

# MAT0121 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

## AGENDA 01

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

### Apresentação

Nesta agenda introduziremos um problema geométrico que motiva a teoria de integração segundo Riemann: calcular a área delimitada pelo gráfico de uma função. Em nosso primeiro caso concreto a analisar, vamos buscar a área da região do plano delimitada pelo eixo  $Ox$ , pelas retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e pelo gráfico da função  $f(x) = x^2$ , e o processo que utilizaremos é o protótipo do processo de integração de Riemann. Vale observar que existem outros processos de integração, como o de Lebesgue e o de Riemann-Stieltjes, que não serão vistos neste curso.

Na seção 1 calculamos, efetivamente a área referida no parágrafo anterior, resolvendo um problema conhecido como “quadratura” (por ser equivalente a encontrar o lado de um quadrado de mesma área). Na seção 2 apresentamos, com mais rigor, a integral de Riemann, destacando a ideia por detrás do processo de integração. Para facilitar a exposição, apresentamos as somas de Riemann, a soma superior e a soma inferior, com as quais lidamos mais detidamente no Apêndice.

Apresentamos as propriedades da integral de Riemann, como a linearidade, a monotonicidade, a aditividade – entre outras – e apresentamos importantes resultados como o **Teorema da Média**, que nos permitirá provar a parte 1 do **Teorema Fundamental do Cálculo**, que conjuga os problemas da quadratura com o da derivação.

Mostraremos algumas aplicações da integral definida como o cálculo da área delimitada entre gráficos de funções, a determinação do centroide de uma lâmina plana, o cálculo do comprimento de curvas, do volume de sólidos de revolução e a área de superfícies de revolução.

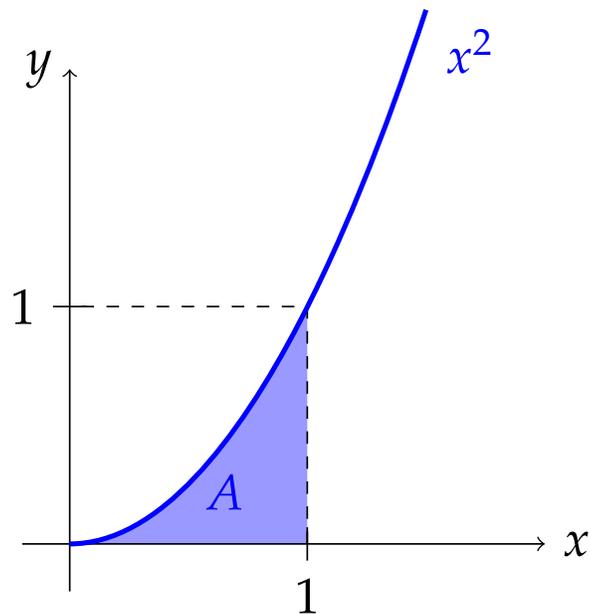
Ao final do material, o aluno encontrará um apêndice do qual constam os rudimentos mais aprofundados da teoria da integração segundo Riemann.

---

\*jeancb@ime.usp.br

# 1 Motivação: O Processo<sup>1</sup>

**Motivação:** Calcular a área  $A$ , compreendida entre a parábola  $y = x^2$ , as retas  $x = 0$ ,  $x = 1$  e o eixo  $Ox$ .

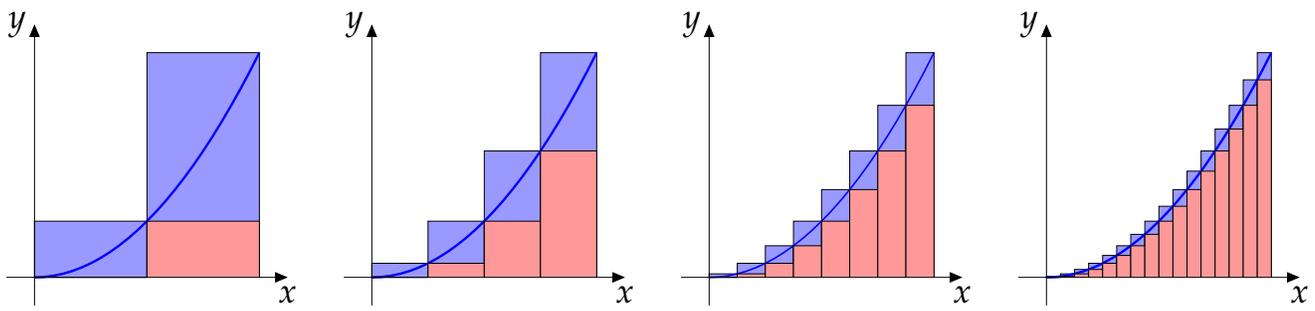


Consideremos a função:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2$$

Vamos subdividir o intervalo  $[0, 1]$  em  $n$  subintervalos de igual tamanho,  $1/n$  e usar retângulos para aproximar por excesso e por falta as áreas:

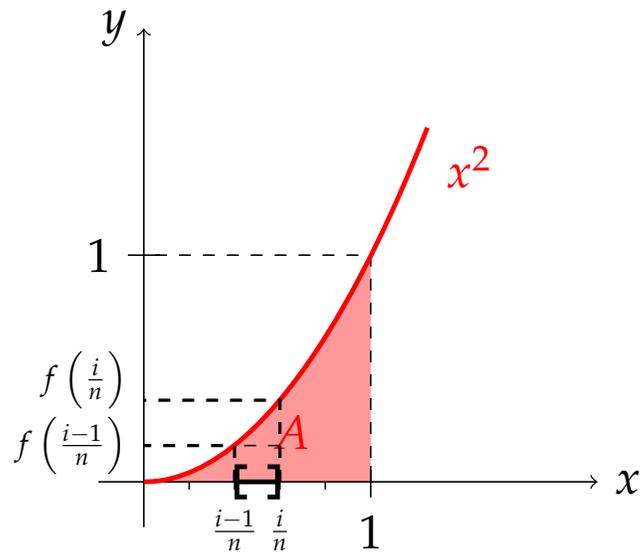
$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \dots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$



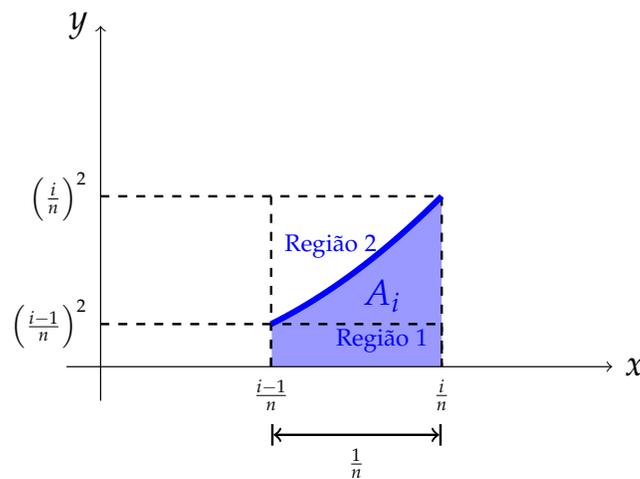
<sup>1</sup>de Integração de Riemann

Conforme veremos posteriormente, os valores das somas das áreas dos retângulos azuis (respectivamente, vermelhos) exibidos nas figuras acima serão denominados por **somas de Riemann superiores** (respectivamente, **somas de Riemann inferiores**). Na primeira imagem temos **somas de Riemann de ordem 2**, na segunda temos **somas de Riemann de ordem 4**, na terceira **somas de Riemann de ordem 8** e na quarta, **somas de Riemann de ordem 16**.

Analisemos um subintervalo de cada vez. A base do  $i$ -ésimo subintervalo está indicada na figura abaixo:



Analisando mais de perto a figura acima, obtemos a figura a seguir:



Note que, na figura acima:

$$(\text{Área da Região 1}) \leq A_i \leq (\text{Área da Região 2})$$

Mas,

$$\text{Área da região 1} = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(i-1)^2}{n^3}$$

$$\text{Área da região 2} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{i^2}{n^3}$$

e como para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  tem-se:

$$\frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A_i \leq \frac{i^2}{n^3}$$

segue que:

$$\sum_{i=1}^n \frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A \leq \sum_{i=1}^n \frac{i^2}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n (i-1)^2 \leq A \leq \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^n i^2$$

Antes de prosseguir, precisamos do seguinte:

**Teorema 1.** Vale, para qualquer  $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ , que:

$$\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

*Demonstração.* Temos, no mínimo, dois modos de demonstrar a identidade acima: por indução e por indução. Apresentamos a seguir as duas demonstrações, em benefício do leitor.

1º modo: por indução: Para  $n = 2$  temos, naturalmente,

$$\sum_{i=1}^2 i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (4+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot (n-1) + 1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Temos, assim:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n i^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \\ &= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.\end{aligned}$$

2º modo: por dedução:

Temos que  $\sum_{i=1}^n [(i+1)^3 - i^3]$  é, por um lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n [i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] = \sum_{i=1}^n (3i^2 + 3i + 1)$$

e, por outro lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^n (i+1)^3 - \sum_{i=1}^n i^3 = (2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \dots + n^3) = (n+1)^3 - 1$$

de modo que:

$$\begin{aligned}3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^n i + \sum_{i=1}^n 1 &= (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n \\ 3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n &= n^3 + 3n^2 + 3n\end{aligned}$$

e assim:

$$\begin{aligned}3 \cdot \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n}{2} - \frac{3n^2 + 3n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2} \\ \sum_{i=1}^n i^2 &= \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}\end{aligned}$$

□

Aplicando o que vimos no teorema anterior, chegamos às desigualdades:

$$\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq A \leq \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Fazendo  $n \rightarrow \infty$ , tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Agora,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[ \frac{(n-1)}{n} \right] \cdot \left[ \frac{2n-1}{n} \right] = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[ \frac{(n+1)}{n} \right] \cdot \left[ \frac{2n+1}{n} \right] = \frac{1}{3}$$

segue do **Teorema do Confronto** que:

$$A = \frac{1}{3}$$

## 2 Integral de Riemann

Vimos, na seção anterior, um exemplo do processo de integração segundo Riemann: trata-se de, primeiramente, subdividir o domínio da função em apreço mediante partições cada vez mais “numerosas”, que determinam subintervalos cada vez mais estreitos, e calcular o limite das somas por falta e por excesso. Ao obter um único valor, chegamos ao “valor da integral definida”.

Nesta seção apresentaremos primeiramente alguns conceitos necessários à apresentação do nosso processo de integração em vocabulário adequado e, na sequência, apresentaremos num contexto mais amplo a processo de integração segundo Riemann, tendo como motivação o cálculo da área entre o gráfico de certa função e o eixo  $Ox$ .

### 2.1 Partições de Um Intervalo

**Definição 2 (partição de um intervalo).** *Seja  $[a, b]$  um intervalo. Uma partição do intervalo  $[a, b]$  é um conjunto finito,  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$  tal que:*

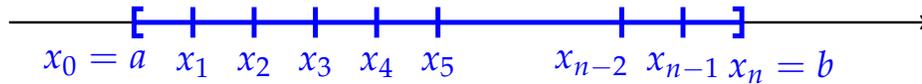
- $x_0 = a$  e  $x_n = b$ ;
- $(\forall i \in \{0, \dots, n\})(x_i \in [a, b])$
- $(\forall i \in \{1, \dots, n\})(x_{i-1} < x_i)$

*Ou seja, um conjunto finito de pontos distintos de  $[a, b]$  tal que  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ .*

Note que uma partição  $\mathcal{P} = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\}$  de um intervalo  $[a, b]$  determina  $n$  subintervalos consecutivos,  $[a, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-2}, x_{n-1}], [x_{n-1}, x_n]$ . Ao *maior* dos comprimentos destes intervalos chamamos de **malha** ou **norma** da partição, e escrevemos:

$$\|\mathcal{P}\| = \max_{1 \leq i \leq n} \Delta x_i = \max_{0 \leq i \leq n} |x_i - x_{i-1}|$$

Em nosso curso, nos restringiremos a partições cujos pontos estejam igualmente espaçados, como ilustra a figura a seguir:



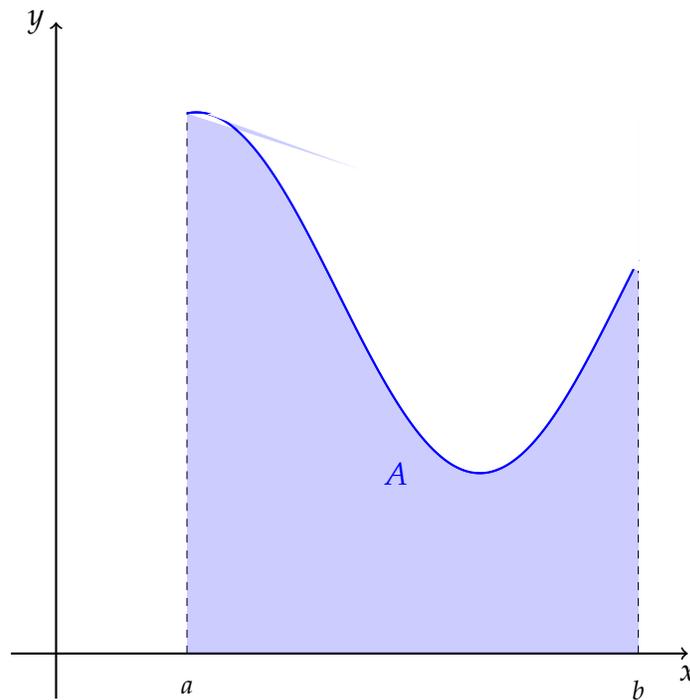
Tais partições são conhecidas como “partições regulares”, e têm malha sempre igual a  $\frac{b-a}{n}$ .

