$\begin{array}{ccc} \arcsin : & [-1, 1] & \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto \arcsin(x) \end{array}$$

Solução: Aplicando a fórmula deduzida, temos:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{(\sin(\arcsin(x)))'} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Para obtermos uma expressão mais “agradável” da derivada da função arco-seno, nos utilizamos das identidades trigonométricas relacionando seno e cosseno. Sabe-se que:

$$(\forall z \in \mathbb{R})(\cos(z) = \sqrt{1 - \sin^2(z)})$$

e portanto:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Do item (b) do exercício 1 da LISTA DE EXERCÍCIOS 5 segue que $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$.

Exemplo 21 Calcular a derivada de:

$$\begin{array}{ccc} \arctan : & \mathbb{R} & \rightarrow \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto \arctan(x) \end{array}$$

Solução: Sabe-se que a função acima é invertível e que sua inversa é:

$$\begin{array}{ccc} \tan : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow \mathbb{R} \\ & x & \mapsto \tan(x) \end{array}$$

Assim, para avaliarmos a derivada de arctan basta tomarmos:

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{(\tan(\arctan(x)))'} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

Sabe-se, no entanto, que:

$$\sec^2(z) = 1 + \tan^2(z)$$

de modo que:

$$\sec^2(\arctan(x)) = 1 + (\tan(\arctan(x)))^2 = 1 + x^2$$

e portanto:

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + x^2}$$

References

- [1] ALMAY, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.
- [2] ÁVILA, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.
- [3] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] KRANTZ, S.G., PARKS, H. R., **The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications**, Volume I, 5^a edição. Editora Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, 2015.