

MAT 2453 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

1º SEMESTRE DE 2025

AGENDA 10

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos algumas aplicações do conceito de derivada a problemas matemáticos: apresentamos uma técnica, na verdade, muito simples de se calcular limites de quocientes de funções com certas indeterminações - as chamadas “regras de L’Hospital”, damos o conceito e a definição precisos de pontos de máximo e de mínimo globais e locais, e apresentamos o conceito de ponto crítico, muito útil para o estudo dos máximos e mínimos locais que veremos em aulas posteriores.

1 Regras de L’Hospital¹.

Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a, b[$, tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Nesta seção apresentaremos, dentre outras coisas, um método para calcular:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

*jeancb@ime.usp.br

¹Guillaume François Antoine (1661-1704), Marquês de L’Hospital, foi um matemático francês. Em 1696, L’Hospital publicou seu livro *Analyse des Infiniment Petits pour l’Intelligence des Lignes Courbes* (“Cálculo Infinitesimal com Aplicações em Linhas Curvas”). Este foi o primeiro livro-texto sobre Cálculo Infinitesimal e apresentou as idéias do Cálculo Diferencial e suas aplicações à Geometria Diferencial de curvas de forma lúcida e com numerosas figuras ([4])

fazendo uso de derivadas. Estes métodos que apresentaremos são denominados **Regras de L'Hospital**.

Teorema 1 (Regra de L'Hospital). *Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a, b[$, tais que:*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0.$$

Então, se $g'(x_0) \neq 0$ e se existir $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, vale:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração. Tendo em mente que as funções são contínuas em x_0 , tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0) = 0.$$

Desta forma, tem-se:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - 0}{g(x) - 0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{g(x) - g(x_0)} \cdot \frac{x - x_0}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}{\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \end{aligned}$$

sempre que pudermos garantir que $g'(x_0) \neq 0$. Assim, temos a seguinte regra para o cálculo do limite sempre que $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ forem contínuas e deriváveis em x_0 , com $g'(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Exemplo 2. *Calcular:*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}$$



Figura 1: "Rápido, mande-o ao L'Hospital!"

Solução: As funções $\sin, \text{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ são ambas contínuas e deriváveis em $x_0 = 0$. Ademais,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Usando a regra deduzida acima, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{(\sin(x))'}{(x)'} \Big|_{x=0} = \frac{\cos(x)}{1} \Big|_{x=0} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemplo 3. Calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2}$$

Solução: As funções $x \mapsto 1 - x + \ln(x)$ e $x \mapsto x^3 - 3x + 2$ são ambas contínuas em um intervalo fechado contendo 1, digamos $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, e deriváveis $x_0 = 1$. Ademais,

$$\lim_{x \rightarrow 1} (1 - x + \ln(x)) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 3x + 2) = 0.$$

Usando a regra deduzida acima, segue que:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(1 - x + \ln(x))'}{(x^3 - 3x + 2)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1 + \frac{1}{x}}{3x^2 - 3} \right)$$

Como $\lim_{x \rightarrow 1} \left(-1 + \frac{1}{x}\right) = 0$ e $\lim_{x \rightarrow 1} (3x^2 - 3) = 0$, e ambas as funções são contínuas em um intervalo fechado contendo 1, digamos $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, e deriváveis em $x_0 = 1$, tem-se, pela regra deduzida:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{-1 + \frac{1}{x}}{3x^2 - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{6x} = -\frac{1}{6}$$

A regra deduzida acima denomina-se **Regra de L'Hospital**. Esta regra pode ser estendida para outros casos, conforme veremos posteriormente.

Corolário 4. Suponha que f seja contínua em x_0 e que $f'(x)$ exista para todo x pertencente a um intervalo aberto contendo x_0 exceto, possivelmente, em x_0 . Suponha, além disto, que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$. Então existe $f'(x_0)$ e, em particular, f' é contínua em x_0 .