## 2.2 A ideia do processo de integração de Riemann

**Motivação:** Dada uma função real positiva definida num intervalo fechado  $[a, b]$ , calcular a área da região compreendida entre o gráfico da função e o eixo  $Ox$ .

Considere a função de uma variável real  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ , positiva – ou seja,  $(\forall x \in [a, b])(f(x) > 0)$ .

Seja  $A$  a área compreendida entre as retas  $x = a$ ,  $x = b$ , o gráfico de  $f$  e o eixo  $Ox$ , conforme ilustra a figura abaixo:

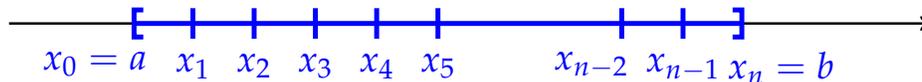


Gostaríamos de “aproximar” o valor da área  $A$ . Procedemos da seguinte maneira:

Seja o conjunto de pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto de pontos acima é chamado uma **partição de  $n + 1$  pontos do intervalo  $[a, b]$** . Os pontos não precisam estar igualmente espaçados – no entanto, neste curso trabalharemos apenas com partições nas quais os pontos estejam igualmente espaçados. Uma tal partição tem o seguinte aspecto:



Considere, agora, o  $i$ -ésimo intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . Neste subintervalo consideramos a seguinte aproximação para a área  $A_i$ : escolhemos um ponto  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  qualquer e tomamos:

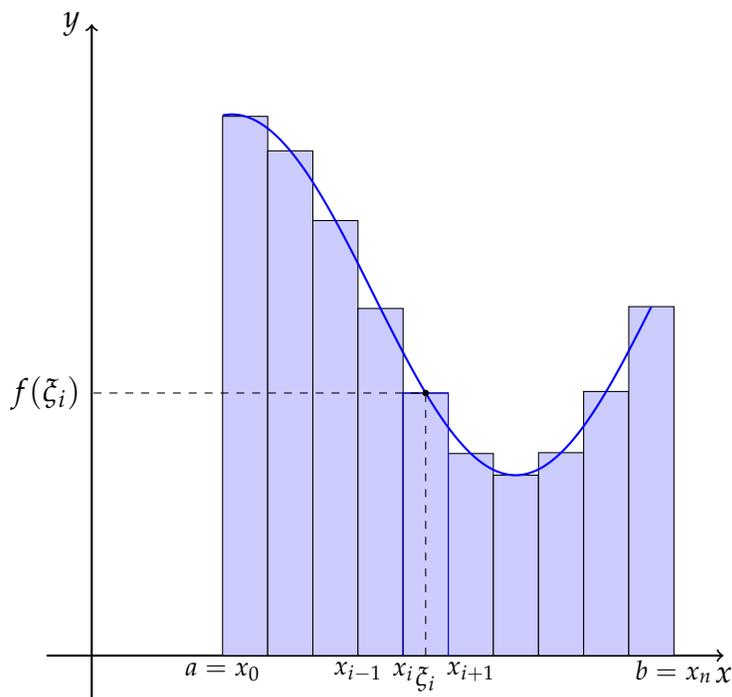
$$\Delta A_i \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Desta forma, a aproximação para a área total,  $A$ , seria dada por:

$$A \approx \sum_{i=1}^n \Delta A_i = \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Denominando  $x_i - x_{i-1}$  por  $\Delta x_i$ , segue que:

$$A \approx \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$$



A área  $A$  é obtida quando o número de subintervalos tende a infinito, ou seja,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Definimos, portanto:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Mas que condições devemos impor a  $f$  a fim de que o limite sempre exista? Antes de respondermos a esta pergunta, delimitaremos o tipo de função ao qual o processo descrito acima se aplica. Para tanto, introduziremos o conceito de **integrabilidade segundo Riemann**.

Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo, e seja  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A grosso modo, a função  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável se o processo descrito anteriormente nos conduz sempre a um mesmo número real, independentemente da partição,  $\mathcal{P}_I = \{x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  escolhida para  $I$  e dos pontos  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  escolhidos para compor o produto  $f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$ .

Apresentamos abaixo uma definição mais formal deste conceito.

**Definição 3.** *Sejam  $I \subset \mathbb{R}$  um intervalo e  $f : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. Dizemos que  $f$  é **Riemann-Integrável** se, e somente se, para qualquer partição regular  $\mathcal{P}_I = \{x_0 < x_1 < \dots < x_n\}$  de  $I$  e para qualquer escolha de pontos intermediários,  $\xi_i$ , nos subintervalos  $[x_{i-1}, x_i]$ , definidos pela partição regular, a sequência  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}} = \left( \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i \right)_{n \in \mathbb{N}}$  de somas de Riemann da função  $f$  converge para o mesmo valor, digamos  $s \in \mathbb{R}$ , conforme  $n \rightarrow \infty$ , isto é:*

$$\exists s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i,$$

No caso em que a função  $f$  é Riemann-integrável, escrevemos:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{[a,b]} f(x) dx = s = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i$$

O resultado a seguir nos dá uma condição *suficiente* para a Riemann-integrabilidade:

**Teorema 4.** *Toda função **contínua** definida em um intervalo fechado e limitado, da forma  $[a, b]$ , é Riemann-integrável.*

O teorema acima nos diz, entre outras coisas, que sempre que  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  for contínua, o limite de suas somas de Riemann conforme  $n \rightarrow \infty$  existirá, independentemente da escolha que fizermos de  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Há uma condição menos restritiva que, de fato, **caracteriza** a integrabilidade segundo Riemann:

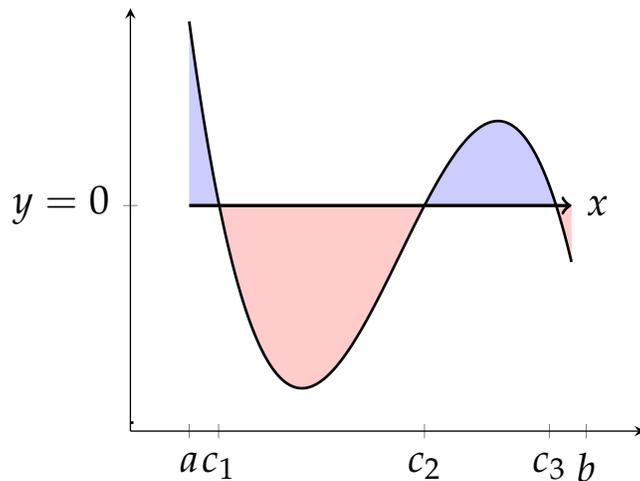
**Teorema 5.** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função **limitada**. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de  $f$ :*

$$\text{Desc}(f) = \{x_0 \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } x_0\}$$

*pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então  $f$  é Riemann-integrável sobre  $[a, b]$ .*

**Observação 6.** *A integral de uma função contínua, não necessariamente positiva, é definida de maneira análoga. A diferença é que atribuímos sinal negativo a áreas abaixo do eixo  $x$  e sinal positivo a áreas acima do eixo  $x$ . Na figura abaixo, por exemplo, temos:*

$$\int_a^{c_1} f(x) dx > 0, \quad \int_{c_1}^{c_2} f(x) dx < 0, \quad \int_{c_2}^{c_3} f(x) dx > 0 \quad \text{e} \quad \int_{c_3}^b f(x) dx < 0$$

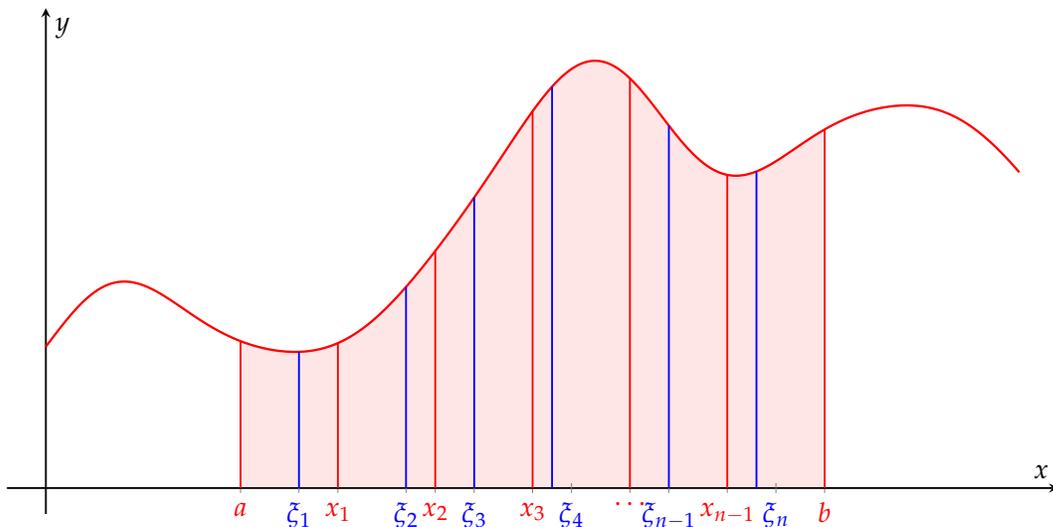


### 2.3 Somas de Riemann

Sejam  $f : [a, b] = R \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < \dots < x_{n-1} < x_n = b\}$  uma partição regular de ordem  $n$  de  $[a, b]$ , e para  $i \in \{0, \dots, n\}$ , seja  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$  o  $i$ -ésimo subintervalo determinado por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ . Escolhendo um ponto  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] = I_i$  qualquer, formamos a soma:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

que, conforme já vimos, é chamada **soma de Riemann de  $f$  sobre  $[a, b]$** .



Dentre as escolhas que podemos fazer ao construir uma soma de Riemann, duas delas são particularmente importantes: aquela em que tomamos como  $\xi_i$  o ponto do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$

em que  $f$  atinge seu valor máximo e aquela em que tomamos  $\xi_i$  como o ponto em que  $f$  atinge seu valor mínimo em  $[x_{i-1}, x_i]$ . Estes casos serão estudados na seção seguinte.

## 2.4 Soma Inferior e Soma Superior

Sejam  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua e positiva,  $W$  a região do espaço delimitada por cima pelo gráfico de  $f$ , por baixo pelo eixo  $Ox$  e pelos lados pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ . Se tomarmos  $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  como sendo um ponto de máximo de  $f$ , então  $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$  representa a área do retângulo de base  $[x_{i-1}, x_i]$  e altura  $f(\bar{x}_i)$ . A soma:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

é denominada “a soma superior de  $f$ ” representa a área do retângulo circunscrito à região  $W$ . Analogamente, se tomarmos  $\underline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$  como sendo um ponto de mínimo de  $f$  em  $[x_{i-1}, x_i]$ , então a soma:

$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\underline{x}_i)\Delta x_i$$

é denominada a “soma inferior de  $f$ ” representa a área da região inscrita à região  $W$ .

A seguir você poderá acessar, por meio do *link* indicado, um *applet* que mostra, para diversos valores de  $n$ , as somas de Riemann inferiores e superiores representadas respectivamente em vermelho e em azul:

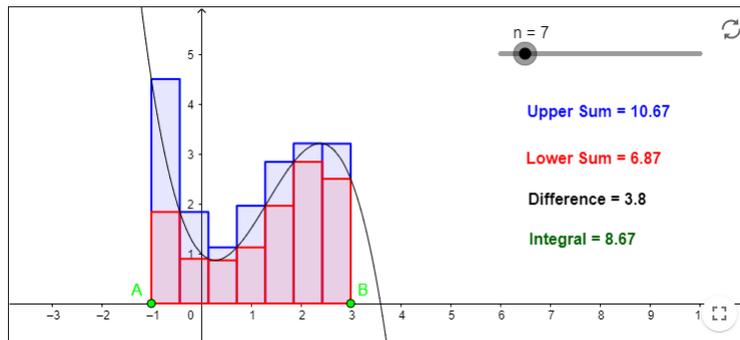


Figura 1: <https://www.geogebra.org/m/T5cPPUs5>.

Pelo **Teorema 4**, se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função Riemann-integrável, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = s = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n,$$

mostrando que as áreas das regiões circunscritas e inscritas tendem para o mesmo valor  $s$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Portanto, a região  $W$  tem uma área finita e igual a  $s$ .

**Exemplo 7.** Determinar as somas de Riemann superiores e inferiores de ordens 5 e 10 da função  $f(x) = 1 + x^2$  no intervalo  $[0, 5]$ .

