

# MAT2453 - Cálculo Diferencial e Integral I

## 1º Semestre de 2025

### Agenda 12

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

## Apresentação

Nesta agenda introduziremos um problema geométrico que motiva a teoria de integração segundo Riemann: calcular a área delimitada pelo gráfico de uma função. Em nosso primeiro caso concreto a analisar, vamos buscar a área da região do plano delimitada pelo eixo  $Ox$ , pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$ , e o processo que utilizaremos é o protótipo do processo de integração de Riemann. Vale observar que existem outros processos de integração, como o de Lebesgue e o de Riemann-Stieltjes, que não serão vistos neste curso.

Na seção 1 calculamos, efetivamente a área referida no parágrafo anterior, resolvendo um problema conhecido como “quadratura” (por ser equivalente a encontrar o lado de um quadrado de mesma área). Na seção 2 apresentamos, com mais rigor, a integral de Riemann, destacando a ideia por detrás do processo de integração. Para facilitar a exposição, apresentamos as somas de Riemann, a soma superior e a soma inferior, com as quais lidamos mais detidamente no Apêndice.

Apresentamos as propriedades da integral de Riemann, como a linearidade, a monotonicidade, a aditividade – entre outras – e apresentamos importantes resultados como o **Teorema da Média**, que nos permitirá provar a parte 1 do **Teorema Fundamental do Cálculo**, que conjuga os problemas da quadratura com o da derivação.

Após provar a primeira parte do **Teorema Fundamental do Cálculo**, apresentamos a definição de “primitiva” de uma função, e provamos uma segunda parte que nos permitirá calcular integrais mediante o uso de primitivas. Apresentamos também os conceitos de “integral indefinida”, provando suas propriedades. Apresentamos, por último o importante **Teorema**

---

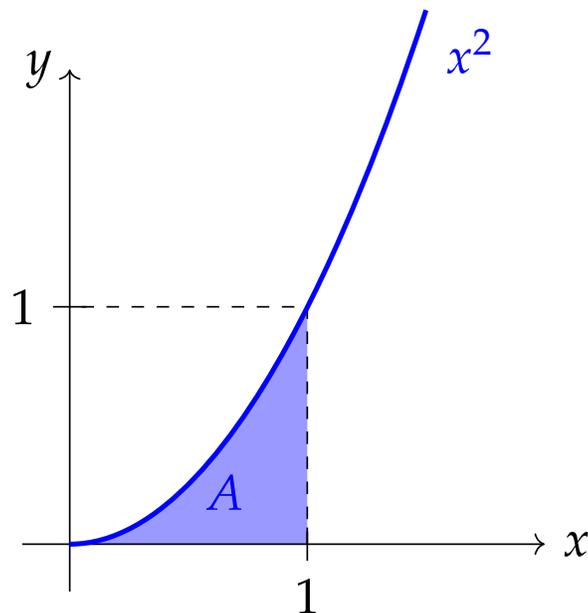
\*jeancb@ime.usp.br

## da Mudança de Variável.

Encerramos apresentando uma tabela de integrais indefinidas, e apresentando um Apêndice para eventuais referências, em benefício do leitor.

# 1 Motivação: O Processo<sup>1</sup>

**Motivação:** Calcular a área  $A$ , compreendida entre a parábola  $y = x^2$ , as retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e o eixo  $Ox$ .



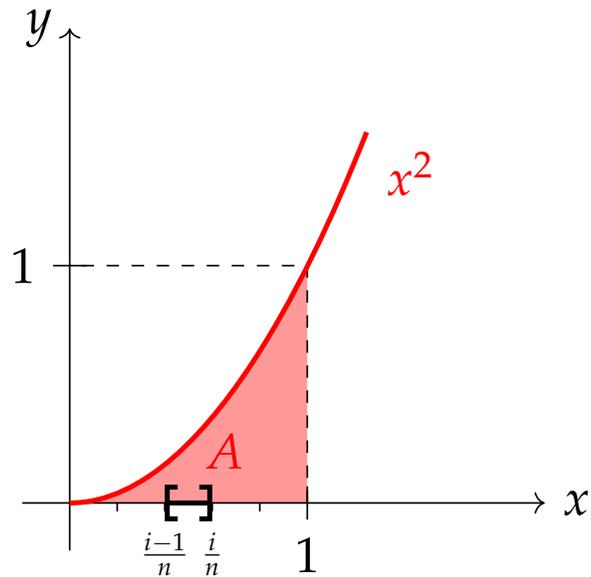
Consideremos a função:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Considere a divisão do intervalo  $[0, 1]$  em  $n$  subintervalos de igual tamanho,  $1/n$ :

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

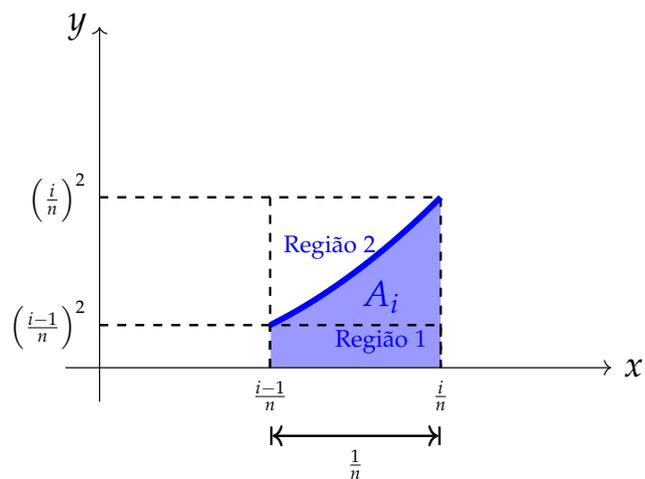
<sup>1</sup>de Integração de Riemann



Note que:

$$(\text{Área da Região 1}) \leq A_i \leq (\text{Área da Região 2})$$

onde as regiões são representadas a seguir:



Mas,

$$\text{Área da região 1} = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(i-1)^2}{n^3}$$

$$\text{Área da região 2} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{i^2}{n^3}$$

e como para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem-se:

$$\frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A_i \leq \frac{i^2}{n^3}$$

segue que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A \leq \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \leq A \leq \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Antes de prosseguir, precisamos do seguinte:

**Teorema 1.** Vale, para qualquer  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , que:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

*Demonstração.* Temos, no mínimo, dois modos de demonstrar a identidade acima: por indução e por indução. Apresentamos a seguir as duas demonstrações, em benefício do leitor.