Demonstração. Considere as funções $h(x) = f(x) - f(x_0)$ e $g(x) = x - x_0$, de modo que temos:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) - f(x_0) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Aplicando a **Regra de L'Hospital**, tem-se:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \stackrel{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x)$$

o que prova que f' é contínua em x_0 . □

Teorema 5 (Regra de L'Hospital, versão 2). Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a, b[$, tais que existe $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0.$$

Então:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Efetuando a mudança de variável $y = \frac{1}{x}$ e observando que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} y = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0, \quad \text{por valores sempre maiores que } 0.$$



Figura 2: Cálculo 1 // Regra de L'Hospital // Estudantes do Primeiro Ano

segue que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right) \cdot \left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{y \rightarrow 0_+} \frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)} x = \frac{1}{y} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

□

Exemplo 6. Calcular, usando a regra de L'Hospital:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

Solução: Primeiramente precisamos transformar a expressão $x \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right)$ no quociente de duas expressões cujo limite no infinito seja 0. Expressamos:

$$x \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

onde tem-se:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{x}\right) = \sin(0) = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$$

Agora aplicamos a regra de L'Hospital, tendo em vista que:

$$\left(\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)' = \cos\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(\frac{2}{x}\right)' = \cos\left(\frac{2}{x}\right) \cdot \left(-\frac{2}{x^2}\right) = -\frac{2}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

e que:

$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$

segue que:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \sin\left(\frac{2}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-\frac{2}{x^2} \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} 2 \cdot \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{2}{x}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

1.1 Indeterminações

A seguir definimos o que entendemos por “indeterminações”. Atente para o fato de que as expressões simbólicas **não** têm significado aritmético, ou seja, **não são números**. A classificação das indeterminações obtidas em limites de quocientes de funções nos permitem enunciar **Regras de L'Hospital** de um modo mais prático. Assim, na seção anterior, apresentamos regras de L'Hospital para a **indeterminação** $\frac{0}{0}$.

Definição 7. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $x_0 \in]a, b[$ tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma **indeterminação do tipo** $\frac{0}{0}$.

Definição 8. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\setminus \{x_0\}$ tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma **indeterminação do tipo** $\frac{\infty}{\infty}$.

Definição 9. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\setminus \{x_0\}$ tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma **indeterminação do tipo** $\frac{-\infty}{\infty}$.

Definição 10. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\setminus \{x_0\}$ tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma **indeterminação do tipo** $\frac{\infty}{-\infty}$.

Definição 11. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\setminus \{x_0\}$ tais que:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = -\infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma **indeterminação do tipo** $\frac{-\infty}{-\infty}$.

Podemos, facilmente, obter as **Regras de L'Hospital** correspondentes às indeterminações:

$$\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$$

Teorema 12 (Regras de L'Hospital para indeterminações dos tipos $\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$). Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto, $x_0 \in \text{int}(A)$, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em x_0 tais que $(\forall x \in A)(g(x) \neq 0)$. Então, se:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \pm\infty$$

e se existe:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema 13 (Regras de L'Hospital para indeterminações dos tipos $\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$ para $x \rightarrow \pm\infty$). Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado superiormente, $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ funções deriváveis em $\text{int}(A)$ tais que $(\forall x \in A)(g(x) \neq 0)$. Então, se:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \pm\infty \text{ e } \lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

e se existe:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Observação: Nos séculos XVII e XVIII, o nome era pronunciado comumente como “l’Hospital”, e o próprio matemático o pronunciava desta forma. No entanto, a pronúncia francesa foi alterada: o “s” mudo foi removido e substituído por um “ô”. Desta forma, é comum encontrar variantes do nome, como “L’Hôpital”, por exemplo. ^a

^aFonte: <https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/lhospitalsrule.aspx>



Which one is correct?

Figura 3: “Qual está correto?”

2 Extremantes Globais e Locais

Podemos utilizar as derivadas para determinar partes do domínio de uma função em que ela é crescente, decrescente, ou mesmo assume um máximo ou mínimo.

Definição 14 (ponto de máximo global). Dada uma função qualquer $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, dizemos que x_0 é **um ponto de máximo global** de f se, e somente se, $f(x_0)$ for o maior valor assumido pela função em todo o seu domínio, ou seja:

$$(\forall x \in D)(f(x) \leq f(x_0)).$$

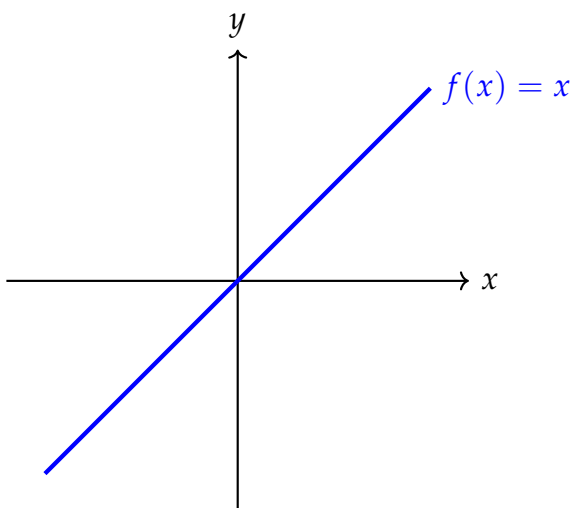
Analogamente, temos a seguinte:

Definição 15 (ponto de mínimo global). Dada uma função qualquer $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, dizemos que $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ é **um ponto de mínimo global** de f se, e somente se, $f(x_0)$ for o menor valor assumido pela função em todo o seu domínio, ou seja:

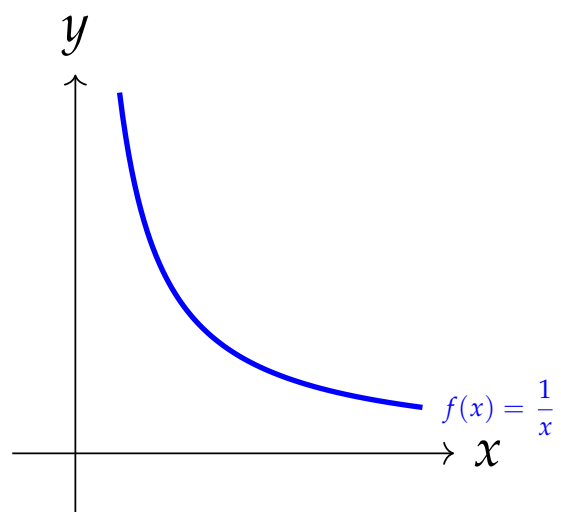
$$(\forall x \in D)(f(x_0) \leq f(x)).$$

Nem toda função admite ponto de máximo global ou de mínimo global, como é o caso das seguintes funções:

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x \end{array}$$

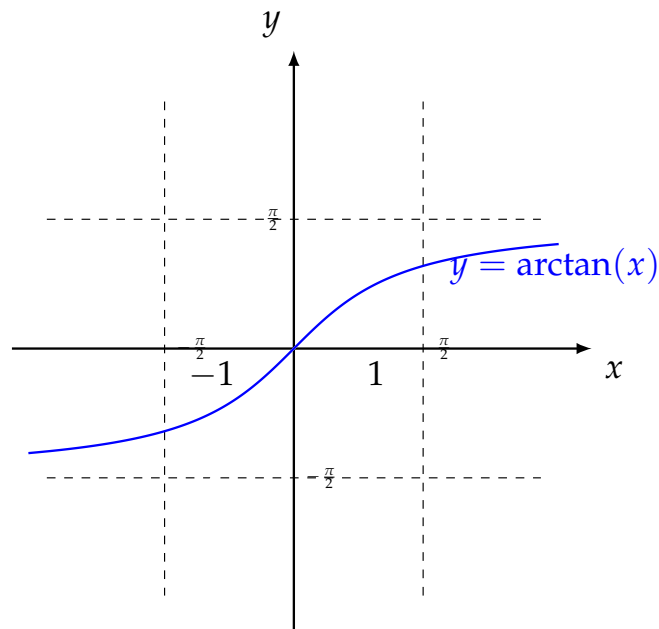


$$\begin{array}{lcl} g: \mathbb{R}_+^* & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$



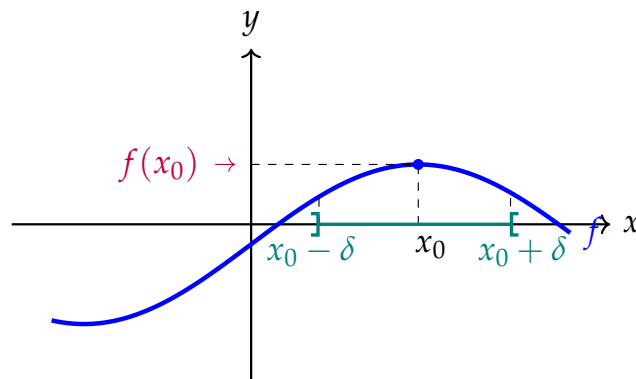
e:

$$\begin{array}{lcl} \arctan: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$



Definição 16 (máximo local). Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0 é um **ponto de máximo local** se, e somente se, existir $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)(f(x) \leq f(x_0))$$



Teorema 17. Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 . Se f assume um valor máximo em x_0 então $f'(x_0) = 0$.

