MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Agenda 02

Prof. Jean Cerqueira Berni*

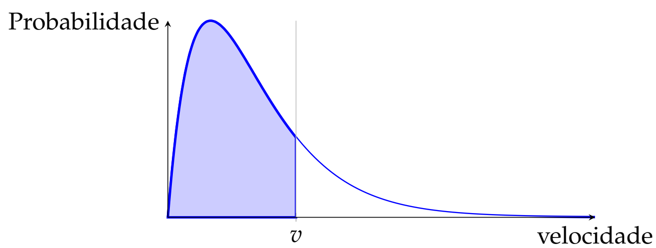
Apresentação

A integral definida (*i.e.*, a integral de Riemann) de uma função pressupõe que a função seja **limitada** e que o **intervalo de integração também seja limitado**. Nesta agenda, vamos estender o conceito de integral de Riemann para casos em que pelo menos uma destas condições não esteja satisfeita.

Tais integrais são extremamente necessárias para a formalização de diversos conceitos de muitas teorias. Por exemplo, na Teoria Cinética de Gases, lida-se com integrais do tipo:

$$I_n(\beta) = \int_0^{\infty} x^{2n+1} \cdot e^{-\beta \cdot x^2} dx, \ \ \beta > 0, n > -1$$

Para "normalizar" uma função f e descrevê-la como uma "função de distribuição de probabilidades" (f.d.p.), frequentemente é necessário calcular uma integral imprópria.



Não raro é útil, na resolução de certos tipos de equações diferenciais, definirmos uma função g (de variável, digamos, ω) em termos de uma integral imprópria envolvendo outra, f (de variável x), na forma:

$$g(\omega) = \int_a^b f(x) \cdot k(\omega, x) dx$$

*jeancb@ime.usp.br

Nestes casos, a função g é chamada **transformada integral de f mediada pelo núcleo k.** No caso em que o núcleo desta transformação é $k(\omega, x) = e^{i\cdot\omega\cdot x}$, temos:

$$\mathscr{F}(f)(\omega) = g(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{i\cdot\omega\cdot x} dx,$$

a **transformada de Fourier de f**. No caso em que o núcleo é $k(s, x) = e^{-s\cdot x}$, temos:

$$\mathscr{L}(f)(s) = g(s) = \int_{0}^{\infty} e^{-s\cdot x} \cdot f(x) dx,$$

a **transformada de Laplace de f**, da qual faremos comentários nesta agenda.

Ao trabalhar com espaços vetoriais de certos tipos de funções, convém definir o produto interno mediante uma integral da forma:

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot g(x) dx$$

Note que estas transformadas integrais envolvem integrais sobre intervalos *ilimitados*, das quais a *Riemann-integrabilidade* estudada na agenda anterior não nos dá conta.

Veremos, primeiramente, uma motivação para definirmos e estudarmos as integrais impróprias, apresentando alguns exemplos de como resolvê-las. Na sequência veremos um resultado que nos garante a convergência de certas integrais impróprias – apresentando algumas aplicações – e outro que nos garante a divergência de outras. Apresentaremos o conceito de função absolutamente convergente, função de ordem exponencial e veremos alguns conceitos em que se ancora o estudo da transformada de Laplace.

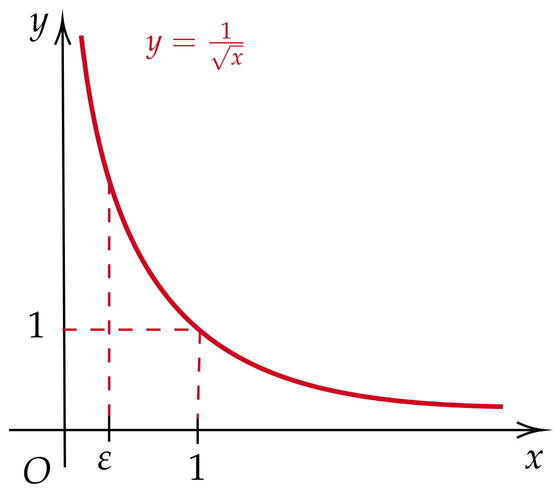
Encarramos a agenda apresentando como calcular, na prática, a "integral de uma função com descontinuidades no interior de seu domínio".