1º modo: por indução: Para  $n = 2$  temos, naturalmente,

$$\sum_{i=1}^2 i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (4+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot (n-1) + 1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Temos, assim:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}. \end{aligned}$$

2º modo: por dedução:

Temos que  $\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3]$  é, por um lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n [i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$$

e, por outro lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^3 - \sum_{i=1}^n i^3 = (2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = (n+1)^3 - 1$$

de modo que:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 &= (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \\ 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n &= n^3 + 3n^2 + 3n \end{aligned}$$

e assim:

$$\begin{aligned} 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n}{2} - \frac{3n^2 + 3n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \end{aligned}$$

□

Aplicando o que vimos no teorema anterior, chegamos às desigualdades:

$$\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq A \leq \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Agora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[ \frac{(n-1)}{n} \right] \cdot \left[ \frac{2n-1}{n} \right] = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[ \frac{(n+1)}{n} \right] \cdot \left[ \frac{2n+1}{n} \right] = \frac{1}{3}$$

segue do **Teorema do Confronto** que:

$$A = \frac{1}{3}$$

Nestas notas apresentamos as derivadas das funções elementares, definimos funções dadas implicitamente por equações e descrevemos como derivá-las e, em seguida, apresentamos como derivar a inversa de certas funções.

## 2 Integral de Riemann

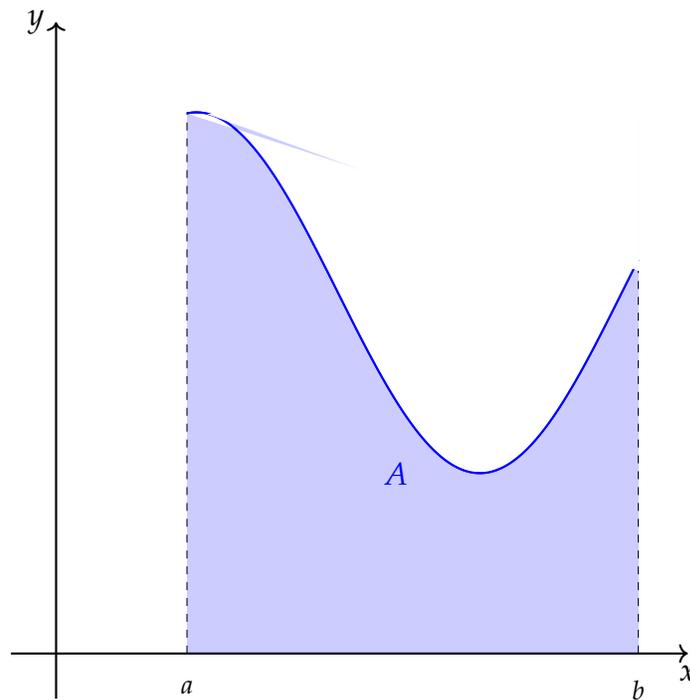
Nesta seção apresentaremos primeiramente a ideia por detrás da definição da integral de Riemann, tendo como motivação o cálculo da área entre o gráfico de certa função e o eixo  $Ox$ .

### 2.1 A ideia do processo de integração de Riemann

**Motivação:** Dada uma função real positiva definida num intervalo fechado  $[a, b]$ , calcular a área da região compreendida entre o gráfico da função e o eixo  $Ox$ .

Considere a função de uma variável real  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , positiva – ou seja,  $(\forall x \in [a, b])(f(x) > 0)$ .

Seja  $A$  a área compreendida entre as retas  $x = a$ ,  $x = b$ , o gráfico de  $f$  e o eixo  $Ox$ , conforme ilustra a figura abaixo:

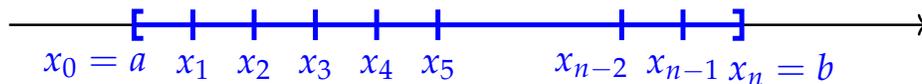


Gostaríamos de “aproximar” o valor da área  $A$ . Procedemos da seguinte maneira:

Seja o conjunto de pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto de pontos acima é chamado uma **partição de  $n + 1$  pontos do intervalo  $[a, b]$** . Os pontos não precisam estar igualmente espaçados.



Considere, agora, o  $i$ -ésimo intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Neste subintervalo consideramos a seguinte aproximação para a área  $A_i$ : escolhemos um ponto  $\xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[$  qualquer e tomamos:

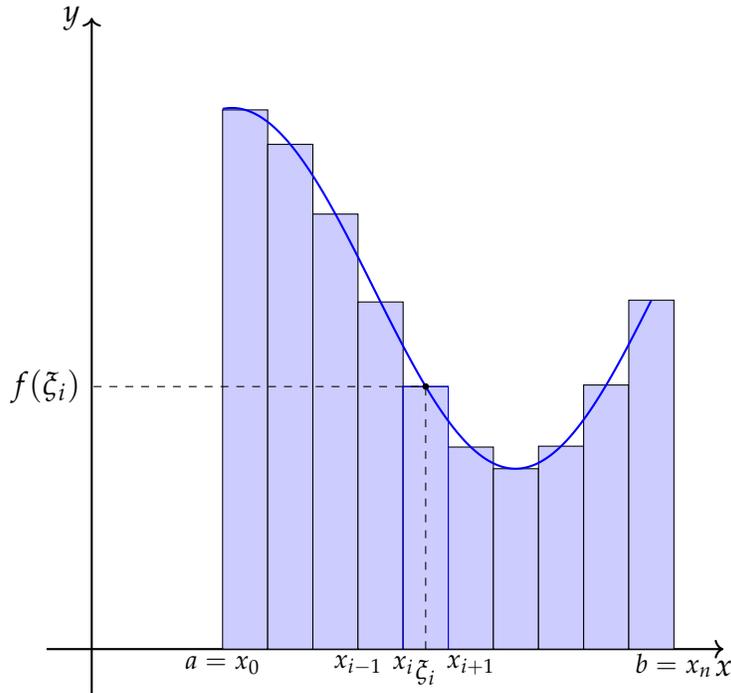
$$A_i \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Desta forma, a aproximação para a área total,  $A$ , seria dada por:

$$A \approx \sum_{i=1}^n A_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Denominando  $x_i - x_{i-1}$  por  $\Delta x_i$ , segue que:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