**Solução:** Para obtermos as somas de ordem 5 precisamos, primeiramente, subdividir o intervalo  $[0, 5]$  em cinco subintervalos de mesmo comprimento, quais sejam,  $[0, 1]$ ,  $[1, 2]$ ,  $[2, 3]$ ,  $[3, 4]$  e  $[4, 5]$  – todos de mesmo comprimento igual a  $\Delta x_i = 1$ . Observamos que a função  $f(x) = 1 + x^2$  é estritamente crescente em  $[0, 5]$ , de modo que:

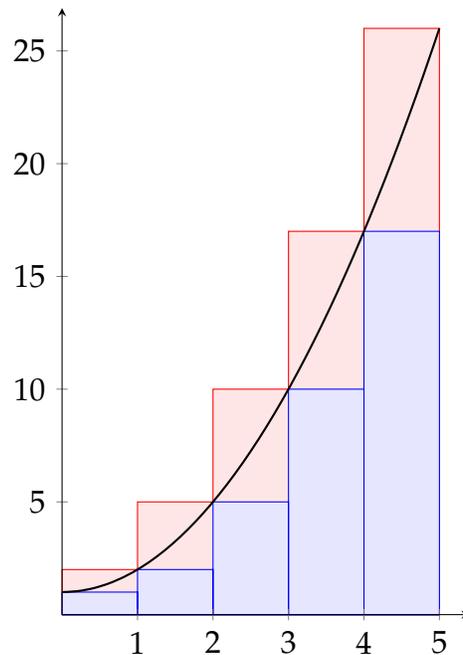
$$\underline{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_1 = 1$$

$$\underline{x}_2 = 1 \quad \bar{x}_2 = 2$$

$$\underline{x}_3 = 2 \quad \bar{x}_3 = 3$$

$$\underline{x}_4 = 3, \quad \bar{x}_4 = 4$$

$$\underline{x}_5 = 4 \quad \bar{x}_5 = 5.$$



Temos, assim:

$$\begin{aligned}
 S_5 &= \sum_{i=1}^5 f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + f(5) \cdot 1 = \\
 &= (1 + 1^2) + (1 + 2^2) + (1 + 3^2) + (1 + 4^2) + (1 + 5^2) = 60
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 s_5 &= \sum_{i=1}^5 f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x_i = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 = \\
 &= (1 + 0^2) + (1 + 1^2) + (1 + 2^2) + (1 + 3^2) + (1 + 4^2) = 35
 \end{aligned}$$

Para obtermos as somas de ordem 10 precisamos, primeiramente, subdividir o intervalo  $[0, 5]$  em dez subintervalos de mesmo comprimento, quais sejam,  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ ,  $\left[1, \frac{3}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{3}{2}, 2\right]$ ,  $\left[2, \frac{5}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{5}{2}, 3\right]$ ,  $\left[3, \frac{7}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{7}{2}, 4\right]$ ,  $\left[4, \frac{9}{2}\right]$ ,  $\left[\frac{9}{2}, 5\right]$  – todos de mesmo comprimento igual a  $\Delta x_i = \frac{1}{2}$ . Observamos que a função  $f(x) = 1 + x^2$  é estritamente crescente em  $[0, 5]$ , de modo que:

$$\underline{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x}_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_2 = 1$$

$$\underline{x}_3 = 1, \bar{x}_3 = \frac{3}{2}$$

$$\underline{x}_4 = \frac{3}{2}, \bar{x}_4 = 2$$

$$\underline{x}_5 = 2, \bar{x}_5 = \frac{5}{2}$$

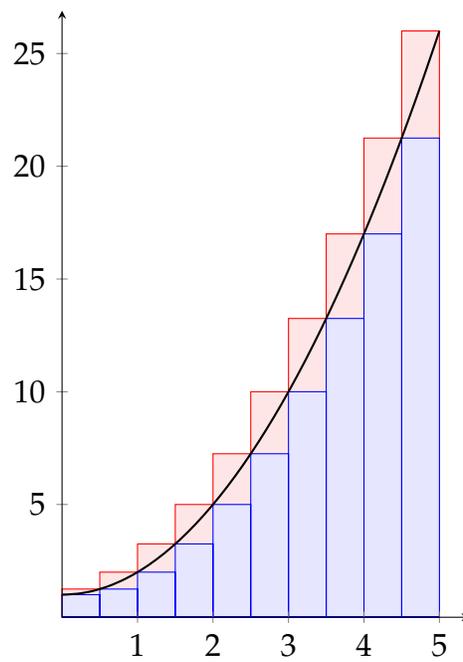
$$\underline{x}_6 = \frac{3}{2}, \bar{x}_6 = 3$$

$$\underline{x}_7 = \frac{5}{2}, \bar{x}_7 = \frac{7}{2}$$

$$\underline{x}_8 = 3, \bar{x}_8 = 4$$

$$\underline{x}_9 = \frac{7}{2}, \bar{x}_9 = \frac{9}{2}$$

$$\underline{x}_{10} = 4, \bar{x}_{10} = 5$$



Assim,

$$\begin{aligned} S_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) + f\left(\frac{9}{2}\right) + f(5) \right] = \\ &= \frac{385}{8} \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} s_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left[ f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right] = \\ &= \frac{285}{8} \end{aligned}$$

**Observação 8.** No contexto acima, é costumeiro referirmo-nos a:

$$\int_a^b f(x) dx$$

por *integral definida de f de a até b*.

## 2.5 Propriedades da Integral de Riemann

A própria definição de integrabilidade segundo Riemann nos permite deduzir diversas propriedades da integral definida, conforme apresentado nos resultados a seguir.

**Teorema 9 (Linearidade da Integral Definida).** *Sejam  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  e  $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções Riemann-integráveis. Então a função:*

$$\begin{aligned} \alpha \cdot f + \beta \cdot g : [a, b] \subset \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \end{aligned}$$

é Riemann-integrável em  $[a, b]$  e vale:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x) dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx$$

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$  uma partição de ordem  $n$  do intervalo  $[a, b]$ . Como  $f$  e  $g$  são integráveis, para qualquer escolha de  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$  teremos:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

onde  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ .

Temos, das propriedades aritméticas dos limites, que:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(\xi_i) \cdot \Delta x_i &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\alpha \cdot f)(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} (\beta \cdot g)(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \alpha \cdot \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \beta \cdot \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \\ &= \alpha \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i + \beta \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \alpha \cdot \int_a^b f(x) dx + \beta \cdot \int_a^b g(x) dx \end{aligned}$$

Ademais, tais limites independem da escolha do  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ , uma vez que as funções  $f$  e  $g$  são Riemann-integráveis.  $\square$

**Teorema 10 (Monotonicidade da Integral Definida).** *Sejam  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado,  $f, g : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  funções integráveis em  $[a, b]$  tais que para todo  $x \in [a, b]$  valha  $f(x) \leq g(x)$ . Então:*

$$\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

*Demonstração.* Dada qualquer partição de ordem  $n$  de  $[a, b]$ , digamos  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid i \in \{0, \dots, n\}\}$ , temos, para qualquer escolha de  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ,  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ , que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x) dx$$

e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

Como para qualquer que seja  $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$  tem-se  $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$ , de modo que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Pela conservação do sinal no limite, temos que:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x) dx$$

□

**Proposição 11.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função tal que  $\text{Desc}(f)$  pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então a função:

$$\begin{aligned} |f| : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto |f(x)| \end{aligned}$$

é limitada e tal que  $\text{Desc}(|f|)$  pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados.

**Proposição 12.** Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função integrável, então:

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

*Demonstração.* Temos, para qualquer  $x \in [a, b]$ :

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Decorre da monotonicidade da integral que:

$$-\int_a^b |f(x)| dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

□

O resultado a seguir decorre de forma imediata da monotonicidade da integral:

**Proposição 13.** *Sejam  $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ,  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,*

$$m = \inf\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

$$M = \sup\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

*Então, se  $f$  é Riemann-integrável, vale:*

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

O teorema a seguir é crucial para toda a teoria da integração:

**Teorema 14 (Teorema da Média Integral).** *Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua. Então existe  $c \in [a, b]$  tal que:*

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b - a)$$

*Demonstração.* Uma vez que  $f$  é, por hipótese, contínua, segue do **Teorema de Weierstrass** que existem  $\bar{x}$  e  $\underline{x}$  em  $[a, b]$  tais que:

$$f(\bar{x}) = M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$

e:

$$f(\underline{x}) = m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

Pela **Proposição 13**, tem-se:

$$m \cdot (b - a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M \cdot (b - a)$$

donde segue que:

$$m \leq \frac{1}{b - a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

Pelo **Teorema do Valor Intermediário** aplicado a  $f$ , existe algum  $c \in [a, b]$  tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

ou seja, tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c) \cdot (b-a).$$

□

Para compreender melhor o significado geométrico deste teorema, acesse o seguinte *applet*:

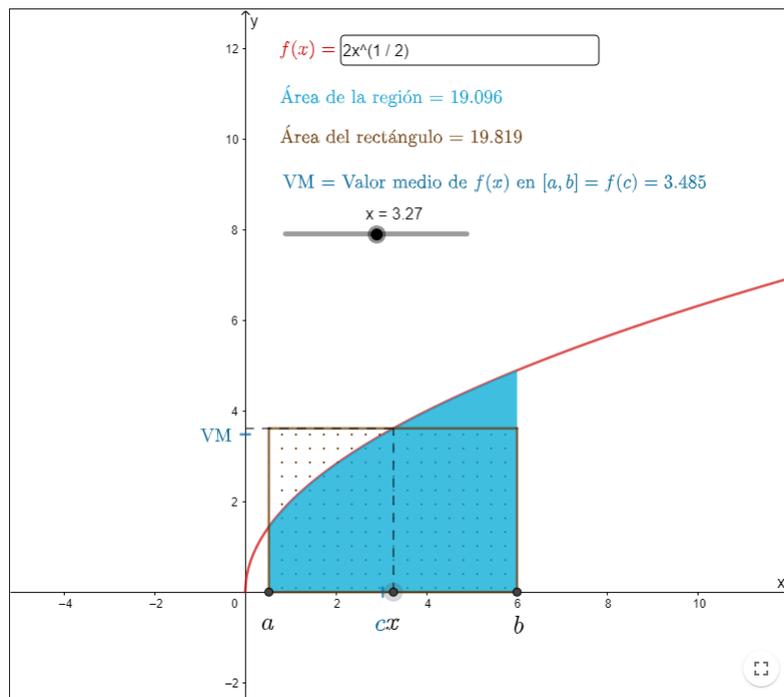


Figura 2: <https://www.geogebra.org/m/nncryupv>

No *applet* acima você pode variar o parâmetro  $b$  (clique e arraste) e, em seguida, mover o parâmetro  $x$  até obter a “**Área del rectángulo**” igual à área indicada por “**Área de la región**” (equivalentemente, até que o segmento horizontal, topo do retângulo, se alinhe com **VM**). Assim você poderá constatar que, de fato, sempre existe um ponto entre  $a$  e  $b$  tal que o retângulo

cuja base mede  $b - a$  e cuja altura mede  $f(x)$  iguala a integral definida (área sob o gráfico)<sup>2</sup>.

**Teorema 15 (Aditividade da Integral Definida).** *Se o intervalo  $[a, b]$  é subdividido em  $n$  subintervalos,  $I_1, \dots, I_n$  de tal forma que  $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ <sup>a</sup> e  $[a, b] = \cup_{i=1}^n I_i$  se para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ , é uma função integrável em  $[a, b]$ , então  $f \upharpoonright_{I_i}$  é integrável em  $I_i$ , então:*

$$f : [a, b] = \cup_{i=1}^n I_i \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto f \upharpoonright_{I_i}(x) \text{ se } x \in I_i$$

então  $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável em  $R$  e vale:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f \upharpoonright_{I_i}(x)dx$$

<sup>a</sup>na verdade não é estritamente necessário que  $\text{int}(I_i) \cap \text{int}(I_j) = \emptyset$ , basta que para quaisquer  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  tenhamos o comprimento de  $I_i \cap I_j$  igual a zero, ou seja, que  $I_i \cap I_j$  tenha “medida nula”.

*Demonstração.* Faremos a prova deste resultado por indução no número de subintervalos.

Suponha, primeiramente, que  $[a, b] = I_1 \cup I_2$  com  $\text{int}(I_1) \cap \text{int}(I_2) = \emptyset$ . Uma tal decomposição de  $[a, b]$  em dois subintervalos só pode ser da forma  $I_1 = [a, \alpha]$  e  $I_2 = [\alpha, b]$  para algum  $\alpha \in ]a, b[$ .

Dada qualquer partição  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a, b] \mid (a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b)\}$  de  $[a, b] = I_1 \cup I_2$ , com  $x_{i_0} = \alpha$  para algum  $i_0 \in \{1, \dots, n-1\}$ , temos uma partição  $\mathcal{P}_1 = \{x_i \in I_1 \mid i \in \{1, \dots, i_0\}\}$  de  $I_1$  e uma partição  $\mathcal{P}_2 = \{x_i \in I_2 \mid i \in \{i_0, \dots, n\}\}$  de  $I_2$ . Temos, assim:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i) \Delta x_i + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=i_0}^{n-1} f(\xi_i) \Delta x_i = \\ &= \int_a^\alpha f \upharpoonright_{I_1}(x)dx + \int_\alpha^b f \upharpoonright_{I_2}(x)dx, \end{aligned}$$

onde  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  é um ponto qualquer.

Deixamos a demonstração do passo indutivo a cargo do leitor. □

**Observação 16.** *Sejam  $a < b$  e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função Riemann-integrável. Então convenciona-*  
*mos que:*

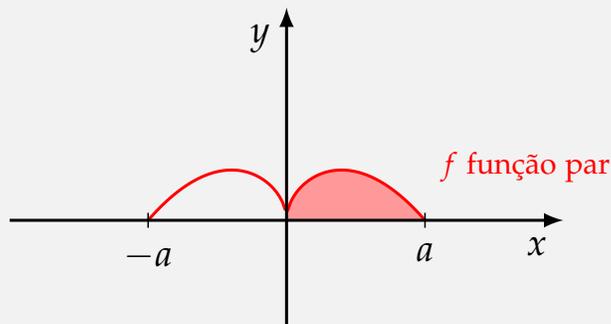
$$\int_b^a f(x)dx = - \int_a^b f(x)dx$$

<sup>2</sup>No *applet*, denota-se o nosso  $c$  por  $x$ , então fique atento(a) à notação.