Demonstração. Tomemos $\delta > 0$ de tal modo que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$.

Para qualquer Δx tal que $0 < |\Delta x| < \delta$, tem-se $x_0 + \Delta x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$, e como x_0 é um ponto de máximo, vale:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

Segue portanto que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \text{ se } \Delta x > 0$$

e que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \text{ se } \Delta x < 0$$

Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

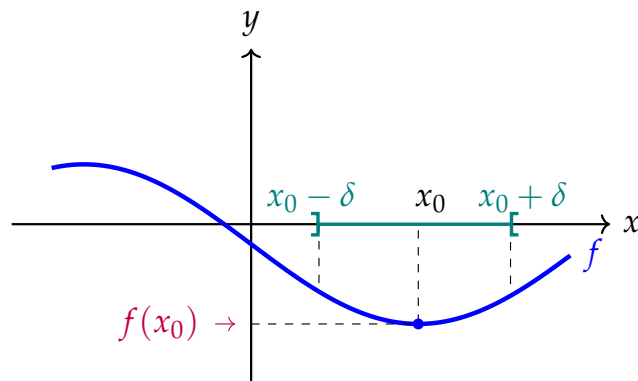
Por hipótese, no entanto, f é derivável em x_0 , de modo que:

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

e portanto $f'(x_0) = 0$. □

Definição 18 (mínimo local). *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0 é um ponto de mínimo local se, e somente se, existir $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)(f(x_0) \leq f(x))$$



Teorema 19. *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 . Se f assume um valor mínimo em x_0 então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Tomemos $\delta > 0$ de tal modo que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$.

Para qualquer Δx tal que $0 < |\Delta x| < \delta$, tem-se $x_0 + \Delta x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$, e como x_0 é um ponto de máximo, vale:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$$

Segue portanto que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \text{ se } \Delta x > 0$$

e que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \text{ se } \Delta x < 0$$

Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x < 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

Por hipótese, no entanto, f é derivável em x_0 , de modo que:

$$0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$$

e portanto $f'(x_0) = 0$. □

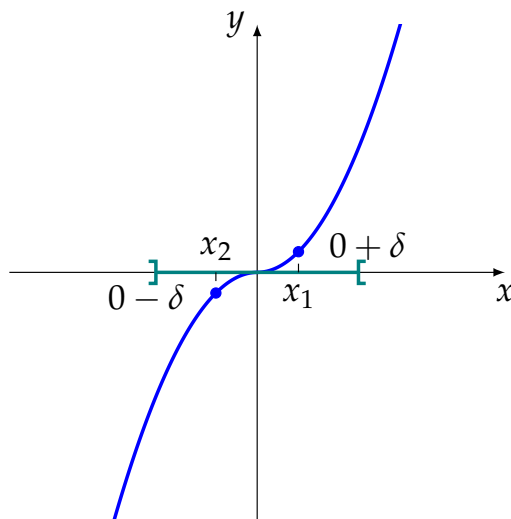
Observe, no entanto, que a recíproca é falsa, uma vez que existem pontos onde a derivada se anula que não são nem pontos de máximo local nem pontos de mínimo local, conforme ilustra o seguinte exemplo:

Exemplo 20. *Considere a função $f(x) = x^3$, da qual tem-se:*

$$f'(x) = 3 \cdot x^2$$

e portanto $f'(0) = 0$. No entanto 0 não é ponto de máximo local, uma vez que para qualquer $\delta > 0$, $] - \delta, \delta[$ contém sempre um número positivo - digamos $x_1 > 0$ com $0 < x_1 < \delta$, de modo que

$f(0) \leq f(x_1) = x_1^3$. 0 tampouco pode ser ponto de mínimo local, uma vez que para qualquer $\delta > 0$, $] - \delta, \delta[$ contém algum número negativo - digamos $x_1 < 0$ com $-\delta < x_2 < 0$, de modo que $x_2^3 = f(x_2) \leq 0 = f(0)$. Logo 0 não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo. Neste caso dizemos que $x = 0$ é um ponto de inflexão, ou seja, um ponto onde a “concavidade” do gráfico muda.