A área  $A$  é obtida quando o número de subintervalos tende a infinito, ou seja,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Definimos, portanto:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

**Observação 2.** A integral de uma função contínua, não necessariamente positiva, é definida de maneira análoga. A diferença é que atribuímos sinal negativo a áreas abaixo do eixo  $x$  e sinal positivo a áreas acima do eixo  $x$ . Na figura abaixo, por exemplo, temos:

$$\int_a^{c_1} f(x) dx > 0, \quad \int_a^{c_2} f(x) dx < 0, \quad \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx > 0 \quad e \quad \int_{c_3}^b f(x) dx < 0$$

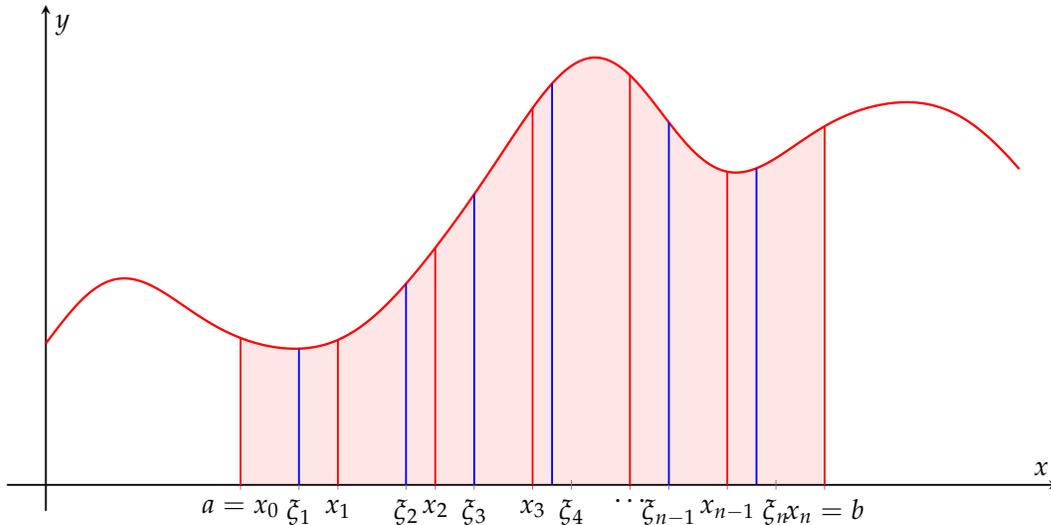
## 2.2 Somas de Riemann

Sejam  $f : [a, b] = R \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  uma partição de ordem  $n$  de  $[a, b]$ , Seja, para  $i \in \{0, \dots, n\}$ ,  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  o  $i$ -ésimo

subintervalo determinado por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ . Escolhendo um ponto  $\zeta_i \in [x_i, x_{i+1}] = I_i$  qualquer, formamos a soma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Uma soma deste tipo é chamada **soma de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]$** .



**Definição 3.** Se qualquer sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  de somas de Riemann da função  $f$  (independentemente da escolha que fizermos de  $\zeta_i$  no intervalo  $[x_i, x_{i+1}]$ ) tem limite  $s \in \mathbb{R}$  conforme  $n \rightarrow \infty$ , isto é, se:

$$\exists s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i,$$

dizemos que  $f$  é **Riemann-integrável sobre  $[a, b]$** , e escrevemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\zeta_i) \Delta x_i$$

A demonstração do resultado a seguir será dada posteriormente.

**Teorema 4.** Toda função **contínua** definida em um intervalo fechado e limitado, da forma  $[a, b]$ , é Riemann-integrável.

O teorema acima nos diz, entre outras coisas, que sempre que  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, o limite das somas de Riemann conforme  $n \rightarrow \infty$  existirá independentemente da

escolha que fizermos de  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Há uma condição menos restritiva que uma função definida em um intervalo deve satisfazer a fim de ser Riemann-integrável, como mostra o seguinte:

**Teorema 5.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ :*

$$\text{Desc}(f) = \{x_0 \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } x_0\}$$

*pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então  $f$  é Riemann-integrável sobre  $[a, b]$ .*

Sejam  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva,  $W$  a região do espaço delimitada por cima pelo gráfico de  $f$ , por baixo pelo eixo  $Ox$  e pelos lados pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Se tomarmos  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  como sendo um ponto de máximo de  $f$ , então  $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$  representa a área do retângulo de base  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura  $f(\bar{x}_i)$ . A soma:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

é denominada “**a soma superior de  $f$** ” representa a área do retângulo circunscrito à região  $W$ . Analogamente, se tomarmos  $\underline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  como sendo um ponto de mínimo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , então a soma:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\underline{x}_i)\Delta x_i$$

é denominada a “**soma inferior de  $f$** ” representa a área da região inscrita à região  $W$ .

Pelo **Teorema 4**, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

mostrando que as áreas das regiões circunscritas e inscritas tendem para o mesmo valor  $s$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, a região  $W$  tem uma área finita e igual a  $s$ .

## 2.3 Propriedades da Integral de Riemann

**Teorema 6 (Linearidade).** *Sejam  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções Riemann-integráveis. Então a função:*

$$\alpha \cdot f + \beta \cdot g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x)$$

é Riemann-integrável em  $[a, b]$  e vale:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$  uma partição de ordem  $n$  do intervalo  $[a, b]$ . Como  $f$  e  $g$  são integráveis, para qualquer escolha de  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

onde  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Temos, das propriedades aritméticas dos limites, que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha \cdot f)(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\beta \cdot g)(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \cdot \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Ademais, tais limites independem da escolha do  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , uma vez que as funções  $f$  e  $g$  são Riemann-integráveis.  $\square$

**Teorema 7 (Monotonicidade).** *Sejam  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, b]$  tais que para todo  $x \in [a, b]$  valha  $f(x) \leq g(x)$ . Então:*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

*Demonstração.* Dada qualquer partição de ordem  $n$  de  $[a, b]$ , digamos  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$ , temos, para qualquer escolha de  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

Como para qualquer que seja  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  tem-se  $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$ , de modo que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Pela conservação do sinal no limite, temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