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

**Proposição 17.** Se  $f : [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função par, então:

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 2 \cdot \int_0^a f(x)dx$$



*Demonstração.* Como  $f$  é par, tem-se:

$$(\forall x \in [0, a])(f(-x) = f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$g : [0, a] \rightarrow [-a, 0] \subset \mathbb{R}$$

$$x \mapsto -x$$

como  $g(0) = 0$  e  $g(a) = -a$ , segue que:

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_a^0 f(-x) \cdot \overbrace{(-1)}^{=g'(x)} dx = - \int_a^0 f(-x)dx =$$

$$\stackrel{f \text{ par}}{\stackrel{\uparrow}{=}} - \int_a^0 f(x)dx = - \left( - \int_0^a f(x)dx \right) = \int_0^a f(x)dx$$

ou seja,

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^a f(x) dx \stackrel{\text{aditividade}}{=} \int_{-a}^0 f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^a f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$$

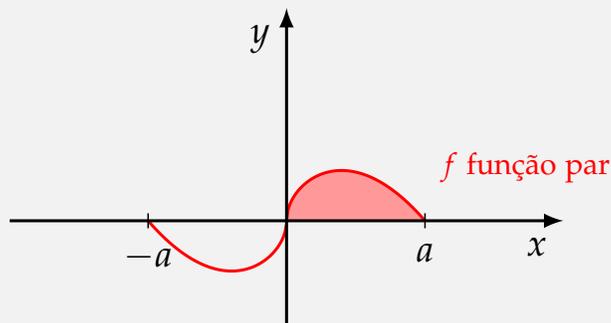
Ou seja,

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \cdot \int_0^a f(x) dx$$

□

**Proposição 18.** Se  $f : [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é uma função ímpar, então:

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$



*Demonstração.* Como  $f$  é ímpar, tem-se:

$$(\forall x \in [0, a])(f(-x) = -f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$\begin{array}{l} g : [0, a] \rightarrow [-a, 0] \subset \mathbb{R} \\ x \mapsto -x \end{array}$$

como  $g(0) = 0$  e  $g(a) = -a$ , segue que:

$$\begin{aligned} \int_{-a}^0 f(x) dx &= \int_{g(a)}^{g(0)} f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_a^0 f(-x) \cdot \overbrace{(-1)}^{=g'(x)} dx = - \int_a^0 f(-x) dx = \\ &\stackrel{f \text{ ímpar}}{=} - \int_a^0 -f(x) dx = \int_a^0 f(x) dx = - \int_0^a f(x) dx \end{aligned}$$

ou seja,

$$\int_{-a}^0 f(x)dx = - \int_0^a f(x)dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^a f(x)dx \stackrel{\text{aditividade}}{=} \int_{-a}^0 f(x)dx + \int_0^a f(x)dx = \int_0^a f(x)dx - \int_0^a f(x)dx = 0$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^a f(x)dx = 0$$

□

### 3 Aplicações da Integral

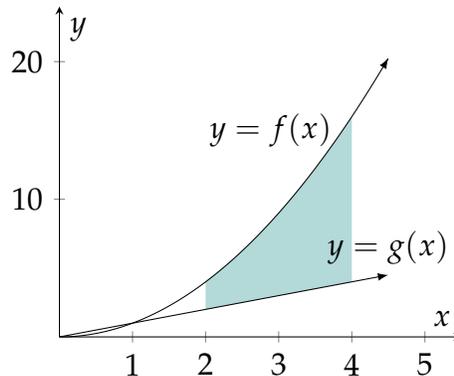
No que segue, apresentaremos algumas das aplicações da integral definida ao cálculo de áreas, comprimentos de curvas, centroides de placas homogêneas, áreas de superfícies de revolução e volumes de sólidos de revolução.

#### 3.1 Área da Região entre Gráficos

Sejam  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  funções contínuas tais que:

$$(\forall x \in [a, b])(g(x) \leq f(x))$$

Queremos calcular a área da região delimitada pelos gráficos dessas funções e pelas retas  $x = a$  e  $x = b$ .



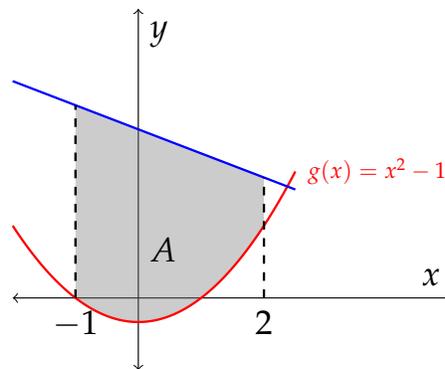
Se as funções forem ambas positivas no intervalo  $[a, b]$ , conforme ilustra a figura acima, vemos que a área procurada é a diferença entre a área sob o gráfico de  $y = f(x)$  e acima do gráfico de  $y = g(x)$ , de  $a$  até  $b$ .

Desta forma:

$$A = \int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x) = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx$$

**Exemplo 19.** Sendo  $f(x) = y = -x + 7$  e  $g(x) = x^2 - 1$ , calcular a área da região limitada pelos gráficos de  $f$ ,  $g$  e pelas retas  $x = -1$  e  $x = 2$ .

**Solução:** Inicialmente esboçamos os gráficos de  $f$  e  $g$ , isto é, representamos sem muita precisão esses gráficos, o suficiente para indicar qual está por cima e qual está por baixo, o que está feito a seguir:



Temos:

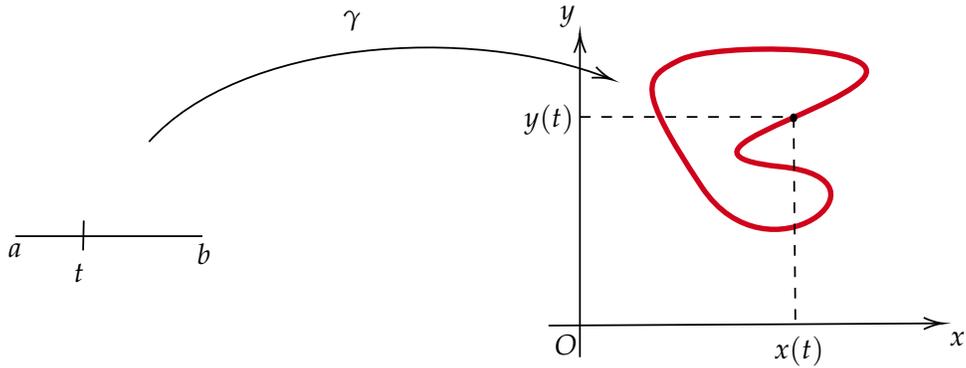
$$A = \int_{-1}^2 [(-x + 7) - (x^2 - 1)]dx = \int_{-1}^2 (8 - x - x^2)dx = \left(8x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right) \Big|_{-1}^2 = \frac{39}{2}$$

### 3.2 Cálculo do Comprimento de Curvas

Fisicamente, podemos descrever uma trajetória no plano por uma função:

$$\begin{aligned} \gamma: [a, b] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (x(t), y(t)) \end{aligned}$$

que a cada “instante”  $t \in [a, b]$  associa uma única posição (par de coordenadas,  $(x(t), y(t))$ ) no plano.



Suponhamos que  $\gamma$  descreva a trajetória de uma certa partícula. Se desejamos saber a velocidade desta partícula em um instante  $t_0$ , calculamos:

$$\gamma'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\gamma(t_0 + \Delta t) - \gamma(t_0)}{\Delta t}$$

Tendo em vista que  $\gamma(t_0 + \Delta t) = (x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t))$  e que  $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ , temos:

$$\begin{aligned} \gamma'(t_0) &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t), y(t_0 + \Delta t)) - (x(t_0), y(t_0))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{(x(t_0 + \Delta t) - x(t_0), y(t_0 + \Delta t) - y(t_0))}{\Delta t} = \\ &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = \\ &= \left( \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{x(t_0 + \Delta t) - x(t_0)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{y(t_0 + \Delta t) - y(t_0)}{\Delta t} \right) = (x'(t_0), y'(t_0)) \end{aligned}$$

Desta forma, se  $x, y : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  forem deriváveis em  $]a, b[$ , teremos  $\gamma'(t) = (x'(t), y'(t))$  para todo  $t \in ]a, b[$ .

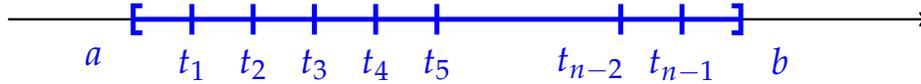
Suponhamos que  $C$  seja uma curva parametrizada, ou seja, o conjunto imagem da função  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ :

$$C = \gamma[a, b] = \{(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \mid t \in [a, b]\}$$

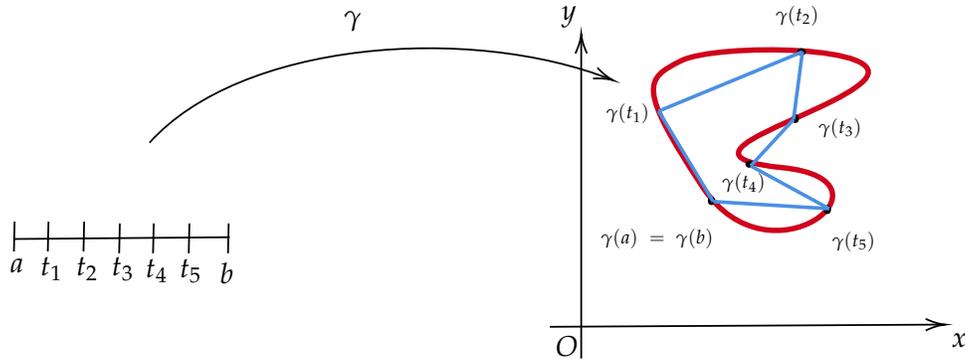
Para tanto, primeiramente particionamos o intervalo  $[a, b]$ :

$$a = t_0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n-1} \leq t_n = b$$

com  $\Delta t = t_{i+1} - t_i = \frac{b-a}{n}$  para todo  $i \in \{0, \dots, n-1\}$ .



Obtemos, assim, uma coleção de pontos no plano,  $\gamma(a) = (x(a), y(a))$ ,  $\gamma(t_1) = (x(t_1), y(t_1))$ ,  $\gamma(t_2) = (x(t_2), y(t_2))$ ,  $\dots$ ,  $\gamma(t_{n-1}) = (x(t_{n-1}), y(t_{n-1}))$ , que constituem vértices de uma linha poligonal, conforme ilustramos abaixo:



Ao tomarmos valores bem pequenos de  $\Delta t$ , o comprimento da linha poligonal é aproximadamente igual ao comprimento de  $C$ .

O comprimento do segmento de reta que une  $\gamma(t_i)$  a  $\gamma(t_{i+1})$  é:

$$\|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sqrt{[x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2 + [y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2}$$

Aplicando o **Teorema do Valor Médio** às funções  $x, y : [t_i, t_{i+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ , obtemos  $\xi_i^1$  e  $\xi_i^2$  em  $]t_i, t_{i+1}[$  tais que:

$$\begin{cases} x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(\xi_i^1) \cdot (t_{i+1} - t_i) \\ y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(\xi_i^2) \cdot (t_{i+1} - t_i) \end{cases}$$

Desta forma, o comprimento total da linha poligonal é:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \|\gamma(t_{i+1}) - \gamma(t_i)\| = \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(\xi_i^1)^2 + y'(\xi_i^2)^2} \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

Desta forma, o comprimento da curva  $C$  será tanto melhor aproximado quanto maior for  $n$  (e, conseqüentemente, menor for  $\Delta t$ ). Se supusermos que  $x', y' : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  são contínuas, existe:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{x'(\xi_i^1)^2 + y'(\xi_i^2)^2} \cdot (t_{i+1} - t_i) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Daí,

$$\ell(C) = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

**Exemplo 20.** Calcular o comprimento da circunferência de raio  $r$ , dada parametricamente por:

$$\begin{aligned} \gamma : [0, 2\pi] &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\mapsto (r \cdot \cos(t), r \cdot \sin(t)) \end{aligned}$$

**Solução:** temos:

$$\begin{cases} x(t) = r \cdot \cos(t) \\ y(t) = r \cdot \sin(t) \end{cases}$$

de modo que as derivadas são dadas por:

$$\begin{cases} x'(t) = -r \cdot \sin(t) \\ y'(t) = r \cdot \cos(t) \end{cases}$$

$$\gamma'(t) = (-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t))$$

Assim,

$$\begin{aligned} \|\gamma'(t)\| &= \|(-r \cdot \sin(t), r \cdot \cos(t))\| = \sqrt{[-r \cdot \sin(t)]^2 + [r \cdot \cos(t)]^2} = \\ &= \sqrt{r^2 \cdot \sin^2(t) + r^2 \cdot \cos^2(t)} = \sqrt{r^2 \cdot (\sin^2(t) + \cos^2(t))} = \sqrt{r^2 \cdot 1} = \sqrt{r^2} = r \end{aligned}$$

Logo,

$$\ell(C) = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r.$$

### 3.3 Cálculo do Comprimento do Gráfico de uma Função

Considere a função:

$$\begin{aligned} f : [a, b] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

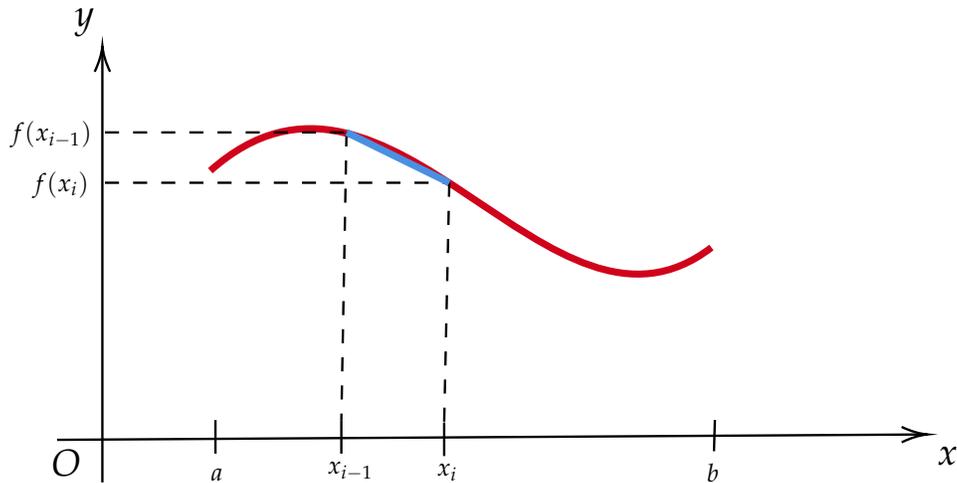
de cujo gráfico, Graf( $f$ ), queremos calcular o comprimento.