Definição 21 (ponto crítico). Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \text{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0 . Diz-se que x_0 é um **ponto crítico de f** se, e somente se $f'(x_0) = 0$.

Assim, se $f : D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $x_0 \in \text{int}(D)$, os **Teoremas 17 e 19** podem ser reformulados como segue:

Se x_0 é ponto de máximo local ou mínimo local de f então $f'(x_0) = 0$.

No entanto, conforme ilustra o **Exemplo 20**, a recíproca é falsa, ou seja:

Se $f'(x_0) = 0$ não podemos garantir que o ponto x_0 seja um máximo ou um mínimo local.

Os resultados apresentados nesta seção nos fornecem um método que nos ajuda a determinar pontos de máximo e de mínimo (globais) de uma função, como segue:

- (1) Encontrar os pontos em que a derivada não existe e calcular a função nestes pontos;
- (2) Encontrar os pontos críticos da função e calcular a função nestes pontos;
- (3) Determinar $f(a)$ e $f(b)$.

O **maior** valor encontrado nos passos (1), (2) e (3) será o **máximo global** da função, e o **menor** valor encontrado nos passos (1),(2) e (3) será o **mínimo global** da função.

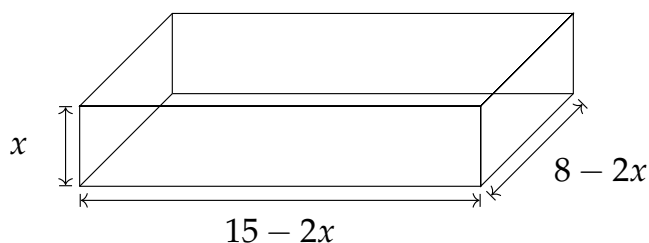
Vamos aplicar estes passos para resolver o seguinte problema:

Exemplo 22. *Um fabricante de caixas de papelão quer utilizar folhas de papelão medindo 8dm por 15dm, cortando quadrados nos quatro cantos da folha e dobrando-os para cima. Qual o tamanho do quadrado a ser retirado de maneira que a caixa sem tampa tenha o maior volume possível?*

Solução: Seja x a altura da caixa, de modo que a área da base da caixa será $(15 - 2x) \cdot (8 - 2x) = 120 - 30x - 16x + 4x^2$, ou seja, Área da base = $4x^2 - 46x + 120$. O volume da caixa será, portanto:

$$V(x) = x \cdot \text{Área da base} = x \cdot (4x^2 - 46x + 120) = 4x^3 - 46x^2 + 120x$$

O próprio problema impõe que devemos tomar $x \in [0, 4]$.



Neste caso, como o volume é uma função polinomial de x , a função volume admite derivada em todos os pontos de $]0, 4[$ - o que nos dispensa de levar a cabo o passo (1). Em seguida, seguindo o Passo (2), procuramos os pontos críticos de $V(x)$, procurando os valores de $x \in]0, 4[$ tais que:

$$V'(x) = 0$$

ou seja, tais que:

$$V'(x) = 12x^2 - 92x + 120 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática, obtemos duas soluções:

$$x = \frac{5}{3} \text{ e } x = 6.$$

Imediatamente descartamos $x = 6$, por não pertencer ao domínio de V , de modo que nos resta a solução $x = \frac{5}{3}$. Calculamos o valor da função V no ponto crítico:

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{27} \approx 90.741 \text{ dm}^3$$

Tendo em conta que $V(0) = V(4) = 0$, segue que o tamanho do quadrado a ser retirado a fim de que o volume da caixa seja máximo é de $\frac{25}{9} \text{ dm}^2$.

3 Taxa de Variação Pontual

Como vimos, a derivada de uma função f em um ponto x_0 é definida tomando primeiramente a razão incremental:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Esta razão também é chamada de *taxa média de variação* da função f no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ela mede, por assim dizer, a “rapidez” com que a função varia quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$. Dizemos “rapidez” (entre aspas) porque o termo não é apropriado totalmente, senão quando a variável independente é o tempo. Por exemplo, na equação horária do movimento, $s = s(t)$, a velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

que é a taxa média de variação do espaço s entre os instantes t_0 e $t_0 + \Delta t$ indica, efetivamente, a rapidez de variação do deslocamento s entre os referidos instantes.