□

**Proposição 8.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\text{Desc}(f)$  pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então a função:*

$$\begin{aligned} |f| : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

*é limitada e tal que  $\text{Desc}(|f|)$  pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados.*

**Proposição 9.** *Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável, então:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

*Demonstração.* Temos, para qualquer  $x \in [a, b]$ :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Decorre da monotonicidade da integral que:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

□

O resultado a seguir decorre de forma imediata da monotonicidade da integral:

**Proposição 10.** *Sejam  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,*

$$m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

*Então, se  $f$  é Riemann-integrável, vale:*

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b - a)$$

O teorema a seguir é crucial para toda a teoria da integração:

**Teorema 11 (Teorema da Média).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então existe  $c \in [a, b]$  tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b - a)$$

*Demonstração.* Uma vez que  $f$  é, por hipótese, contínua, segue do **Teorema de Weierstrass** que existem  $\bar{x}$  e  $\underline{x}$  em  $[a, b]$  tais que:

$$f(\bar{x}) = M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

e:

$$f(\underline{x}) = m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Pela **Proposição 10**, tem-se:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

donde segue que:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Pelo **Teorema do Valor Intermediário** aplicado a  $f$ , existe algum  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx$$

□

**Teorema 12 (Aditividade).** *Se o intervalo  $[a, b]$  é subdividido em  $n$  subintervalos,  $I_1, \dots, I_n$  de tal forma que  $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ <sup>a</sup> e  $[a, b] = \cup_{i=1}^n I_i$  se para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é uma função integrável em  $[a, b]$ , então  $f \upharpoonright_{I_i}$  é integrável em  $I_i$ , então:*

$$f : [a, b] = \cup_{i=1}^n I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto f \upharpoonright_{I_i}(x) \text{ se } x \in I_i$$

então  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável em  $R$  e vale:

$$\int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f \upharpoonright_{I_i}(x) dx$$

<sup>a</sup>na verdade não é estritamente necessário que  $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ , basta que para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tenhamos o comprimento de  $I_i \cap I_j$  igual a zero, ou seja, que  $I_i \cap I_j$  tenha “medida nula”.

*Demonstração.* Faremos a prova deste resultado por indução no número de subintervalos.

Suponha, primeiramente, que  $[a, b] = I_1 \cup I_2$  com  $\text{int}(I_1) \cap \text{int}(I_2) = \emptyset$ . Uma tal decomposição de  $[a, b]$  em dois subintervalos só pode ser da forma  $I_1 = [a, \alpha]$  e  $I_2 = [\alpha, b]$  para algum  $\alpha \in ]a, b[$ .

Dada qualquer partição  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)\}$  de  $[a, b] = I_1 \cup I_2$ , com  $x_{i_0} = \alpha$  para algum  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ , temos uma partição  $\mathcal{P}_1 = \{x_i \in I_1 \mid i \in \{1, \dots, i_0\}\}$  de  $I_1$  e uma partição  $\mathcal{P}_2 = \{x_i \in I_2 \mid i \in \{i_0, \dots, n\}\}$  de  $I_2$ . Temos, assim:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=i_0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i =$$

$$= \int_a^\alpha f \upharpoonright_{I_1}(x) dx + \int_\alpha^b f \upharpoonright_{I_2}(x) dx,$$

onde  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  é um ponto qualquer.

Deixamos a demonstração do passo indutivo a cargo do leitor. □

**Observação 13.** *Sejam  $a < b$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann-integrável. Então convençamos que:*

$$\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^a f(x) dx = 0$$

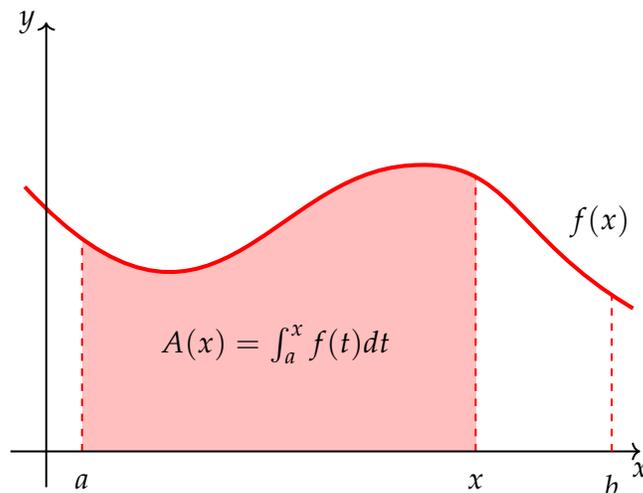
## 2.4 O Teorema Fundamental do Cálculo: Primitivas e Integrais Indefinidas

**Teorema 14 (Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua, e seja:*

$$\begin{aligned} A : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \int_a^x f(t) dt \end{aligned}$$

*Tem-se que  $A$  é derivável em  $]a, b[$  e vale:*

$$\frac{d}{dx} \left[ \int_a^x f(t) dt \right] = \frac{dA}{dx}(x) = A'(x) = f(x).$$



*Demonstração.* Dados quaisquer  $x_0 \in ]a, b[$  e  $\Delta x > 0$  tal que  $x_0 + \Delta x \in [a, b]$ , tem-se:

$$A(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$A(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \stackrel{\text{aditividade}}{=} \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt$$

Assim, tem-se:

$$A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) = \left[ \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt \right] - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt$$

Uma vez que  $f$  é, por hipótese, contínua em  $[a, b]$ , ela também o é no intervalo  $[x_0, x_0 + \Delta x]$ , de modo que pelo **Teorema da Média (Teorema 11)**, existe algum  $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$  tal que:

$$\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot (x_0 + \Delta x - x_0) = f(c) \cdot \Delta x$$

Observe, também, que como  $c$  é *sempre* tomado entre  $x_0$  e  $x_0 + \Delta x$ , conforme fazemos  $\Delta x \rightarrow 0$ , teremos  $c \rightarrow x_0$ , e portanto (cf. **Teorema 2** das NOTAS DA AULA 10):

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} f(c) = \lim_{c \rightarrow x_0} f(c) = f(x_0)$$

e em particular:

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} f(c) = \lim_{\substack{c \rightarrow x_0 \\ c > x_0}} f(c) = f(x_0).$$

Desta forma temos, por definição:

$$A'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\int_{x_0}^{x_0 + \Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta x > 0}} f(c) \\ = f(x_0)$$

Analogamente mostra-se que:

$$A'_-(x_0) = f(x_0),$$

de modo que:

$$A'(x_0) = f(x_0).$$

Como  $x_0 \in ]a, b[$  é um ponto *qualquer*, segue que:

$$(\forall x \in ]a, b[) (A'(x) = f(x))$$

Note ainda que, quando  $x_0$  fosse um dos extremos do intervalo  $[a, b]$ , os limites usados na demonstração seriam limites laterais, e  $A'(a)$  seria uma derivada à direita e  $A'(b)$  seria uma derivada à esquerda.  $\square$

**Definição 15 (primitiva).** *Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que uma função  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f$  se para todo  $x \in I$  tivermos:*

$$F'(x) = f(x).$$

Observe que, de acordo com a nossa definição, as primitivas de uma função  $f$  estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função  $f$ , entendemos que essas funções são primitivas de  $f$  no mesmo intervalo que é domínio de  $f$ .