Fazemos uma partição do intervalo  $[a, b]$ :

$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < b$$

O comprimento do segmento  $\ell_i$ , que une os pontos  $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$  e  $(x_i, f(x_i))$  é dado pelo **Teorema de Pitágoras**:

$$\ell_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$



O comprimento da curva será, portanto, aproximadamente igual a:

$$\sum_{i=1}^n \ell_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}.$$

Tem-se:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} &= \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 \cdot \left[1 + \frac{(f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}{(x_i - x_{i-1})^2}\right]} = \\ &= (x_i - x_{i-1}) \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x \end{aligned}$$

de modo que:

$$\sum_{i=1}^n \ell_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x$$

Trata-se, portanto, de uma **soma de Riemann**. Novamente, pelo **Teorema do Valor Médio**, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe  $\xi_i \in ]x_{i-1}, x_i[$  tal que:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(\xi_i)$$

Assim,

$$\sum_{i=1}^n \ell_i = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x$$

O comprimento do gráfico será obtido ao tomarmos, na expressão acima, o limite conforme  $n \rightarrow \infty$ . Note que  $n \rightarrow \infty \Rightarrow |x_i - x_{i-1}| \rightarrow 0$ , e portanto:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \ell_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

$$\therefore \ell(\text{Graf}(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

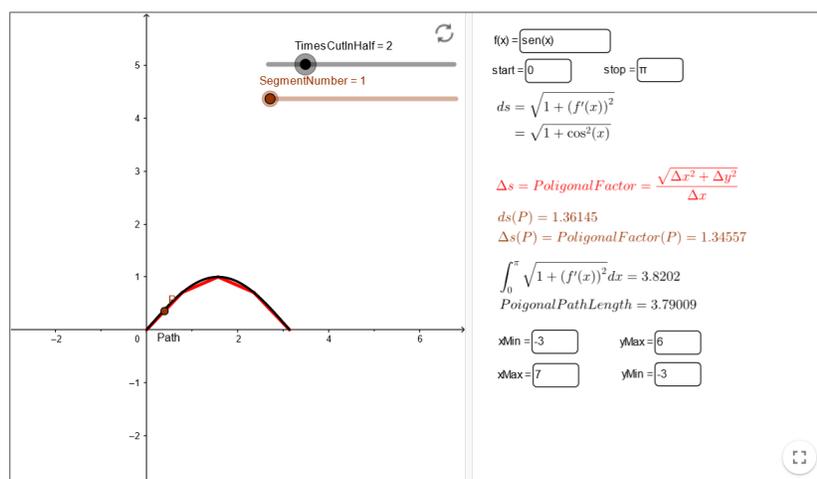
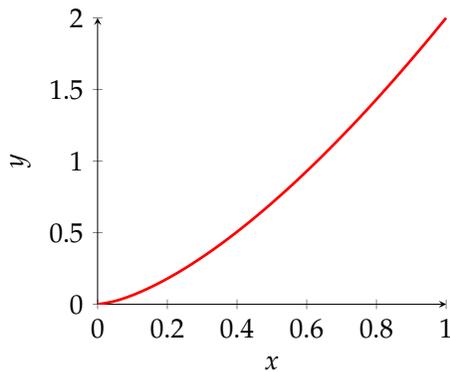


Figura 3: <https://www.geogebra.org/m/qSSPdkjy>

**Exemplo 21.** Calcular o comprimento do gráfico da função:

$$\begin{aligned} f: [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto 2x^{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$



**Solução:** Temos  $f'(x) = 3x^{\frac{1}{2}}$ , de modo que  $[f'(x)]^2 = [3x^{\frac{1}{2}}]^2 = 9x$ :

$$\ell(C) = \int_0^1 \sqrt{1 + (3x^{\frac{1}{2}})^2} dx = \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx$$

Fazendo  $u(x) = 1 + 9x$ , temos  $du = u'(x)dx = 9dx$ . Para  $x = 0$ , temos  $u(0) = 1 + 9 \cdot 0 = 1$ , e para  $x = 1$  temos  $u(1) = 1 + 9 \cdot 1 = 1 + 9 = 10$ . Assim,

$$\int_0^1 \sqrt{1 + 9x} dx = \frac{1}{9} \cdot \int_0^1 \sqrt{1 + 9x} \cdot 9 dx = \frac{1}{9} \cdot \int_1^{10} \sqrt{u} du = \frac{1}{9} \cdot \frac{2}{3} \cdot u^{\frac{3}{2}} \Big|_1^{10} = \frac{2}{27} \cdot [10 \cdot \sqrt{10} - 1]$$

O leitor poderá explorar melhor o processo de aproximação do comprimento de curvas mediante poligonais no seguinte *applet*:

### Copia de Arc Length of a curve (function) - Exact & Estimated value

Author: anonymousgeogebra, Panayiotis Panayiotou

Move sliders **a** and **b** to change the position of points **A** and **B** respectively.

Slider **n** changes the number of segments used to estimate the arc length of the curve. If **n** is big then more points are used and the line segments are very small. By adding all the line segments we estimate the arc length of the curve. You are also given the exact arc length found by integration. You can also change the function  $f(x)$ .

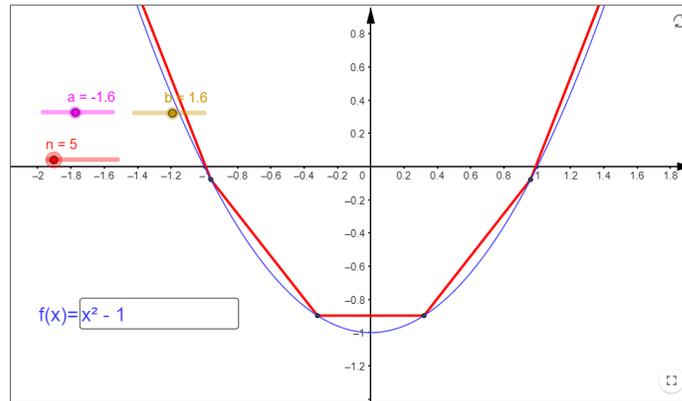


Figura 4: <https://www.geogebra.org/m/E6vENcvJ>

## 3.4 Centro de Massa uma Lâmina Delgada

Consideremos, primeiramente, um sistema de  $n$  partículas distribuídas pelo plano: a primeira localizada na posição  $(x_1, y_1)$ , de massa  $m_1$ , a segunda localizada na posição  $(x_2, y_2)$ , de massa  $m_2$  e assim por diante, até a última localizada na posição  $(x_n, y_n)$ , de massa  $m_n$ . Sabemos que o centro de massa deste sistema terá coordenadas  $(\bar{x}, \bar{y})$ , onde:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot x_i}{\sum_{i=1}^n m_i} \text{ e } \bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \cdot y_i}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Consideremos, agora, uma lâmina plana e delgada, de densidade uniforme, delimitada pelos gráficos de duas funções integráveis  $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  com  $(\forall x \in [a, b])(g(x) \leq f(x))$ . A densidade, neste caso, é dada em termos de massa por área,  $\rho = m/A$ .

Vamos subdividir o intervalo  $[a, b]$  mediante uma partição regular:

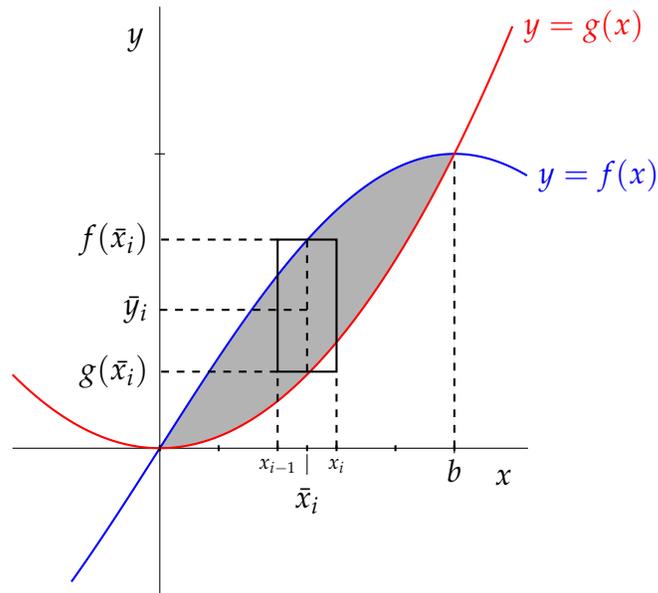
$$a < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-2} < x_{n-1} < b$$

Obtemos, desta forma,  $n$  placas aproximadamente retangulares, das quais conhecemos o centro de massa aproximado. Escolhemos, em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ , o ponto  $\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}$ . A área do  $i$ -ésimo retângulo é:

$$\Delta A_i = [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x$$

e portanto a massa do  $i$ -ésimo retângulo será:

$$\Delta m_i = \rho \cdot \Delta A_i = \rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x$$



$$\bar{x}_i = \frac{x_i + x_{i-1}}{2}$$

Assim, podemos considerar a lâmina delgada como um sistema de  $n$  partículas, sendo a  $i$ -ésima de massa  $\rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x$  localizada no centro de massa do retângulo, que tem coordenadas:

$$\bar{x}_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \text{ e } \bar{y}_i = \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2}$$

Desta forma, aplicando o que sabemos para o caso discreto, temos:

$$\bar{x}_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \bar{x}_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i}$$

e:

$$\bar{y}_c \approx \frac{\sum_{i=1}^n \rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \left( \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \right) \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n \rho \cdot [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i}$$

Obteremos os valores exatos ao tomarmos, em ambas as expressões, o limite das respectivas somas de Riemann conforme  $n \rightarrow \infty$ :

$$x_c = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \bar{x}_i \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \bar{x}_i \cdot \Delta x_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\int_a^b [f(x) - g(x)] \cdot x dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx} \\
y_c &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \left( \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \right) \cdot \Delta x_i}{\sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i} = \\
&= \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \left( \frac{f(\bar{x}_i) + g(\bar{x}_i)}{2} \right) \cdot \Delta x_i}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [f(\bar{x}_i) - g(\bar{x}_i)] \cdot \Delta x_i} = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_a^b (f(x) - g(x)) \cdot (f(x) + g(x)) dx}{\int_a^b [f(x) - g(x)] dx}
\end{aligned}$$

**Exemplo 22.** Encontrar o centroide da região plana  $R$  delimitada por cima pelo gráfico da função  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $0 \leq x \leq 4$ , por baixo pelo eixo  $Ox$  e pela direita pela reta  $x = 4$ .