Do mesmo modo que a razão incremental de uma função f é chamada de taxa média de variação, a derivada $f'(x_0)$ é chamada a *taxa de variação* de f no ponto x_0 .

A taxa de variação instantânea de f por unidade de variação de x em $x = x_0$ é o análogo da velocidade instantânea e tem o seguinte significado: se a função mantivesse sempre a mesma tendência de variação caracterizada pela taxa $f'(x_0)$, então seu gráfico seria a reta tangente à curva f no ponto $(x_0, f(x_0))$, cuja inclinação é $f'(x_0)$.

Seja (x, y) um ponto qualquer dessa tangente, de modo que sua equação é dada por:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ou:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto x_0 , onde a função é derivável, é:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemplo 23. Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y = \sin(x)$ em $x = \frac{\pi}{4}$.

Solução: Aqui tem-se $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Assim, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$, de modo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A equação da reta tangente é, portanto:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 24. Imaginemos um petroleiro avariado, cujo vazamento de óleo cubra uma área circular A de raio r . Com o passar do tempo, estas duas grandezas crescem a taxas que estão relacionadas. De fato, tem-se $A = \pi r^2$. De fato, como $A = \pi \cdot r^2$, tem-se:

$$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi \cdot r^2) = \pi \cdot \frac{d}{dt}(r^2) \text{ Regra da Cadeia } \pi \cdot 2 \cdot r \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot r \frac{dr}{dt}$$

ou ainda:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi \cdot r}$$

Isto nos mostra que, neste fenômeno, o raio r da mancha cresce a uma taxa inversamente proporcional a si mesmo. Por exemplo, se a área cresce, digamos, a uma taxa de 10000m^2 por hora, então:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi \cdot r} = \frac{10000}{6.2832 \cdot r}$$

Agora podemos deduzir a taxa de variação do raio (neste caso, o quanto ele aumenta) com respeito ao próprio raio.

Assim, para $r = 2\text{km}$, este raio estará se expandindo à razão de:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=2} = \frac{50000}{6.2832} \approx 796\text{m/h}$$

Quando r atingir o valor de 4km , a taxa de crescimento do raio terá sido reduzida à metade:

$$\left. \frac{dr}{dt} \right|_{r=4} = \frac{25000}{6.2832} \approx 398\text{m/h}$$

Exemplo 25. Um balão mantém a forma esférica enquanto é inflado. Encontrar a razão de variação instantânea da área superficial em relação ao raio no exato instante em que o raio é 6cm.

Sabe-se que a área da esfera de raio r é $A(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$. Desta forma,

$$\frac{d}{dr}(A(r)) = \frac{d}{dr}(4 \cdot \pi \cdot r^2) = 4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{dr}(r^2) \text{Regra da Cadeia} 4\pi \cdot 2 \cdot r \cdot \frac{dr}{dr} = 8 \cdot \pi \cdot r$$

Desta forma, quando $r = 6\text{cm}$, temos $dA/dr(6) = 8 \cdot \pi \cdot 6 = 48 \cdot \pi \text{cm}^2/\text{cm}$.

Exemplo 26. Acumula-se areia em um monte de forma cônica a uma razão de $10\text{dm}^3/\text{min}$. Se a altura do monte é sempre igual a duas vezes o raio da base, a que razão cresce a altura do monte quando a altura é de 8dm?

O volume do monte é dado por:

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como a altura é sempre o dobro do raio, temos $r = h/2$, de modo que:

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot h^3$$

Desta forma, se considerarmos o raio e a altura como funções do instante t , $r = r(t)$ e $h = h(t)$, seguir-se-á, pela **Regra da Cadeia**, que:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

de modo que quando $dV/dt = 10\text{dm}^3/\text{min}$ e $h = 8$, teremos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{8\pi} \text{dm/min}$$