O **Teorema Fundamental do Cálculo** nos diz, portanto, que *toda* função contínua em um intervalo da forma  $[a, b]$  admite uma primitiva, dada por:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

**Exemplo 16.** A função  $F(x) = \frac{x^3}{3}$  é uma primitiva da função  $f(x) = x^2$ , pois:

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2$$

Também as funções:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 4, \quad H(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 3)$$

são primitivas da função  $f(x) = x^2$  (verifique).

**Exemplo 17.** A função  $F(x) = \frac{1}{2} \sin(2x) + c$ , onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante, é uma primitiva da função  $f(x) = \cos(2x)$ .

**Exemplo 18.** A função  $F(x) = \frac{1}{2x^2}$  é uma primitiva da função  $f(x) = -\frac{1}{x^3}$  em qualquer intervalo que não contém a origem, pois para todo  $x \neq 0$  tem-se  $F'(x) = f(x)$ .

**Teorema 19.** *Sejam  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo e  $F : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva da função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ . Então, se  $c$  é uma constante qualquer, a função  $G(x) = F(x) + c$  também é primitiva de  $f$ .*

*Demonstração.* Como  $F$  é primitiva de  $f$ , para todo  $x \in I$  tem-se:

$$F'(x) = f(x).$$

Logo, para todo  $x \in I$  tem-se:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

**Proposição 20.** *Seja  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável. Se para todo  $x \in I$  tivermos  $f'(x) = 0$ , então  $f$  é constante em  $I$ .*

*Demonstração.* Sejam  $x, y \in I, x < y$ . Como  $f$  é derivável em  $I$ ,  $f$  é contínua em  $[x, y]$  e derivável em  $]x, y[$ . Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe  $z \in ]x, y[$  tal que:

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Como, por hipótese,  $f'(z) = 0$ , segue que:

$$0 = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

de modo que:

$$f(y) - f(x) = 0$$

e portanto:

$$f(y) = f(x).$$

Como  $x$  e  $y$  são dois pontos quaisquer de  $I$ , concluímos que  $f$  é constante em  $I$ . □

**Proposição 21.** *Seja  $I \subseteq \mathbb{R}$  um intervalo. Se  $F, G : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  são funções primitivas de  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , então existe uma constante  $c \in \mathbb{R}$  tal que para todo  $x \in I$  tem-se  $G(x) - F(x) = c$ .*

*Demonstração.* Seja:

$$H : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto G(x) - F(x)$$

Como  $F$  e  $G$  são primitivas de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ , temos  $F'(x) = f(x) = G'(x)$  para todo  $x \in I$ . Assim, para qualquer  $x \in I$  tem-se:

$$H'(x) = [G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Pela **Proposição 20**, segue que  $H(x) = c$  para alguma constante  $c \in \mathbb{R}$ . Logo,

$$(\forall x \in I)(H(x) = c),$$

ou seja:

$$(\forall x \in I)(G(x) = F(x) + c).$$

□

Assim, a proposição acima nos informa que o problema de determinar as primitivas de  $f$  se resume a achar uma primitiva em particular.

**Teorema 22 (Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2).** *Se  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

*Demonstração.* Tem-se:

$$A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1**, tem-se  $F'(x) = f(x)$ . Pela **Proposição 21**, segue que  $A$  e  $F$  diferem por uma constante, ou seja:

$$A(x) = F(x) + c$$

Para  $x = a$ , temos  $A(a) = F(a) + c$ , de modo que  $c = -F(a)$ . Assim,

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Em particular, para  $x = b$ , tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

□

**Exemplo 23.** *Sabemos que  $(\sin x)' = \cos x$ . Desta forma,  $F(x) = \sin(x)$  é uma primitiva da função  $f(x) = \cos(x)$ , e toda primitiva de  $f(x) = \cos(x)$  é da forma:*

$$G(x) = \sin(x) + c,$$

onde  $c \in \mathbb{R}$  é uma constante.

**Definição 24 (integral indefinida).** Se  $F$  é uma primitiva de  $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , a função:

$$G : I \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto F(x) + c$$

onde  $c$  é uma constante, é chamada **a integral indefinida de  $f$** , e é denotada por:

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Note que da definição de integral indefinida, decorre que:

- (i)  $\int f(x)dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$ ;
- (ii)  $\int f(x)dx$  representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função  $f$ ).

#### 2.4.1 Propriedades da Integral Indefinida

**Proposição 25.** Sejam  $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis e  $k \in \mathbb{R}$ . Então:

- (i)  $\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$ ;
- (ii)  $\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

*Demonstração.* Ad (i): O resultado segue trivialmente se  $k = 0$ . Vamos assumir, portanto, que  $k \neq 0$ .

Seja  $F : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma primitiva de  $f$ . Nota-se prontamente que  $k \cdot F$  é uma primitiva de  $f$ , pois para todo  $x \in I$ ,  $(k \cdot F)'(x) = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$ . Assim,

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot F(x) + k \cdot \frac{c}{k} = k \cdot \left[ F(x) + \frac{c}{k} \right] = k \cdot \int f(x)dx.$$

Ad (ii): Sejam  $F, G : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções primitivas de  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  e de  $g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , respectivamente. Então  $F + G : I \rightarrow \mathbb{R}$  é uma primitiva da função  $f + g : I \rightarrow \mathbb{R}$ , uma vez que:

$$(\forall x \in I)((F + G)'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x))$$

Portanto,

$$\int [f(x) + g(x)]dx = [F(x) + G(x)] + c = [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2, \text{ onde } c = c_1 + c_2,$$

$$= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

□

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função, nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas “integrais imediatas”, a partir das derivadas das funções elementares.