**Solução:** A massa total da região é:

$$m = \rho \int_0^4 \sqrt{x} dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \Big|_0^4 = \rho \cdot \frac{2}{3} \cdot [8 - 0] = \frac{16}{3} \cdot \rho.$$

A abscissa do centroide é:

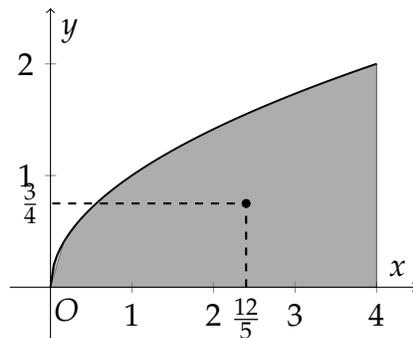
$$x_c = \frac{\rho \cdot \int_0^4 [\sqrt{x}] \cdot x dx}{\rho \cdot \int_0^4 \sqrt{x} dx} = \frac{\int_0^4 x^{\frac{3}{2}} dx}{\int_0^4 \sqrt{x} dx} = \frac{\frac{2}{5} \cdot x^{\frac{5}{2}} \Big|_0^4}{\frac{16}{3}} = \frac{\frac{2}{5} \cdot 4^{\frac{5}{2}}}{\frac{16}{3}} = \frac{12}{5}$$

enquanto que a ordenada do centroide é:

$$y_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho \cdot \int_0^4 (\sqrt{x}) \cdot (\sqrt{x}) dx}{\rho \cdot \int_0^4 \sqrt{x} dx} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\int_0^4 x dx}{\frac{16}{3}} = \frac{3}{4}$$

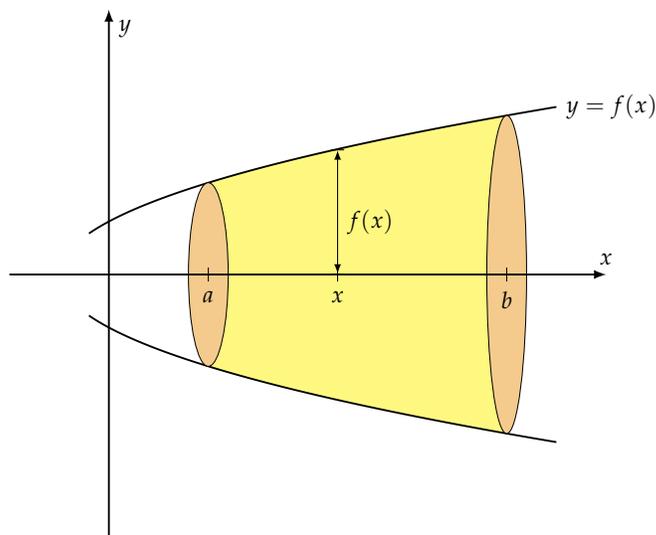
Assim, o centroide está em:

$$\left( \frac{12}{5}, \frac{3}{4} \right)$$



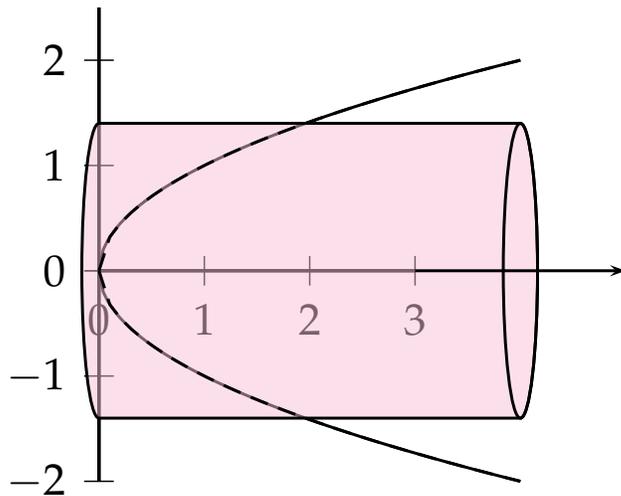
### 3.5 Volume de Sólidos de Revolução

Considere o sólido obtido pela rotação do gráfico  $y = f(x)$  em torno do eixo  $Ox$ , representado na sequência:



O sólido acima é denominado um **sólido de revolução**, pois pode ser obtido como uma região delimitada por uma superfície obtida pela revolução do gráfico de uma curva em torno de um eixo coordenado (neste caso, o eixo  $Ox$ ).

Para calcular o volume do sólido gerado pela revolução do gráfico de  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  em torno do eixo  $Ox$ , procedemos por aproximações. Primeiramente, podemos escolher um ponto  $\zeta \in [a, b]$  e aproximar o volume pelo volume de um cilindro:

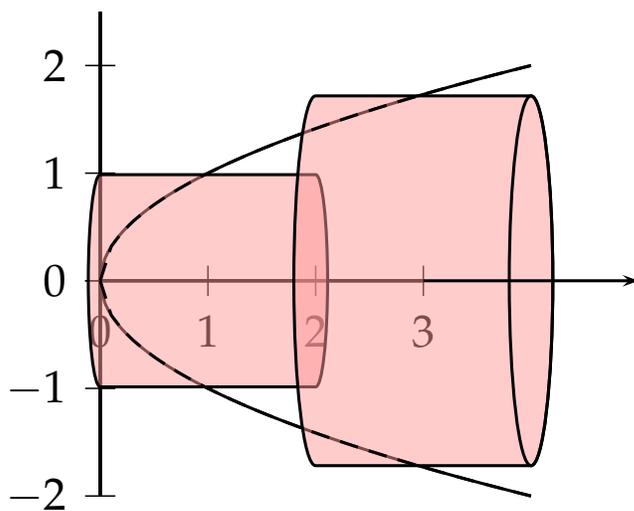


Neste caso,

$$V \approx \pi \cdot f(\tilde{\xi})^2 \cdot (b - a)$$

Esta aproximação pode ser melhorada se subdividirmos o intervalo  $[a, b]$  em dois,  $[a, x_1]$ ,  $[x_1, b]$ , onde  $x_1$  é o ponto médio de  $a$  e  $b$ . Neste caso, escolhemos  $\xi_1 \in [a, x_1]$  e  $\xi_2 \in [x_1, b]$ , de modo que o volume é aproximado por:

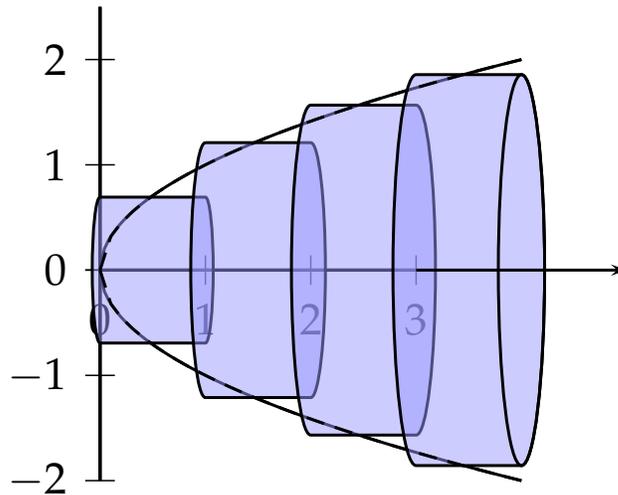
$$\begin{aligned} V &\approx \pi \cdot f(\xi_1)^2 \cdot (x_1 - a) + \pi \cdot f(\xi_2)^2 \cdot (b - x_1) = \\ &= \pi \cdot [f(\xi_1)^2 \cdot \Delta x + f(\xi_2)^2 \cdot \Delta x] = \pi \cdot \sum_{i=1}^2 f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x \end{aligned}$$



Esta aproximação pode ser melhorada ainda mais se subdividirmos o intervalo  $[a, b]$  em quatro,  $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, b]$ . Neste caso, escolhemos  $\xi_1 \in [a, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \xi_3 \in [x_2, x_3]$  e  $\xi_4 \in [x_3, b]$ , de modo que o volume á aproximado por:

$$V \approx \pi \cdot f(\xi_1)^2 \cdot (x_1 - a) + \pi \cdot f(\xi_2)^2 \cdot (x_2 - x_1) + \pi \cdot f(\xi_3)^2 \cdot (x_3 - x_2) + \pi \cdot f(\xi_4)^2 \cdot (b - x_3) =$$

$$= \pi \cdot [f(\xi_1)^2 \cdot \Delta x + f(\xi_2)^2 \cdot \Delta x + f(\xi_3)^2 \cdot \Delta x + f(\xi_4)^2 \cdot \Delta x] = \pi \cdot \sum_{i=1}^4 f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$

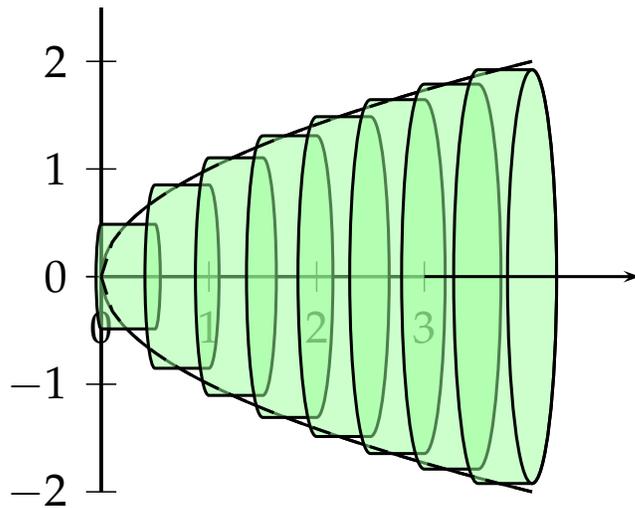


Esta aproximação pode ser melhorada ainda mais se subdividirmos o intervalo  $[a, b]$  em oito subintervalos,  $[a, x_1], [x_1, x_2], [x_2, x_3], [x_3, x_4], [x_4, x_5], [x_5, x_6], [x_6, x_7]$  e  $[x_7, b]$ . Neste caso, escolhemos  $\xi_1 \in [a, x_1], \xi_2 \in [x_1, x_2], \xi_3 \in [x_2, x_3], \xi_4 \in [x_3, x_4], \xi_5 \in [x_4, x_5], \xi_6 \in [x_5, x_6], \xi_7 \in [x_6, x_7]$  e  $\xi_8 \in [x_7, b]$ , de modo que o volume á aproximado por:

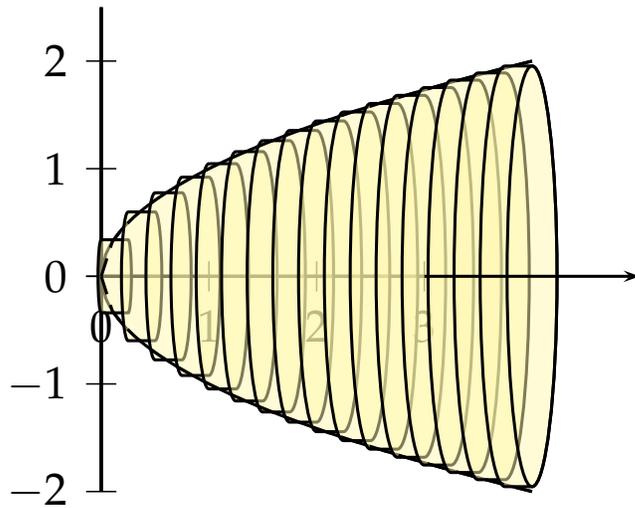
$$V \approx \pi \cdot f(\xi_1)^2 \cdot (x_1 - a) + \pi \cdot f(\xi_2)^2 \cdot (x_2 - x_1) + \pi \cdot f(\xi_3)^2 \cdot (x_3 - x_2) + \pi \cdot f(\xi_4)^2 \cdot (x_4 - x_3) +$$

$$+ \pi \cdot f(\xi_5)^2 \cdot (x_5 - x_4) + \pi \cdot f(\xi_6)^2 \cdot (x_6 - x_5) + \pi \cdot f(\xi_7)^2 \cdot (x_7 - x_6) + \pi \cdot f(\xi_8)^2 \cdot (b - x_7) =$$

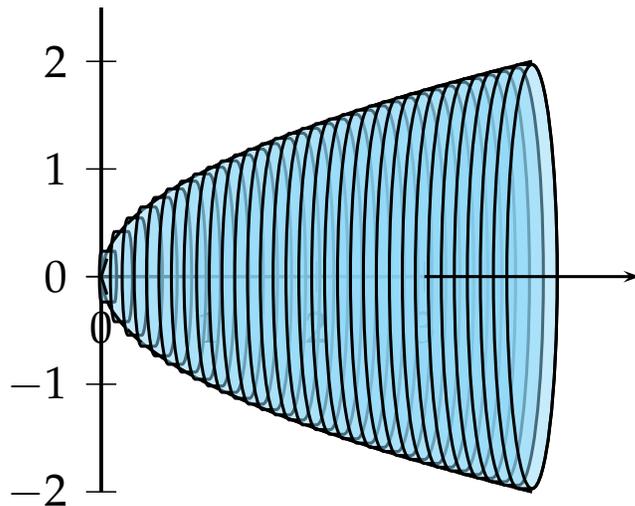
$$= \pi \cdot \sum_{i=1}^8 f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$



A seguinte figura corresponde à aproximação obtida ao subdividir o intervalo  $[a, b]$  em 16 subintervalos:

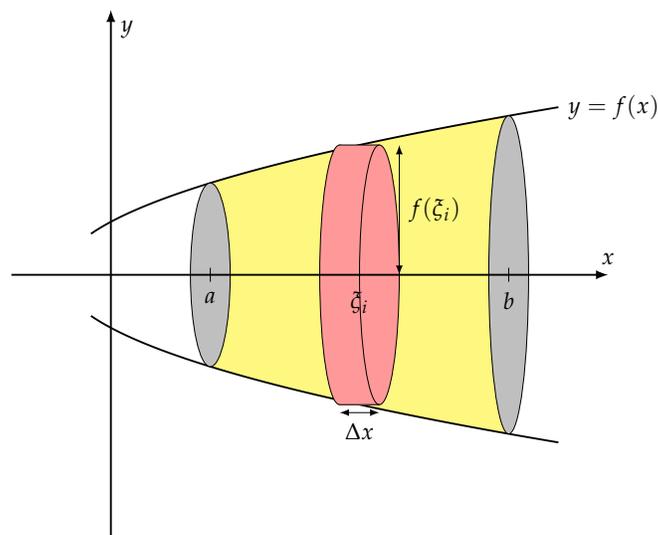


e a seguinte figura corresponde à aproximação obtida ao subdividir o intervalo  $[a, b]$  em 32 subintervalos:



Observe que quanto mais subdividimos o intervalo  $[a, b]$ , mais próximos estaremos do valor do volume delimitado pelo sólido de revolução.