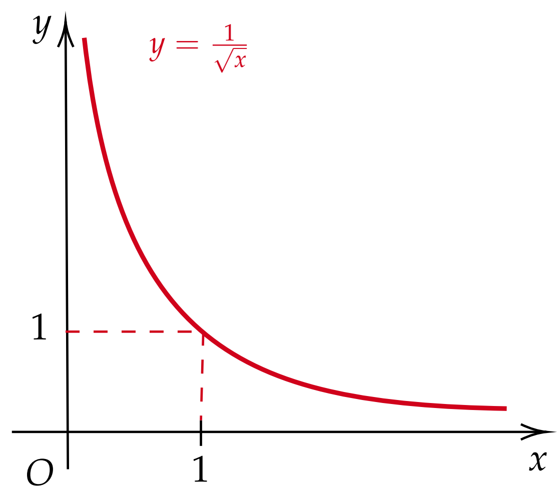
1 Integrais Impróprias

Motivação: Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x}} \end{array}$$

Se desejarmos integrá-la no intervalo $[0, 1]$, não poderemos fazê-lo no sentido usual, uma vez que a função em apreço não só é **ilimitada** como não está definida no extremo esquerdo do intervalo $[0, 1]$. No entanto, podemos considerar sua integral em qualquer subintervalo de $[0, 1]$ da forma: $[\varepsilon, 1]$, com $0 < \varepsilon < 1$, como segue:





$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_{\varepsilon}^{1} = 2 \cdot (1 - \sqrt{\varepsilon})$$

Como esta expressão tem limite 2 conforme ε tende a 0 pela direita, isto é:

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} 2 \cdot (1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2,$$

definimos o que chamamos de **integral imprópria** de $1/\sqrt{x}$ no intervalo $[0, 1]$ como sendo esse limite:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}} \overset{\text{def.}}{=} \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

Geometricamente, interpretamos isto como “a área da região compreendida entre a curva $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, o eixo Ox e as retas $x = 0$ e $x = 1$, embora ilimitada, tem área finita e igual a 2”.

A definição a seguir estende o conceito de integrabilidade segundo Riemann para funções que não são, necessariamente, limitadas.

Definição 1. *Seja* $f :]a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função Riemann-integrável em qualquer subintervalo da forma* $[a + \varepsilon, b]$*, com* $0 < \varepsilon < b - a$*. Se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx = L,$$

dizemos que L *é a* ***integral imprópria*** *de* f *no intervalo* $[a, b]$*, e escrevemos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

Analogamente, temos a seguinte:

Definição 2. *Seja* $f : [a, b[\subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função Riemann-integrável em qualquer subintervalo da forma* $[a, b - \varepsilon]$*, com* $0 < \varepsilon < b - a$*. Se*

$$\lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx = L,$$

dizemos que L *é a* ***integral imprópria*** *de* f *no intervalo* $[a, b]$*, e escrevemos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

Naturalmente que se f for contínua, ou mesmo contínua por partes em $[a, b]$, o limite das definições anteriores será a própria integral de Riemann de f em $[a, b]$.

Podemos, também, estender a noção de integrabilidade segundo Riemann para intervalos ilimitados, como na seguinte:

Definição 3. *Seja* $f : [a, \infty[\to \mathbb{R}$ *uma função tal que, para todo* $R > a$ *existe:*

$$\int_a^R f(x)dx = I_R \in \mathbb{R}$$

Se existir:

$$\lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dizemos que f ***é integrável em*** $[a, \infty[$*, e que a* ***integral imprópria de*** f ***em*** $[a, \infty[$ ***é:***

$$\int_a^\infty f(x)dx \overset{def.}{=} \lim_{R \to \infty} \int_a^R f(x)dx$$

Caso não exista:

$$\lim_{R\to\infty}\int_a^R f(x)dx$$

dizemos que a integral imprópria *diverge*.

Definição 4. *Seja* $f :]-\infty, b] \to \mathbb{R}$ *uma função tal que, para todo* $R < b$ *existe:*

$$\int_R^b f(x)dx = I_R \in \mathbb{R}$$

Se existir:

$$\lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx \in \mathbb{R},$$

dizemos que f ***é integrável em*** $]-\infty, b]$*, e que a* ***integral imprópria de*** f ***em*** $]-\infty, b]$ ***é:***

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx \overset{def.}{=} \lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx$$

Caso não exista:

$$\lim_{R\to-\infty}\int_R^b f(x)dx$$

dizemos que a integral imprópria *diverge*.

As expressões "a integral imprópria converge" e "a função f é integrável", nestes contextos estendidos, serão usadas com frequência para indicar a existência e finitude desses limites.