## 2.5 Tabela de Integrais Imediatas

Aconselha-se que o leitor verifique cada uma das seguintes igualdades:

$$(1) \int dx = x + c$$

$$(9) \int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$$

$$(2) \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c, \text{ sempre que } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$$

$$(10) \int \sec(x) \cdot \tan(x)dx = \sec(x) + c$$

$$(3) \int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$$

$$(11) \int \csc(x) \cdot \cot(x)dx = -\csc(x) + c$$

$$(4) \int e^x dx = e^x + c$$

$$(12) \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$$

$$(5) \text{ Sempre que } a > 0, \text{ tem-se } \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$$

$$(13) \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right| + c$$

$$(14) \int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$$

$$(6) \int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$$

$$(15) \int \frac{dx}{x \cdot \sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(x) + c$$

$$(7) \int \cos(x)dx = \sin(x) + c$$

$$(16) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c$$

$$(8) \int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$$

$$(17) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$$

### 3 O Teorema da Mudança de Variável

**Teorema 26 (Teorema da Mudança de Variável).** *Sejam  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e  $g : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função derivável, com  $g' : ]c, d[ \rightarrow \mathbb{R}$  integrável e tal que  $g[[c, d]] \subset [a, b]$ . Então:*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt.$$

*Demonstração.* Sendo  $f$  contínua, pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**  $f$  possui uma primitiva  $F : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ . O **Teorema Fundamental do Cálculo** nos dá:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Por outro lado, pela **Regra da Cadeia**, tem-se  $(F \circ g)'(t) = F'(g(t)) \cdot g'(t) = f(g(t)) \cdot g'(t)$  para qualquer  $t \in [a, b]$ . Deste modo,

$$F \circ g : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto F(g(t)) \end{array}$$

é uma primitiva da função integrável:

$$\Phi : \begin{array}{l} [c, d] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \mapsto f(g(t)) \cdot g'(t) \end{array}$$

Temos, portanto:

$$\int_c^d \Phi(t)dt = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$$

de modo que:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_c^d f(g(t)) \cdot g'(t)dt$$

□

**Proposição 27.** *Se  $f : [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, então:*

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

*Demonstração.* Como  $f$  é par, tem-se:

$$(\forall x \in [0, a])(f(-x) = f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$g : [0, a] \rightarrow [-a, 0] \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x$$

como  $g(0) = 0$  e  $g(a) = -a$ , segue que:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_a^0 f(-x) \cdot \overbrace{(-1)}^{=g'(x)} dx = - \int_a^0 f(-x)dx =$$

$$\stackrel{f \text{ par}}{=} - \int_a^0 f(x)dx = - \left( - \int_0^a f(x)dx \right) = \int_0^a f(x)dx$$

ou seja,

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^a f(x)dx \stackrel{\text{aditividade}}{=} \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$

□

**Proposição 28.** Se  $f : [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar, então:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

*Demonstração.* Como  $f$  é ímpar, tem-se:

$$(\forall x \in [0, a])(f(-x) = -f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$g : [0, a] \rightarrow [-a, 0] \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x$$

como  $g(0) = 0$  e  $g(a) = -a$ , segue que:

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^0 f(-x) \cdot \overbrace{(-1)}^{=g'(x)} dx = - \int_a^0 f(-x) dx =$$

$$\stackrel{f \text{ ímpar}}{\uparrow} - \int_a^0 -f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

ou seja,

$$\int_{-a}^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{\text{aditividade}}{\uparrow} \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx - \int_0^a f(x) dx = 0$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

□

## Apêndice: Rudimentos da Teoria da Integral de Riemann

No texto acima, usamos apenas partições regulares dos intervalos a fim de tornar mais conveniente a apresentação. Neste apêndice apresentamos conceitos mais refinados da teoria de integração, e terminamos por exibir um exemplo de função que não é integrável de acordo com a nossa definição.

Sejam  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e limitado,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\}$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Sejam:

$$m_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e seja  $\Delta x_i$  o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . As **somas inferior e superior** de  $f$  correspondentes à partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  são, respectivamente:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f) \cdot \Delta x_i \text{ e } S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f) \cdot \Delta x_i$$

Evidentemente, como  $m_i(f) \leq M_i(f)$ , tem-se que  $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$ .

Vale também vale o seguinte resultado mais forte:

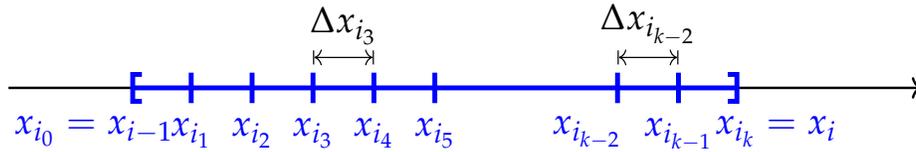
**Lema 29.** *Sejam  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  uma partição do intervalo  $[a,b]$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  uma partição do mesmo intervalo tais que todo subintervalo determinado por  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  esteja contido em algum subintervalo da partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ <sup>2</sup>. Então:*

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \text{ e } S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$$

*Ou seja, ao refinarmos uma partição, as somas inferiores não diminuem e as somas superiores não aumentam.*

*Demonstração.* Por hipótese, cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  determinado por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  se subdivide em vários (digamos  $k$ ) subintervalos determinados por  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ , digamos

$$[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1} = x_{i_0}, x_{i_1}] \cup [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots \cup [x_{i_m}, x_{i_{m+1}}] \cup \cdots \cup [x_{i_{k-1}}, x_{i_k} = x_i]$$



Seja, para cada  $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ :

$$\Delta x_{i_\ell} = |x_{i_{\ell+1}} - x_{i_\ell}|$$

Por propriedade de ínfimo de um conjunto, como  $[x_{i_{\ell-1}}, x_{i_\ell}] \subset [x_{i-1}, x_i]$ , tem-se  $m_i(f) \leq m_{i_\ell}(f)$  para todo  $\ell \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , de modo que:

$$\begin{aligned} m_i(f) \cdot \Delta x_i &= m_i(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \cdots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \cdots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} \leq \\ &\leq m_{i_0}(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_{i_1}(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \cdots + m_{i_{\ell-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \cdots + m_{i_{k-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} m_{i_j}(f) \cdot \Delta x_{i_j} \end{aligned}$$

<sup>2</sup>neste caso, dizemos que  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  é **mais fina do que**  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ .

Quando tomamos a soma de todos os  $i \in \{1, \dots, n\}$  do membro esquerdo da expressão acima, obtemos:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \cdot \Delta x_i$$

enquanto que tomando a soma de todos os membros à direita da expressão acima para  $I \in \{1, \dots, n\}$ , obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} m_{ij}(f) \cdot \Delta x_{ij} = s(f, \mathcal{P}')$$

Desta forma,  $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]})$ . A demonstração para somas superiores é análoga.  $\square$

**Corolário 30.** Se  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  são duas partições quaisquer de  $I = [a, b]$ , tem-se  $s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$ , ou seja, a soma inferior é sempre menor (ou igual) do que a soma superior.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$ , que é uma partição mais fina do que  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e do que  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ , simultaneamente. Então:

$$s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}).$$

$\square$

Decorre do corolário acima que o limitante superior das somas inferiores de  $f$  é menor ou igual ao limitante inferior das somas superiores de  $f$ , ou seja,

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a, b]\} \leq \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a, b]\}$$

**Definição 31 (integrabilidade segundo Riemann).** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **Riemann-integrável em**  $[a, b]$  se:

- $f$  é limitada em  $[a, b]$ ;
- $\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$

Denotamos este número dado na igualdade acima por  $\int_{[a,b]} f(x)dx$  ou por  $\int_a^b f(x)dx$ , que denominamos “**a integral de  $f$  sobre  $[a, b]$ ”**. A seguir, apresentamos a caracterização da integrabilidade de funções segundo Riemann:

**Teorema 32.** Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  de  $[a, b]$  tal que:

$$S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$$

*Demonstração.* Certamente que se para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que  $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$  tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$$

de modo que  $f$  é integrável.

Reciprocamente, se  $f$  é Riemann-integrável em  $[a, b]$ , tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$$

de modo que para cada  $\varepsilon > 0$  existem partições  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  tais que  $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$ . Se  $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$ , do lema segue que  $S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$ .  $\square$

**Exemplo de uma função limitada que não é Riemann-integrável:** considere:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Se  $\mathcal{P}_{[0,1]}$  é qualquer partição de  $[0, 1]$ , cada subintervalo  $I_k$  por ela determinado tem sempre pontos  $x$  com  $x$  racional e com  $x$  irracional. Deste modo,  $m_k(f) = 0$  e  $M_k(f) = 1$ , e portanto:

$$s(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 0 \cdot \Delta x_{i_k} = 0$$

e:

$$S(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 1 \cdot \Delta x_{i_k} = 1$$

de modo que  $f$  não é Riemann-integrável.

Uma caracterização da Riemann-integrabilidade de uma função pode ser dada em termos do “tamanho” do conjunto onde a função é descontínua. A grosso modo, se tal conjunto for “pequeno” (em um sentido que tornaremos preciso a seguir), então a função será Riemann-integrável - e se a função for Riemann-integrável, seu conjunto de discontinuidades será “pequeno”.

**Definição 33 (medida nula).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  tem *medida nula* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma cobertura  $\{I_1, \dots, I_n, \dots\}$  de  $A$ , por intervalos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon$ .

Não é difícil demonstrar que, na reta, um conjunto tem medida nula se, e somente se, este conjunto for no máximo enumerável.

**Definição 34 (conteúdo nulo).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tem *conteúdo nulo* se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir uma cobertura finita  $\{I_1, \dots, I_n\}$  de  $A$  por intervalos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=1}^n \ell(I_i) < \varepsilon$ .

Novamente, na reta, um conjunto  $A$  tem medida nula se, e somente se  $A$  for um conjunto finito.

### 3.1 A oscilação de uma função

**Definição 35 (oscilação).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A *oscilação de  $f$  em  $[a, b]$*  é:

$$\omega(f, [a, b]) = M_{[a,b]}(f) - m_{[a,b]}(f)$$

Se  $f$  não for contínua em  $x_0$ , a medida da descontinuidade de  $f$  em  $x_0$  pode ser dada de forma precisa. Sejam, para  $\delta > 0$ :

$$M(f, x_0, \delta) = \sup\{f(x) \mid x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

e

$$m(f, x_0, \delta) = \inf\{f(x) \mid x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

A *oscilação de  $f$  em  $x_0$*  é:

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)] = \inf_{\delta > 0} \omega(f, x_0, \delta)$$

**Proposição 36.** Sejam  $[a, b]$  um intervalo e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Tem-se, para qualquer  $x_0 \in ]a, b[$ :

$$\omega(f, x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , podemos escolher a notação de modo que  $f(y) \leq f(x)$ . Temos:

$$m(f, x_0, \delta) \leq f(y) \leq f(x) \leq M(f, x_0, \delta)$$

o que nos dá:

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) = f(x) + (-f(y)) \leq M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$$

Assim,  $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$  é cota superior de  $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$ . Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $x_1, x_2 \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  tais que  $f(x_1) > M(f, x_0, \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$  e  $f(x_2) < m(f, x_0, \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,  $-f(x_2) > -m(f, x_0, \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Segue-se que  $|f(x_1) - f(x_2)| \geq f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + (-f(x_2)) > (M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)) - \varepsilon$ . Isto mostra que  $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$  é a menor cota superior de  $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$ , de modo que:

$$\omega(f, x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}.$$

□

**Observação 37.** Em virtude da **Proposição 36**, como a oscilação é o supremo de um conjunto de números não negativos, tem-se sempre  $\omega(f, x_0, \delta) \geq 0$ .

**Proposição 38.** Uma função limitada  $f : [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0 \in [a, b]$  se, e somente se,  $\omega(f, x_0) = 0$ .

*Demonstração.* Suponha  $f$  contínua em  $x_0$ , de modo que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  implica  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja:

$$(\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Em particular, para qualquer  $\eta > 0$  com  $0 < \eta < \delta$ , vale:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Por definição de supremo, como  $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$  é cota superior para  $f(x)$  em  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , tem-se:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x) \leq M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Analogamente, para o ínfimo, temos:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \leq f(x) \right)$$

e portanto:

$$\begin{cases} M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \end{cases}$$

Segue, portanto, que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \eta < \delta$  implica  $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - f(x_0) = \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} [M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)] = 0$ , de modo que  $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$ .