Considere o sólido obtido pela rotação do gráfico  $y = f(x)$  em torno do eixo  $Ox$ , representado na sequência:



O sólido é aproximado, em cada subintervalo, por um disco cilíndrico cujo volume é:

$$\Delta V_i = \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot (x_i - x_{i-1}) = \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$

O volume do sólido será aproximado, portanto, pela soma de todos os volumes dos discos cilíndricos:

$$V = \sum_{i=1}^n \Delta V_i = \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$

Ao tomar o limite na expressão do membro direito acima, obtemos:

$$V = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x = \pi \cdot \int_a^b f(x)^2 dx$$

**Exemplo 23.** Vamos calcular o volume do elipsóide circular obtido pela rotação, em torno do eixo  $Ox$ , da curva dada por:

$$\left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-a \leq x \leq a) \& (y \geq 0) \& \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \right\}$$

Neste caso, podemos expressar  $y$  em termos de  $x$  como:

$$y(x) = b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

Assim,

$$\begin{aligned} V &= \pi \cdot \int_{-a}^a \left[ b \cdot \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \right]^2 dx = \pi \cdot \int_{-a}^a b^2 \cdot \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \pi \cdot b^2 \cdot \int_{-a}^a \left( 1 - \frac{x^2}{a^2} \right) dx = \\ &= \pi \cdot b^2 \cdot \left( \int_{-a}^a dx - \int_{-a}^a \frac{x^2}{a^2} dx \right) = \pi \cdot b^2 \cdot \left( 2a - \frac{2a}{3} \right) = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot a \cdot b^2. \end{aligned}$$

### 3.6 Área de Superfícies de Revolução

Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função de classe  $\mathcal{C}^1$  (ou seja,  $f' : ]a, b[ \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua) tal que  $(\forall x \in [a, b])(f(x) \geq 0)$ .

Ao rotacionar o gráfico de  $f$  em torno do eixo  $Ox$ , obteremos uma superfície denominada a “superfície de revolução gerada pelo gráfico de  $f$  em torno do eixo  $Ox$ ”.

Utilizaremos o processo de integração segundo Riemann para calcular a área de uma tal superfície. Para tanto, depois de particionar  $[a, b]$ , aproximaremos a superfície em cada subintervalo por um tronco de cone.

**Exercise**

Visualize the solid of revolution which is determined by the rotation of the sine function between 0 and  $2\pi$ .

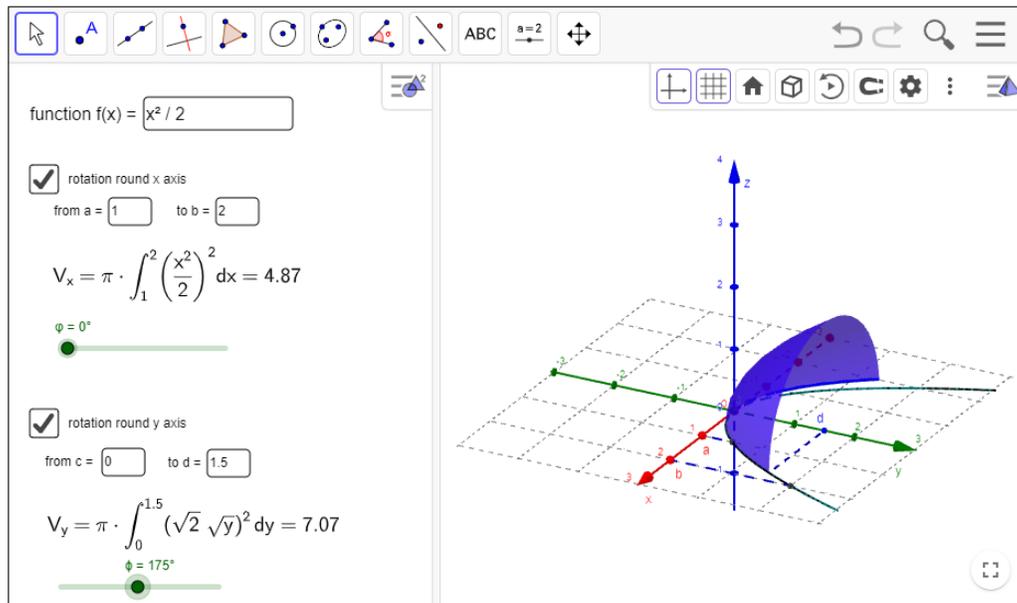


Figura 5: <https://www.geogebra.org/m/zBRtUVfR>

Convém recordarmos, portanto, o seguinte fato fundamental da Geometria Espacial:

**Área do Tronco de um Cone:**

$$A = \pi \cdot g \cdot (R + r)$$

A ideia é tomar uma partição regular,  $\mathcal{P}$ , de  $[a, b]$  e aproximar, em cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  determinado por  $\mathcal{P}$ , a área da porção da superfície de revolução delimitada pelos planos  $x = x_{i-1}$  e  $x = x_i$  pela área da superfície lateral do tronco de um cone de altura  $\Delta x$  e geratriz:

$$g_i = \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

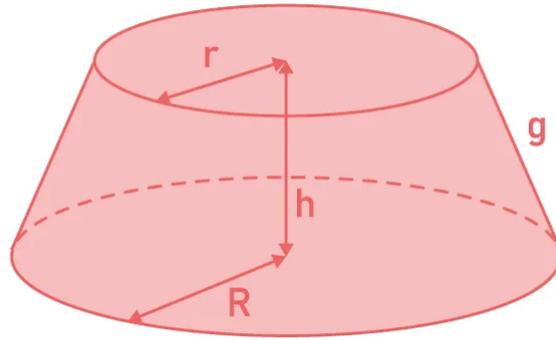
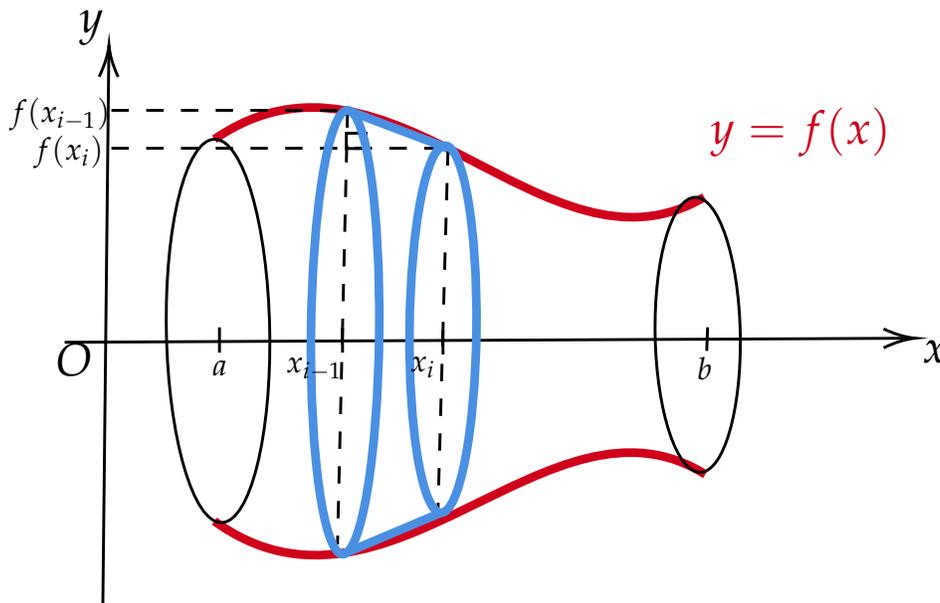


Figura 6: Elementos do tronco de um cone: altura ( $h$ ), geratriz  $g$ , raio menor ( $r$ ) e raio maior,  $R$ .



Desta forma, nosso elemento de área será dado por:

$$\Delta S_i = \pi \cdot \overbrace{\sqrt{\Delta x^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}}^{=g_i} \cdot \underbrace{(f(x_{i-1}) + f(x_i))}_{=R_i+r_i}$$

Em seguida, devemos somar os  $n$  intervalos, onde teremos uma aproximação da área de superfícies de revolução:

$$S \approx \sum_{i=1}^n \pi \cdot (f(x_{i-1}) + f(x_i)) \cdot \sqrt{\Delta x^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe algum  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que:

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{\Delta x} = f'(\xi_i)$$

para algum  $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ . Também, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$  existe algum  $\zeta_i \in [x_{i-1}, x_i]$  tal que:

$$\frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} = f(\zeta_i)$$

Assim, podemos escrever:

$$S \approx \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\zeta_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x$$

Obteremos o valor exato da área ao tomar o limite das somas de Riemann descritas acima conforme  $n \rightarrow \infty$ :

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n 2\pi \cdot f(\zeta_i) \cdot \sqrt{1 + [f'(\xi_i)]^2} \cdot \Delta x =$$

$$A = \int_a^b 2\pi \cdot f(x) \cdot \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

**Exemplo 24.** Determinar a área da superfície de revolução gerada pelo gráfico da função  $y = \sqrt{9 - x^2}$  para  $-2 \leq x \leq 2$ .

**Solução:** Neste caso, temos  $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}$ , de modo que:

$$A = \int_{-2}^2 2\pi \cdot \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{9 - x^2}}\right)^2} dx =$$

$$= 2\pi \int_{-2}^2 \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{x^2}{9 - x^2}} dx = 2\pi \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{9 - x^2} \cdot \sqrt{\frac{9 - x^2 + x^2}{9 - x^2}} dx =$$

$$= 2\pi \cdot \int_{-2}^2 \sqrt{9 - x^2} \cdot \frac{\sqrt{9}}{\sqrt{9 - x^2}} dx = 2\pi \int_{-2}^2 3 dx = 6\pi \int_{-2}^2 dx = 24\pi.$$

## Apêndice: Rudimentos da Teoria da Integral de Riemann

No texto acima, usamos apenas partições regulares dos intervalos a fim de tornar mais conveniente a apresentação. Neste apêndice apresentamos conceitos mais refinados da teoria de integração, e terminamos por exibir um exemplo de função que não é integrável de acordo com a nossa definição.

Sejam  $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$  um intervalo fechado e limitado,  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada,  $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = b\}$  uma partição qualquer de  $[a, b]$ . Sejam:

$$m_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e seja  $\Delta x_i$  o comprimento do intervalo  $[x_{i-1}, x_i]$ . As somas inferior e superior de  $f$  correspondentes à partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  são, respectivamente:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f) \cdot \Delta x_i \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f) \cdot \Delta x_i$$

Evidentemente, como  $m_i(f) \leq M_i(f)$ , tem-se que  $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$ .

Vale também vale o seguinte resultado mais forte:

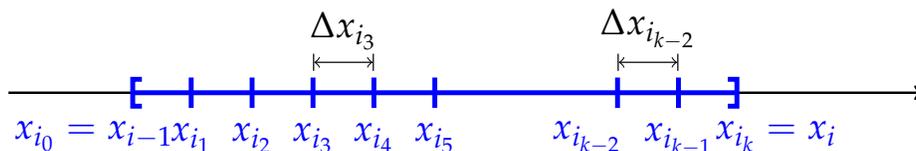
**Lema 25.** *Sejam  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  uma partição do intervalo  $[a, b]$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  uma partição do mesmo intervalo tais que todo subintervalo determinado por  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  esteja contido em algum subintervalo da partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ <sup>3</sup>. Então:*

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \quad \text{e} \quad S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$$

*Ou seja, ao refinarmos uma partição, as somas inferiores não diminuem e as somas superiores não aumentam.*

*Demonstração.* Por hipótese, cada subintervalo  $[x_{i-1}, x_i]$  determinado por  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  se subdivide em vários (digamos  $k$ ) subintervalos determinados por  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ , digamos

$$[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1} = x_{i_0}, x_{i_1}] \cup [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots \cup [x_{i_m}, x_{i_{m+1}}] \cup \cdots \cup [x_{i_{k-1}}, x_{i_k} = x_i]$$



<sup>3</sup>neste caso, dizemos que  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  é mais fina do que  $\mathcal{P}_{[a,b]}$ .

Seja, para cada  $\ell \in \{0, \dots, k-1\}$ :

$$\Delta x_{i_\ell} = |x_{i_{\ell+1}} - x_{i_\ell}|$$

Por propriedade de ínfimo de um conjunto, como  $[x_{i_{\ell-1}}, x_{i_\ell}] \subset [x_{i-1}, x_i]$ , tem-se  $m_i(f) \leq m_{i_\ell}(f)$  para todo  $\ell \in \{0, 1, \dots, k-1\}$ , de modo que:

$$\begin{aligned} m_i(f) \cdot \Delta x_i &= m_i(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \dots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \dots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} \leq \\ &\leq m_{i_0}(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_{i_1}(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \dots + m_{i_{\ell-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \dots + m_{i_{k-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} = \\ &= \sum_{j=0}^{k-1} m_{i_j}(f) \cdot \Delta x_{i_j} \end{aligned}$$

Quando tomamos a soma de todos os  $i \in \{1, \dots, n\}$  do membro esquerdo da expressão acima, obtemos:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^n m_i(f) \cdot \Delta x_i$$

enquanto que tomando a soma de todos os membros à direita da expressão acima para  $I \in \{1, \dots, n\}$ , obtemos:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=0}^{k-1} m_{i_j}(f) \cdot \Delta x_{i_j} = s(f, \mathcal{P}')$$

Desta forma,  $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]})$ . A demonstração para somas superiores é análoga.  $\square$

**Corolário 26.** Se  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  são duas partições quaisquer de  $I = [a, b]$ , tem-se  $s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$ , ou seja, a soma inferior é sempre menor (ou igual) do que a soma superior.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$ , que é uma partição mais fina do que  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e do que  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ , simultaneamente. Então:

$$s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}).$$

$\square$

Decorre do corolário acima que o limitante superior das somas inferiores de  $f$  é menor ou igual ao limitante inferior das somas superiores de  $f$ , ou seja,

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a, b]\} \leq \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a, b]\}$$

**Definição 27 (integrabilidade segundo Riemann).** Uma função  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é **Riemann-integrável em  $[a, b]$**  se:

- $f$  é limitada em  $[a, b]$ ;
- $\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$

Denotamos este número dado na igualdade acima por  $\int_{[a,b]} f(x)dx$  ou por  $\int_a^b f(x)dx$ , que denominamos **"a integral de  $f$  sobre  $[a, b]$ "**. A seguir, apresentamos a caracterização da integrabilidade de funções segundo Riemann:

**Teorema 28.** Uma função limitada  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é Riemann-integrável se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  de  $[a, b]$  tal que:

$$S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$$

*Demonstração.* Certamente que se para todo  $\varepsilon > 0$  existir uma partição  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que  $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$  tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$$

de modo que  $f$  é integrável.