Exemplo 5. *Calcular:*

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot x dx,$$

onde $s > 0$*.*

Solução: *por definição, temos:*

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot x dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-s\cdot x}\cdot x dx$$

Para $R > 0$*, resolvemos à parte a integral definida:*

$$\int_0^R e^{-s\cdot x}\cdot x dx$$

Fazendo $u = x$ e $dv = e^{-s\cdot x}dx$, temos:

$$\int e^{-s\cdot x}\cdot x dx = -\frac{x\cdot e^{-s\cdot x}}{s} + \frac{1}{s}\int e^{-s\cdot x}dx = -\frac{x\cdot e^{-s\cdot x}}{s} - \frac{1}{s^2}\cdot e^{-s\cdot x}$$

Assim,

$$\int_0^R e^{-s\cdot x}\cdot x dx = \left[-\frac{x\cdot e^{-s\cdot x}}{s} - \frac{1}{s^2}\cdot e^{-s\cdot x}\right]_0^R = \left(-\frac{R\cdot e^{-s\cdot R}}{s} - \frac{1}{s^2}\cdot e^{-s\cdot R}\right) - \left(-\frac{1}{s^2}\right) =$$

$$= -e^{-s\cdot R}\cdot\left(\frac{R\cdot s+1}{s^2}\right) + \frac{1}{s^2}$$

Logo,

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot x dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R e^{-s\cdot x}\cdot x dx = \lim_{R\to\infty} -e^{-s\cdot R}\cdot\left(\frac{R\cdot s+1}{s^2}\right) + \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^2}$$

Analisemos um exemplo em que a integral imprópria *diverge* – ou seja, é infinita:

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x} = \ln(x)\Big|_\varepsilon^1 = -\ln(\varepsilon)$$

Sabemos que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} -\ln(\varepsilon) = \infty,$$

de modo que a função $f(x) = 1/x$ não é integrável no intervalo $[0,1]$, nem mesmo no sentido impróprio, apresentado acima.

Geometricamente, isso significa que a área da figura delimitada pelo gráfico de $y = 1/x$, pelos eixos coordenados e pela reta $x = 1$, não é finita. Já obtivemos, em nosso primeiro exemplo, o valor 2 para a integral imprópria de $f(x) = 1/\sqrt{x}$ em $[0,1]$.

A função $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é um caso particular de funções do tipo:

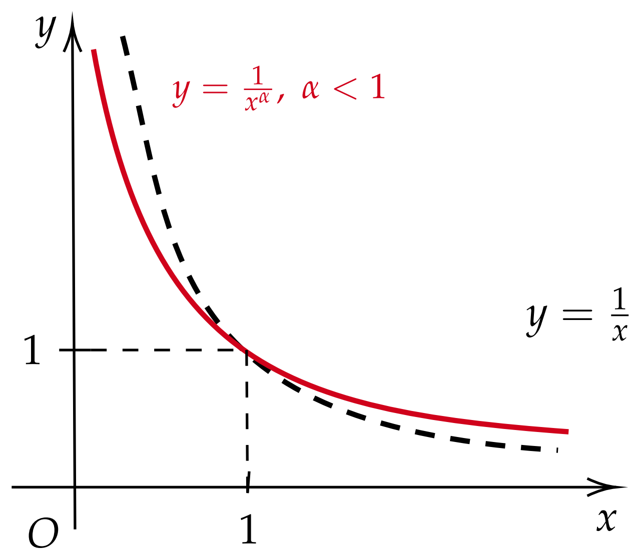
$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

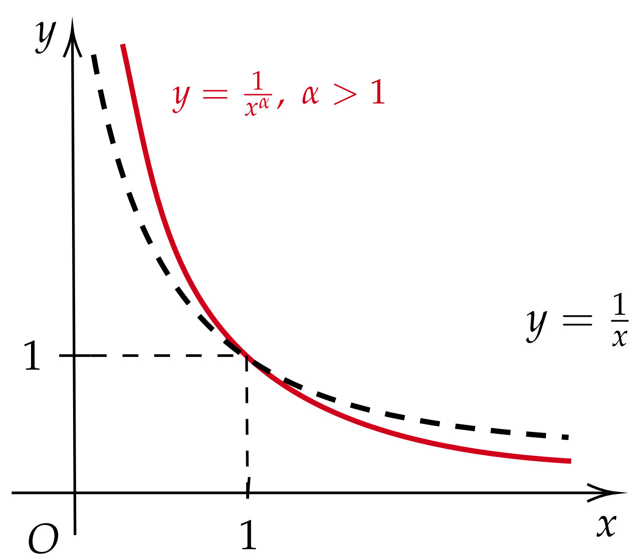
para $\alpha = 1$, e que essas funções, consideradas no intervalo $[0,1]$ são integráveis se $\alpha < 1$ e não são integráveis se $\alpha \geq 1$. De fato, supondo $\alpha \neq 1$, podemos escrever:

$$\int_{\varepsilon}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \int_{\varepsilon}^{1} x^{-\alpha} dx = \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_{\varepsilon}^{1} = \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha}$$

de modo que, se $\alpha < 1$, a função é integrável em $[0, 1]$, e temos:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \frac{1-\varepsilon^{1-\alpha}}{1-\alpha} = \frac{1}{1-\alpha}.$$





Por outro lado, se $\alpha > 1$,

$$\varepsilon^{1-\alpha} = \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}}$$

de modo que:

$$\lim_{\varepsilon\to 0_+} \frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} = \infty$$

Consequentemente,

$$\int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \lim_{\varepsilon\to 0_+} \left(\frac{1}{\varepsilon^{\alpha-1}} - 1\right) = \infty$$

e a função $y = 1/x^\alpha$ não é integrável neste caso.

Podemos resumir o que expusemos acima no seguinte enunciado:

> A função $f(x) = \dfrac{1}{x^\alpha}$ é integrável no intervalo $[0, 1]$ se $\alpha < 1$ e não é integrável em $[0, 1]$ se $\alpha \geq 1$.

Em contraste com o que ocorre na origem, a função:

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$$

é integrável no intervalo $[1, \infty[$ se $\alpha > 1$ e não é integrável no mesmo intervalo se $\alpha \leq 1$. De fato, supondo $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^R \frac{dx}{x^\alpha} = \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\bigg|_1^R = \frac{1}{\alpha-1} \cdot \left(1 - \frac{1}{R^{\alpha-1}}\right),$$

expressão esta que, conforme $R \to \infty$, converge se $\alpha > 1$ e diverge se $\alpha > 1$. No caso em que $\alpha = 1$, temos:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to\infty} \ln(R) = \infty$$

Assim, a área delimitada pelo semi-eixo Ox, de 1 a ∞, pela reta $x = 1$ e pela curva $y = \frac{1}{x^\alpha}$ é finita se $\alpha > 1$ e infinita se $\alpha \leq 1$.

Muitas outras integrais impróprias podem ser tratadas como os casos analisados acima.

Exemplo 6. *Consideremos a integral imprópria:*

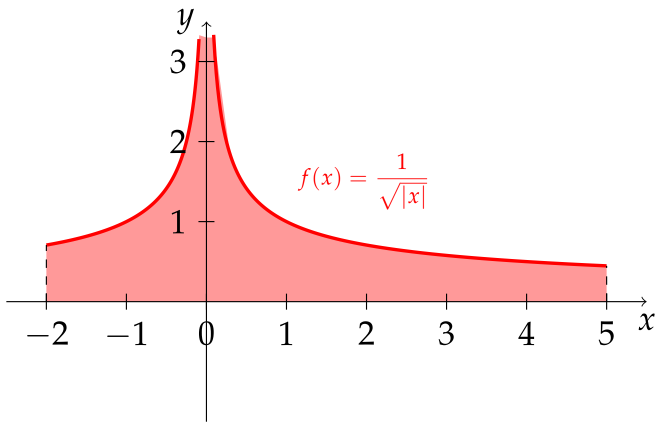
$$\int_{-2}^5 \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$

Na verdade, como a singularidade $x = 0$ é interna ao intervalo de integração, temos aqui <u>duas</u> intergrais impróprias.

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} \quad e \quad \int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{|x|}},$$

pois podemos escrever:

$$\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} + \int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{|x|}}$$



Calculando, separadamente, essas duas integrais, obtemos:

$$\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x}} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{-2}^{-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{-x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} [-2\sqrt{-x}]_{-2}^{-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} 2 \cdot (\sqrt{2} - \sqrt{\varepsilon}) = 2\sqrt{2}.$$

$$\int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{|x|}} = \int_{0}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \to 0_+} \int_{\varepsilon}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0_+} 2 \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{\varepsilon}) = 2 \cdot \sqrt{5}$$

Então:

$$\int_{-2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \cdot \sqrt{2} + 2 \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot (\sqrt{2} + \sqrt{5}).$$

Geometricamente, esta integral representa a área delimitada pela curva $y = 1/\sqrt{|x|}$, o eixo Ox e as retas $x = -2$ e $x = 5$.