Reciprocamente, se  $\omega(f, x_0) = 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < \eta < \delta$  então  $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon$ .

Como para todo  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  tem-se  $f(x) \leq M(f, x_0, \eta)$  e  $-f(x_0) \leq -m(f, x_0, \eta)$ . Tem-se, assim:

$$f(x) - f(x_0) < M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Também valem que  $f(x_0) \leq M(f, x_0, \eta)$  e  $m(f, x_0, \eta) \leq f(x)$ , logo:

$$f(x_0) - f(x) \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta)$$

donde segue que:

$$m(f, x_0, \eta) - M(f, x_0, \eta) \leq f(x) - f(x_0)$$

Assim, para todo  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  vale:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Segue, portanto, que  $f$  é contínua em  $x_0$ . □

**Lema 39.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e  $\omega(f, x_0) < c$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x) < c$  para todo  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ .*

*Demonstração.* Pela definição de limite, como  $\omega(f, x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \omega(f, x_0, \eta) < c$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x_0, \delta) < c$ . Dado qualquer  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , tomamos  $\zeta > 0$  com  $]x - \zeta, x + \zeta[ \subset ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  e obtemos:

$$\omega(f, x) \leq \omega(f, x, \zeta) \leq \omega(f, x_0, \delta) < c$$

□

**Lema 40.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, dado  $\varepsilon > 0$ , tem-se que o conjunto:*

$$B = \{x_0 \in [a, b] \mid \omega(f, x_0) \geq \varepsilon\}$$

*é fechado em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que  $\mathbb{R} \setminus B$  é aberto.

Note que:

$$B = [a, b] \cap \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$$

e portanto:

$$\mathbb{R} \setminus B = (\mathbb{R} \setminus R) \cup \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$$

Assim, dado  $x \in \mathbb{R} \setminus B$ , tem-se  $x \notin [a, b]$  ou  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . No primeiro caso, como  $[a, b]$  é fechado e portanto  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  é aberto, existe um intervalo aberto  $C$  que contém  $x$  tal que  $C \subset \mathbb{R} \setminus [a, b] \subset \mathbb{R} \setminus B$ .

Tomemos  $x_0 \in \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$ . Pelo **Lema 39**, tem-se que existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x) < \varepsilon$  para todo  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . Segue disto que  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$ , de modo que este conjunto é aberto e seu complementar,  $\{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$  é fechado. Segue que  $\mathbb{R} \setminus B$ , por ser união de intervalos abertos, é aberto, e portanto  $B$  é fechado.  $\square$

**Lema 41.** *Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que para todo  $x \in [a, b]$  tenhamos  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . Então existe uma partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  de  $[a, b]$  com  $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon \cdot |b - a|$ .*

*Demonstração.* Dado qualquer  $x \in [a, b]$ , existe um intervalo fechado  $R_x$  que contém  $x$  em seu interior e tal que  $M_{R_x}(f) - m_{R_x}(f) < \varepsilon$ , de modo que  $\{\text{int}(R_x) \mid x \in [a, b]\}$  constitui uma cobertura aberta de  $[a, b]$ . Sendo  $[a, b]$  compacto (fechado e limitado), uma quantidade finita de conjuntos da forma  $\text{int}(R_x)$  recobre  $[a, b]$ , digamos  $\{\text{int}(R_{x_i}) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Seja  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que cada subintervalo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  está contido em algum  $\text{int}(R_{x_i})$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tem-se, então,  $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ , de modo que  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell(S) < \varepsilon \cdot \ell(R)$ .  $\square$

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma função seja Riemann-integrável, a saber, que o conjunto de suas descontinuidades tenha medida nula.

**Teorema 42.** *Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $\text{Desc}(f)$  tem medida nula então  $f$  é Riemann-integrável em  $I$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\text{Desc}(f)$  tenha medida nula. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $B_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ . Então  $B_\varepsilon \subset B$ , de modo que  $B_\varepsilon$  também tem medida nula. Uma vez que  $B_\varepsilon$  é fechado e limitado, segue que  $B_\varepsilon$  é compacto, e portanto tem conteúdo nulo. Assim, existe uma coleção finita de intervalos fechados,  $U_1, \dots, U_n$  tais que  $B_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^n \text{int}(U_i)$  e que  $\sum_{i=1}^n \ell(U_i) < \varepsilon$ .

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $I$  tal que cada subintervalo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}$  esteja em um dos dois seguintes grupos:

- (1)  $S_1$ , que consiste dos subintervalos  $S$  tais que  $S \subset U_i$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;

(2)  $S_2$ , que consiste dos subintervalos  $S$  tais que  $S \cap B_\varepsilon = \emptyset$ .

Como  $f$  é limitada, seja  $M > 0$  tal que:

$$(\forall x \in I)(|f(x)| < M).$$

Tem-se  $M_S(f) - m_S(f) < 2M$  para cada  $S$ . Portanto,

$$\sum_{S \in S_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell.(S) < 2M \sum_{i=1}^n \ell.(U_i) < 2M\varepsilon$$

Se  $S \in S_2$ , tem-se para todo  $x \in S$ ,  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . Pelo **Lema 41**, existe uma partição  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  mais fina do de  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que:

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell.(S') < \varepsilon \cdot \ell.(S),$$

para  $S \in S_2$ . Então:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) &= \sum_{S' \subset S \in S_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell.(S') + \\ &+ \sum_{S' \subset S \in S_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell.(S') < 2M\varepsilon + \sum_{S \in S_2} \varepsilon \cdot \ell.(S) \leq \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot \ell.([a, b]) \end{aligned}$$

Como  $M$  e  $\ell.([a, b])$  são números fixados, isto mostra que se pode encontrar uma partição  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  com  $S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]})$  tão pequeno quanto se queira. Desta forma,  $f$  é Riemann-integrável.  $\square$

## Referências

- [1] ÁVILA, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.
- [2] FLEMMING, D.M. E GONÇALVES, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6ª edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.
- [3] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] SPIVAK, M., **Cálculo em Variedades**, Editorial Reverté S.A. Barcelona, 2017.