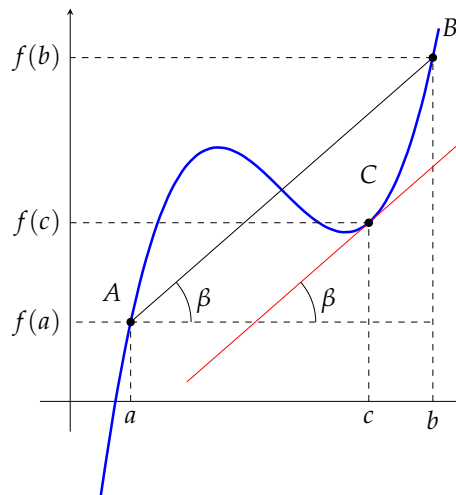
4 O Teorema do Valor Médio e suas Consequências

Veremos agora um teorema de importância fundamental conhecido como **Teorema do Valor Médio**. Ele possui um conteúdo geométrico muito sugestivo, que merece ser analisado antes mesmo que enunciemos o teorema. Para isso, consideremos uma função f e dois pontos sobre seu gráfico:

$$A = (a, f(a)) \text{ e } B = (b, f(b)).$$

O declive da secante AB é dado por:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



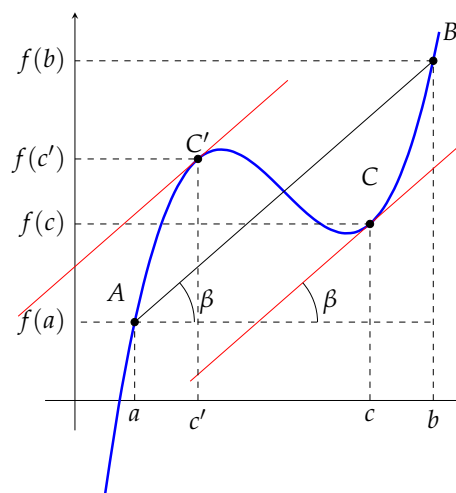
A figura acima nos sugere que entre A e B deve haver algum ponto $C = (c, f(c))$ sobre o gráfico, onde a reta tangente à curva seja paralela à secante AB . Desta forma, os declives da reta secante e da reta tangente (em vermelho) serão iguais. Como o declive da reta tangente é $f'(c)$,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c),$$

ou ainda:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \quad (1)$$

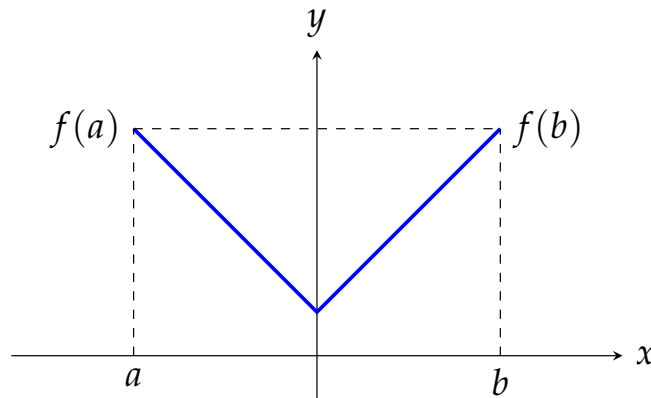
Observamos que o valor c , entre a e b , satisfazendo (1), pode não ser único, conforme ilustra a figura a seguir:



em que há dois pontos c, c' entre a e b satisfazendo (1). Assim, neste caso há duas abscissas c, c' tais que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = f'(c') \cdot (b - a).$$

Pode acontecer, também, que não haja ponto nenhum nas condições citadas, como vemos a seguir:



No caso particular em que $f(a) = f(b)$, (1) se reduz a $f'(c) = 0$. Este resultado é conhecido como o **Teorema de Rolle**, que enunciamos a seguir:

Teorema 27 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função derivável em $\text{int}([a, b]) =]a, b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Pode acontecer que f tenha valor constante, $(\forall x \in [a, b])(f(a) = f(x) = f(b))$; Neste caso, tem-se a função constante e $f' :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ é identicamente nula - e o teorema é trivialmente satisfeito.

Se f não é constante, ela terá que assumir valores maiores ou menores que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo f contínua em um intervalo fechado, $[a, b]$, pelo **Teorema de Weierstraß** f assume um valor máximo e um valor mínimo neste intervalo.