Exemplo 7. *A função $f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$ é a derivada de $\frac{1}{(1-x)}$, de sorte que:*

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{0} \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{1-x} \right]_{-R}^{0} = \lim_{R \to \infty} \left(1 - \frac{1}{1+R} \right) = 1.$$

Exemplo 8. *Calcular a velocidade de escape, v_0, necessária para lançar um foguete de massa m para fora do campo gravitacional de um planeta de massa M e raio r_0. Use a Lei da Gravitação de Newton e o fato de que a energia cinética inicial de $\frac{1}{2} \cdot mv_0^2$ supre o trabalho necessário.*

*Pelo **Teorema da Energia Cinética**, o trabalho será igual à variação da energia cinética:*

$$K_f - K_0 = W$$

Queremos que o foguete chegue "no infinito" com velocidade nula, ou seja, $K_f = 0$. Assim,

$$-\frac{mv_0^2}{2} = \int_{r_0}^{\infty} -\frac{G \cdot M \cdot m}{r^2} dr$$

$$-\frac{\cancel{m} \cdot v_0^2}{2} = -G \cdot M \cdot \cancel{m} \int_{r_0}^{\infty} \frac{dr}{r^2}$$

$$-\frac{v_0^2}{2} = -G \cdot M \cdot \lim_{R \to \infty} \int_{r_0}^{R} \frac{dr}{r^2} = -G \cdot M \cdot \lim_{R \to \infty} \left[\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r} \right] = -\frac{G \cdot M}{r_0}$$

$$v_0^2 = \frac{2 \cdot G \cdot M}{r_0}$$

$$\therefore v_0 = \sqrt{\frac{2 \cdot G \cdot M}{r_0}}$$

2 Estudo da Convergência de Integrais Impróprias

Em muitos casos, é suficiente determinar se uma dada integral imprópria converge ou diverge, e estimar seu valor. Os seguintes teoremas são úteis para este fim:

Teorema 9 (Primeiro Critério de Comparação). *Se para todo $x \geq a$ valer a desigualdade:*

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

e se $\int_a^{\infty} \varphi(x)dx$ converge, então $\int_a^{\infty} f(x)dx$ converge e:

$$\int_a^{\infty} f(x)dx \leq \int_a^{\infty} \varphi(x)dx$$

Demonstração. Como para todo $x \geq a$ tem-se $0 \leq f(x)$, a função dada por:

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & R & \mapsto & \displaystyle\int_a^R f(x)dx \end{array}$$

é crescente.

Também, como para todo $x \geq a$ temos:

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

pela monotonicidade da integral, tem-se para todo $R > 0$:

$$0 \leq \int_a^R f(x)dx \leq \int_a^R \varphi(x)dx$$

Como:

$$\int_a^\infty \varphi(x)dx < \infty$$

segue que:

$$\int_a^R f(x)dx \leq \int_a^R \varphi(x)dx \leq \int_a^\infty \varphi(x)dx$$

Sendo F crescente e tal que:

$$(\forall R > a)\left(F(R) \leq \int_a^\infty \varphi(x)dx\right)$$

segue que:

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx = \int_a^\infty f(x)dx \leq \int_a^\infty \varphi(x)dx.$$

$\square$

Exemplo 10. *Investigar o comportamento da integral:*

$$\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 \cdot (1+e^x)}$$

quanto à sua convergência.

Solução: *Observamos que, para $x \geq 1$ temos:*

$$x^2 < x^2 \cdot (1+e^x),$$

de modo que:

$$\frac{1}{x^2 \cdot (1+e^x)} < \frac{1}{x^2}$$

Como:

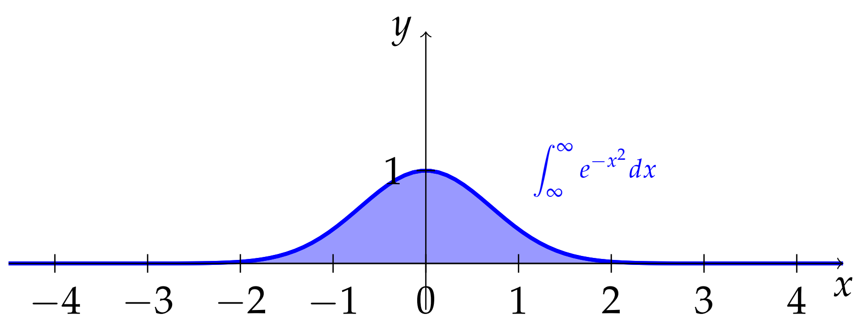
$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \lim_{R \to \infty} \left[1 - \frac{1}{R}\right] = 1,$$

segue do ***Teorema 9*** *(****Primeiro Critério de Comparação****) que* $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2 \cdot (1+e^x)}$ *converge para um valor menor ou igual a* 1.

Exemplo 11. *Uma integral imprópria extremamente importante, sobretudo em Probabilidade e Estatística, é a integral:*

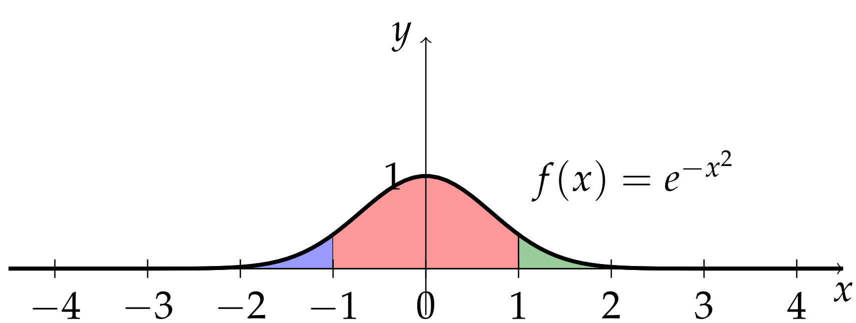
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

que mostraremos ser convergente.



Podemos decompô-la como:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$$



Note que:

$$(\forall x \in [-1,1])(e^{-x^2} \leq 1),$$

de modo que pela monotonicidade da integral, temos:

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2} dx \leq \int_{-1}^{1} dx = 2$$

Observando que $t \mapsto e^{-t^2}$ é uma função par, é fácil verificar que:

$$\int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2} dx = \int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Vamos demonstrar que a integral imprópria:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

é convergente mostrando que:

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

converge.

Para todo $x \geq 1$, temos:

$$x \leq x^2$$

de modo que:

$$-x^2 \leq -x$$

e como a função $t \mapsto e^t$ é crescente, segue que:

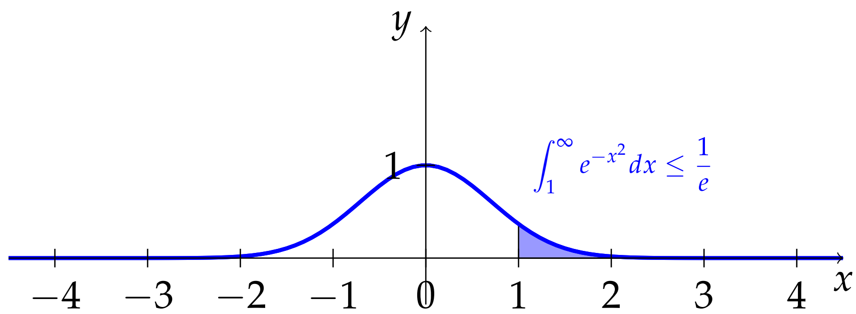
$$(\forall x \geq 1)(e^{-x^2} \leq e^{-x})$$

Vemos que:

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{R \to \infty} \int_{1}^{R} e^{-x} dx = \lim_{R \to \infty} -e^{-x} \Big|_{1}^{R} = \lim_{R \to \infty} -e^{-R} + e^{-1} = \frac{1}{e}$$

e segue do ***Teorema 9*** *(**Primeiro Critério de Comparação**) que:*

$$\int_{1}^{\infty} e^{-x^2} dx \leq \frac{1}{e}$$



Assim, temos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \int_{-\infty}^{-1} e^{-x^2}dx + \int_{-1}^{1} e^{-x^2}dx + \int_{1}^{\infty} e^{-x^2}dx \leq \frac{1}{e} + 2 + \frac{1}{e} = 2 + \frac{2}{e}$$

Observação 12. *Você verá em um curso de Cálculo posterior que, usando integrais duplas, coordenadas polares e o **Teorema de Fubini**, pode-se provar que:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$$

Teorema 13 (Segundo Critério de Comparação). *Se para todo $x \geq a$ valer a desigualdade:*

$$0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$$

e se $\int_a^\infty \varphi(x)dx$ diverge, então $\int_a^\infty f(x)dx$ diverge.