Reciprocamente, se  $f$  é Riemann-integrável em  $[a, b]$ , tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a, b]\}$$

de modo que para cada  $\varepsilon > 0$  existem partições  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  e  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  tais que  $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$ . Se  $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$ , do lema segue que  $S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$ .  $\square$

**Exemplo de uma função limitada que não é Riemann-integrável:** considere:

$$f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{se } x \text{ é racional} \\ 1 & \text{se } x \text{ é irracional} \end{cases}$$

Se  $\mathcal{P}_{[0,1]}$  é qualquer partição de  $[0, 1]$ , cada subintervalo  $I_k$  por ela determinado tem sempre pontos  $x$  com  $x$  racional e com  $x$  irracional. Deste modo,  $m_k(f) = 0$  e  $M_k(f) = 1$ , e portanto:

$$s(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 0 \cdot \Delta x_{i_k} = 0$$

e:

$$S(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 1 \cdot \Delta x_{i_k} = 1$$

de modo que  $f$  não é Riemann-integrável.

Uma caracterização da Riemann-integrabilidade de uma função pode ser dada em termos do “tamanho” do conjunto onde a função é descontínua. A grosso modo, se tal conjunto for “pequeno” (em um sentido que tornaremos preciso a seguir), então a função será Riemann-integrável - e se a função for Riemann-integrável, seu conjunto de descontinuidades será “pequeno”.

**Definição 29 (medida nula).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}^2$  tem *medida nula* se para todo  $\varepsilon > 0$  existe uma cobertura  $\{I_1, \dots, I_n, \dots\}$  de  $A$ , por intervalos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon$ .

Não é difícil demonstrar que, na reta, um conjunto tem medida nula se, e somente se, este conjunto for no máximo enumerável.

**Definição 30 (conteúdo nulo).** Um subconjunto  $A \subset \mathbb{R}$  tem *conteúdo nulo* se, e somente se, para qualquer  $\varepsilon > 0$  existir uma cobertura finita  $\{I_1, \dots, I_n\}$  de  $A$  por intervalos (abertos ou fechados), de modo que  $\sum_{i=1}^n \ell(I_i) < \varepsilon$ .

Novamente, na reta, um conjunto  $A$  tem medida nula se, e somente se  $A$  for um conjunto finito.

### 3.7 A oscilação de uma função

**Definição 31 (oscilação).** Seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função. A *oscilação de  $f$  em  $[a, b]$*  é:

$$\omega(f, [a, b]) = M_{[a,b]}(f) - m_{[a,b]}(f)$$

Se  $f$  não for contínua em  $x_0$ , a medida da descontinuidade de  $f$  em  $x_0$  pode ser dada de forma precisa. Sejam, para  $\delta > 0$ :

$$M(f, x_0, \delta) = \sup\{f(x) \mid x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

e

$$m(f, x_0, \delta) = \inf\{f(x) \mid x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

A oscilação de  $f$  em  $x_0$  é:

$$\omega(f, x_0) = \lim_{\delta \rightarrow 0^+} [M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)] = \inf_{\delta > 0} \omega(f, x_0, \delta)$$

**Proposição 32.** Sejam  $[a, b]$  um intervalo e  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Tem-se, para qualquer  $x_0 \in ]a, b[$ :

$$\omega(f, x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$$

*Demonstração.* Dados  $x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , podemos escolher a notação de modo que  $f(y) \leq f(x)$ . Temos:

$$m(f, x_0, \delta) \leq f(y) \leq f(x) \leq M(f, x_0, \delta)$$

o que nos dá:

$$|f(x) - f(y)| = f(x) - f(y) = f(x) + (-f(y)) \leq M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$$

Assim,  $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$  é cota superior de  $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$ . Por outro lado, dado  $\varepsilon > 0$  podemos encontrar  $x_1, x_2 \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  tais que  $f(x_1) > M(f, x_0, \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$  e  $f(x_2) < m(f, x_0, \delta) + \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja,  $-f(x_2) > -m(f, x_0, \delta) - \frac{\varepsilon}{2}$ . Segue-se que  $|f(x_1) - f(x_2)| \geq f(x_1) - f(x_2) = f(x_1) + (-f(x_2)) > (M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)) - \varepsilon$ . Isto mostra que  $M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)$  é a menor cota superior de  $\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}$ , de modo que:

$$\omega(f, x_0, \delta) = \sup\{|f(x) - f(y)| \mid x, y \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \}.$$

□

**Observação 33.** Em virtude da **Proposição 32**, como a oscilação é o supremo de um conjunto de números não negativos, tem-se sempre  $\omega(f, x_0, \delta) \geq 0$ .

**Proposição 34.** Uma função limitada  $f : [a, b] \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  é contínua em  $x_0 \in [a, b]$  se, e somente se,  $\omega(f, x_0) = 0$ .

*Demonstração.* Suponha  $f$  contínua em  $x_0$ , de modo que para qualquer  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  implica  $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$ , ou seja:

$$(\forall x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Em particular, para qualquer  $\eta > 0$  com  $0 < \eta < \delta$ , vale:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Por definição de supremo, como  $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$  é cota superior para  $f(x)$  em  $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ , tem-se:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x) \leq M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Analogamente, para o ínfimo, temos:

$$(\forall x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left( f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \leq f(x) \right)$$

e portanto:

$$\begin{cases} M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \end{cases}$$

Segue, portanto, que para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que  $0 < \eta < \delta$  implica  $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - f(x_0) = \varepsilon$ , ou seja,  $\lim_{\delta \rightarrow 0} [M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)] = 0$ , de modo que  $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$ .

Reciprocamente, se  $\omega(f, x_0) = 0$ , então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $\delta > 0$  tal que se  $0 < \eta < \delta$  então  $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon$ .

Como para todo  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  tem-se  $f(x) \leq M(f, x_0, \eta)$  e  $-f(x_0) \leq -m(f, x_0, \eta)$ . Tem-se, assim:

$$f(x) - f(x_0) < M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Também valem que  $f(x_0) \leq M(f, x_0, \eta)$  e  $m(f, x_0, \eta) \leq f(x)$ , logo:

$$f(x_0) - f(x) \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta)$$

donde segue que:

$$m(f, x_0, \eta) - M(f, x_0, \eta) \leq f(x) - f(x_0)$$

Assim, para todo  $x \in ]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$  vale:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Segue, portanto, que  $f$  é contínua em  $x_0$ . □

**Lema 35.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e  $x_0 \in ]a, b[$ . Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada e  $\omega(f, x_0) < c$ , então existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x) < c$  para todo  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ .*

*Demonstração.* Pela definição de limite, como  $\omega(f, x_0) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \omega(f, x_0, \eta) < c$ , existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x_0, \delta) < \delta$ . Dado qualquer  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ , tomamos  $\zeta > 0$  com  $]x - \zeta, x + \zeta[ \subset ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$  e obtemos:

$$\omega(f, x) \leq \omega(f, x, \eta) \leq \omega(f, x_0, \delta) < c$$

□

**Lema 36.** *Seja  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado. Se  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  é limitada, dado  $\varepsilon > 0$ , tem-se que o conjunto:*

$$B = \{x_0 \in [a, b] \mid \omega(f, x_0) \geq \varepsilon\}$$

*é fechado em  $\mathbb{R}$ .*

*Demonstração.* Mostraremos que  $\mathbb{R} \setminus B$  é aberto.

Note que:

$$B = [a, b] \cap \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$$

e portanto:

$$\mathbb{R} \setminus B = (\mathbb{R} \setminus [a, b]) \cup \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$$

Assim, dado  $x \in \mathbb{R} \setminus B$ , tem-se  $x \notin [a, b]$  ou  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . No primeiro caso, como  $[a, b]$  é fechado e portanto  $\mathbb{R} \setminus [a, b]$  é aberto, existe um intervalo aberto  $C$  que contém  $x$  tal que  $C \subset \mathbb{R} \setminus [a, b] \subset \mathbb{R} \setminus B$ .

Tomemos  $x_0 \in \{(x, y) \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$ . Pelo **Lema 35**, tem-se que existe  $\delta > 0$  tal que  $\omega(f, x) < \varepsilon$  para todo  $x \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ . Segue disto que  $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \subset \{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) < \varepsilon\}$ , de modo que este conjunto é aberto e seu complementar,  $\{x \in \text{dom}(f) \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$  é fechado. Segue que  $\mathbb{R} \setminus B$ , por ser união de intervalos abertos, é aberto, e portanto  $B$  é fechado.  $\square$

**Lema 37.** *Sejam  $\varepsilon > 0$ ,  $[a, b]$  um intervalo fechado e limitado e seja  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada tal que para todo  $x \in [a, b]$  tenhamos  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . Então existe uma partição  $\mathcal{P}_{[a, b]}$  de  $[a, b]$  com  $S(f, \mathcal{P}_{[a, b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a, b]}) < \varepsilon \cdot |b - a|$ .*

*Demonstração.* Dado qualquer  $x \in [a, b]$ , existe um intervalo fechado  $R_x$  que contém  $x$  em seu interior e tal que  $M_{R_x}(f) - m_{R_x}(f) < \varepsilon$ , de modo que  $\{\text{int}(R_x) \mid x \in [a, b]\}$  constitui uma cobertura aberta de  $[a, b]$ . Sendo  $[a, b]$  compacto (fechado e limitado), uma quantidade finita de conjuntos da forma  $\text{int}(R_x)$  recobre  $[a, b]$ , digamos  $\{\text{int}(R_{x_i}) \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ . Seja  $\mathcal{P}_{[a, b]}$  uma partição de  $[a, b]$  tal que cada subintervalo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}_{[a, b]}$  está contido em algum  $\text{int}(R_{x_i})$  para  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Tem-se, então,  $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$ , de modo que  $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell(S) < \varepsilon \cdot \ell(R)$ .  $\square$

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma função seja Riemann-integrável, a saber, que o conjunto de suas descontinuidades tenha medida nula.

**Teorema 38.** *Sejam  $I$  um intervalo e  $f : I \rightarrow \mathbb{R}$  uma função limitada. Se  $\text{Desc}(f)$  tem medida nula então  $f$  é Riemann-integrável em  $I$ .*

*Demonstração.* Suponhamos que  $\text{Desc}(f)$  tenha medida nula. Dado  $\varepsilon > 0$ , seja  $B_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$ . Então  $B_\varepsilon \subset B$ , de modo que  $B_\varepsilon$  também tem medida nula. Uma vez que  $B_\varepsilon$  é fechado e limitado, segue que  $B_\varepsilon$  é compacto, e portanto tem conteúdo nulo. Assim, existe uma coleção finita de intervalos fechados,  $U_1, \dots, U_n$  tais que  $B_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^n \text{int.}(U_i)$  e que  $\sum_{i=1}^n \ell(U_i) < \varepsilon$ .

Seja  $\mathcal{P}$  uma partição de  $I$  tal que cada subintervalo  $S$  determinado por  $\mathcal{P}$  esteja em um dos dois seguintes grupos:

- (1)  $S_1$ , que consiste dos subintervalos  $S$  tais que  $S \subset U_i$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ ;
- (2)  $S_2$ , que consiste dos subintervalos  $S$  tais que  $S \cap B_\varepsilon = \emptyset$ .

Como  $f$  é limitada, seja  $M > 0$  tal que:

$$(\forall x \in I)(|f(x)| < M).$$

Tem-se  $M_S(f) - m_S(f) < 2M$  para cada  $S$ . Portanto,

$$\sum_{S \in S_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell(S) < 2M \sum_{i=1}^n \ell(U_i) < 2M\varepsilon$$

Se  $S \in S_2$ , tem-se para todo  $x \in S$ ,  $\omega(f, x) < \varepsilon$ . Pelo **Lema 37**, existe uma partição  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ , mais fina do de  $\mathcal{P}_{[a,b]}$  tal que:

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell(S') < \varepsilon \cdot \ell(S),$$

para  $S \in S_2$ . Então:

$$\begin{aligned} S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) &= \sum_{S' \subset S \in S_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell(S') + \\ &+ \sum_{S' \subset S \in S_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell(S') < 2M\varepsilon + \sum_{S \in S_2} \varepsilon \cdot \ell(S) \leq \\ &\leq 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot \ell([a, b]) \end{aligned}$$

Como  $M$  e  $\ell([a, b])$  são números fixados, isto mostra que se pode encontrar uma partição  $\mathcal{P}'_{[a,b]}$  com  $S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]})$  tão pequeno quanto se queira. Desta forma,  $f$  é Riemann-integrável.  $\square$

## Referências

- [1] ÁVILA, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.
- [2] FLEMMING, D.M. E GONÇALVES, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6ª edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.
- [3] GUIDORIZZI, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5ª edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.
- [4] SPIVAK, M., **Cálculo en Variedades**, Editorial Reverté S.A. Barcelona, 2017.
- [5] <https://www.dicasdecalculo.com.br/conteudos/integrais/aplicacoes-das-integrais/area-de-superficies-de-revolucao/>