Se f assumir valores maiores que $f(a)$, então f terá um ponto de máximo $x = c$ no intervalo $]a, b[$. Sendo f derivável neste ponto, segue que $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

O caso em que f só assume valores menores que $f(a) = f(b)$ é análogo. □

Teorema 28 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função definida e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. A equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$y = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \cdot (x - a)$$

Definimos agora uma função que mede a distância vertical entre a reta e um ponto do gráfico no ponto de abscissa x :

$$F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) \cdot (x - a) - f(x)$$

Note que F é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, com:

$$F :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) - f'(x)$$

e que $F(a) = F(b) = 0$, de modo que estamos em condições de aplicar o **Teorema de Rolle**, que nos garante que existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $F'(c) = 0$. Mas neste ponto c , tem-se:

$$0 = F'(c) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Exemplo 29. Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ tal que:

$$(\forall x \in]a, b[)(f'(x) = 1).$$

Mostrar que $f(x) = x - a + f(a)$.

Solução: Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe pelo menos um valor $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

Dado um $\bar{x} \in [a, b]$ qualquer fixado, segue do **Teorema do Valor Médio** aplicado a $f \upharpoonright_{[a, \bar{x}]}$ que existe algum $\bar{c} \in]a, \bar{x}[$ tal que:

$$f'(\bar{c}) = \frac{f(\bar{x}) - f(a)}{\bar{x} - a}$$

Por hipótese, no entanto, $f'(\bar{c}) = 1$, de modo que:

$$1 = \frac{f(\bar{x}) - f(a)}{\bar{x} - a}$$

$$f(\bar{x}) = f(a) + \bar{x} - a$$

Assim, dado qualquer $x \in [a, b]$ vale:

$$f(x) = f(a) + x - a$$

5 O Teste da Derivada Primeira

Teorema 30 (Teste da Derivada Primeira). *Seja $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:*

- (1) *Se para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) > 0$, então f é **estritamente crescente** em $[a, b]$;*
- (2) *Se para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) < 0$, então f é **estritamente decrescente** em $[a, b]$;*

Demonstração. Ad (1): Queremos demonstrar que f é crescente em $[a, b]$, ou seja, que dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$, e portanto $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Por hipótese, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, segue que existe pelo menos um $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou seja,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \cdot \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} > 0$$

e assim

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ad (2): Queremos demonstrar que f é estritamente decrescente em $[a, b]$, ou seja, que dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_2) < f(x_1)$, e portanto $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Por hipótese, $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, segue que existe pelo menos um $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou seja,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{<0} \cdot \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} < 0$$

e assim

$$f(x_2) < f(x_1).$$

□

Exemplo 31. Classificar os pontos críticos de $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.

Solução: Observamos que, por ser polinomial, f é derivável em todo seu domínio.

Busquemos os pontos críticos de f , ou seja, vamos procurar os valores de x tais que $f'(x) = 0$, ou seja, tais que:

$$f'(x) = -4x + 3 = 0$$

ou seja, $x = \frac{3}{4}$. Note que:

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, & \text{se } x < \frac{3}{4} \\ = 0, & \text{se } x = \frac{3}{4} \\ < 0, & \text{se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Concluimos que no intervalo $] -\infty, \frac{3}{4}[$ a função é estritamente crescente, enquanto que no intervalo $]\frac{3}{4}, \infty[$ a função é estritamente decrescente. Daí podemos concluir que $x = \frac{3}{4}$ é um ponto de máximo local.

Exemplo 32. Classificar os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.

Solução: Observamos que, por ser polinomial, f é derivável em todo seu domínio.

Busquemos os pontos críticos de f , ou seja, vamos procurar os valores de x tais que $f'(x) = 0$, ou seja, tais que:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

Pela fórmula quadrática encontramos uma única solução, a saber, $x = 1$.

Agora vamos estudar o sinal da derivada para podermos, em seguida, classificar o ponto crítico. Temos:

$$f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 3 \cdot (x - 1)^2,$$

de modo que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f'(x) = 3 \cdot \overbrace{(x - 1)^2}^{\geq 0} \geq 0$. Temos, assim que $x = 1$ não é nem ponto de máximo local nem ponto de mínimo local, uma vez que esta função é não decrescente.

Na próxima aula veremos um método mais prático para classificar pontos críticos.

Referências

- [1] ALMAY, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1ª edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.
- [2] ÁVILA, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.
- [3] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] GUILLAUME FRANÇOIS ANTOINE, MARQUÊS DE L'HÔPITAL. In: WIKIPÉDIA, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021.