Demonstração. As funções:

$$\begin{array}{rccc} F: &]a,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & R & \mapsto & \int_a^R f(x)dx \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: &]a,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & R & \mapsto & \int_a^R \varphi(x)dx \end{array}$$

são crescentes devido à monotonicidade da integral e ao fato de que $(\forall x \geq a)(0 \leq \varphi(x) \leq f(x))$. Uma vez que $\lim_{R\to\infty} \Phi(R) = \infty$, segue que $\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx = \infty$. □

Exemplo 14. *Descrever o comportamento da integral:*

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}dx$$

quanto à sua convergência ou divergência.

Solução: *observamos que:*

$$x < x + 1 \Rightarrow$$

$$\frac{x}{\sqrt{x^3}} < \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$$

Como $\frac{1}{\sqrt{x}} = \frac{x}{\sqrt{x^3}}$*, segue que:*

$$\frac{1}{\sqrt{x}} < \frac{x+1}{\sqrt{x^3}}$$

e como:

$$\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{R\to\infty} \int_1^R \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{R\to\infty} (2\sqrt{R} - 2 \cdot 1) = \infty,$$

segue, pelo ***Segundo Critério da Comparação****, que:*

$$\int_1^\infty \frac{x+1}{\sqrt{x^3}} dx$$

diverge.

Teorema 15. *Suponha f Riemann-integrável em todo intervalo da forma $[a, R]$, para $R > a$.*

Se a integral:

$$\int_a^\infty |f(x)| dx$$

converge, então a integral:

$$\int_a^\infty f(x) dx$$

também converge.

Demonstração. Para todo $x \geq a$, tem-se:

$$0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2 \cdot |f(x)|$$

Sendo $\int_a^\infty |f(x)| dx$ convergente, resulta do **Critério de Comparação** que:

$$\int_a^{\infty}[|f(x)|+f(x)]dx \leq 2\cdot\int_a^{\infty}|f(x)|dx.$$

Para todo $R>0$, temos:

$$\int_a^R f(x)dx = \int_a^R([|f(x)|+f(x)]-|f(x)|)dx \overset{\substack{\text{linearidade}\\ \uparrow}}{=} \int_a^R[|f(x)|+f(x)]dx - \int_a^R|f(x)|dx$$

Pelo **Critério de Comparação**, $\int_a^{\infty}[|f(x)|+f(x)]dx$ converge, e como por hipótese $\int_0^{\infty}|f(x)|dx$ é convergente, resulta que $\int_a^{\infty}f(x)dx$ também é convergente.

$\square$

Observação 16. *No caso em que* $\int_a^{\infty}|f(x)|dx$ *converge, dizemos que a integral é* ***absolutamente convergente****.*

Assim, com esta nomenclatura, tem-se a seguinte implicação:

Convergência Aboluta da Integral Imprópria $\Rightarrow$ Convergência da Integral Imprópria

Exemplo 17. *Estudar a convergência da integral:*

$$\int_1^{\infty}\frac{\sin(x)}{x^3}dx$$

Solução: *Neste caso, temos uma função cujo sinal se alterna no integrando. Observamos que:*

$$\left|\frac{\sin(x)}{x^3}\right| \leq \left|\frac{1}{x^3}\right|$$

No entanto, tem-se:

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to\infty}\int_1^R\frac{dx}{x^3} = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{2\cdot R^2}\right] = \frac{1}{2}$$

de modo que pelo ***Teorema 15*** *(****Primeiro Critério de Comparação****), a integral dada é convergente.*

Observação: O fato de a integral imprópria de uma função f convergir não implica que a integral imprópria de $|f|$ convirja.

Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [1,\infty[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\sin(x)}{x} \end{array}$$

Esta função é tal que:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

converge.

De fato, temos:

$$\int_0^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \lim_{R\to\infty}\int_0^R \frac{\sin(x)}{x}dx$$

$$\int \frac{\sin(x)}{x}dx = \int \overbrace{\frac{1}{x}}^{=u} \cdot \overbrace{\sin(x)dx}^{=dv} = \frac{1}{x}\cdot(-\cos(x)) - \int(-\cos(x))\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)dx =$$

$$= -\frac{1}{x}\cdot\cos(x) - \int\frac{1}{x^2}\cdot\cos(x)dx$$

pois:

$$\begin{cases} u = \frac{1}{x} \Rightarrow du = -\frac{1}{x^2}dx \\ dv = \sin(x)dx \Rightarrow v = -\cos(x) \end{cases}$$

Assim,

$$\int_1^R \frac{\sin(x)}{x}dx = -\frac{1}{x}\cdot\cos(x)\Big|_1^R - \int_1^R\frac{1}{x^2}\cdot\cos(x)dx$$

Notamos que:

$$-\frac{1}{x}\cdot\cos(x)\Big|_1^R = -\frac{1}{R}\cdot\cos(R)+\cos(1)$$

e portanto:

$$\lim_{R\to\infty}\left[-\frac{1}{R}\cdot\cos(R)+\cos(1)\right] = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{R}\cdot\overbrace{\cos(R)}^{\text{limitada}} + \lim_{R\to\infty}\cos(1) = \cos(1)$$

Agora, a integral imprópria:

$$\int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}dx$$

converge, pois converge absolutamente. De fato, para todo $x \geq 1$ temos:

$$0 \leq \left|\frac{\cos(x)}{x^2}\right| \leq \frac{1}{x^2}$$

e como $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = 1$, segue que $\int_1^\infty \dfrac{\cos(x)}{x^2}dx$ converge.

Assim, como:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx = \cos(1) - \int_1^\infty \frac{\cos(x)}{x^2}dx,$$

segue que:

$$\int_1^\infty \frac{\sin(x)}{x}dx$$

converge, de modo que f é integrável (no sentido impróprio).

No entanto, afirmamos que $\displaystyle\int_0^\infty \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ diverge.

De fato, como para todo $x \geq 1$ temos:

$$|\sin(x)| \leq 1$$

vale:

$$\sin^2(x) = |\sin(x)|^2 \leq |\sin(x)|$$

e portanto, para todo $x \geq 1$, tem-se:

$$\frac{\sin^2(x)}{x} \leq \frac{|\sin(x)|}{|x|} = \left|\frac{\sin(x)}{x}\right|$$

Agora, note que:

$$\int_1^R \frac{\sin^2(x)}{x}dx = \int_1^R \frac{1}{x}\cdot\sin^2(x)dx = \left[\frac{1}{x}\cdot\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right)\right]_1^R - \int_1^R -\frac{1}{x^2}\cdot\left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin(2x)\right]dx$$

ou seja,

$$\int_1^R \frac{\sin^2(x)}{x}dx = -\frac{\sin(2R)}{4R} + \frac{\sin(2)}{4} + \int_0^R \left[\frac{1}{2x} - \frac{\sin(2x)}{4x^2}\right]dx$$

Tendo em vista que $\int_0^\infty \frac{\sin(2x)}{4x^2} dx$ converge (verifique isto, usando o **Primeiro Critério da Comparação**) e que:

$$\int_0^\infty \frac{dx}{2x} \text{ diverge,}$$

segue que:

$$\int_1^\infty \frac{\sin^2(x)}{x} dx$$

diverge.

Desta forma, pelo **Segundo Critério de Comparação**, segue que:

$$\int_1^\infty \left| \frac{\sin(x)}{x} \right| dx$$

diverge, ou seja, f *não* é absolutamente integrável.

Teorema 18. *Para todo $\alpha > 0$, a integral:*

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \cdot x} dx$$

é convergente.

Demonstração. De fato,

$$\int_0^\infty e^{-\alpha \cdot x} dx = \lim_{R \to \infty} \int_0^R e^{-\alpha \cdot x} dx = -\lim_{R \to \infty} \frac{e^{-\alpha \cdot R} - 1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha}$$

□

Proposição 19. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função tal que, para todo $R > 0$, $f \restriction_{[0,R]}$ é contínua e tal que existem constantes $M > 0$ e $\gamma > 0$ tais que para todo $x > 0$:*

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

Então, para todo $s > \gamma$ tem-se:

$$\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$$

convergente.

Demonstração. Para todo $R > 0$, temos:

$$|f(x)| \leq M \cdot e^{-\gamma \cdot x}$$

Assim, para todo $x > 0$, tem-se:

$$|e^{-s \cdot x} \cdot f(x)| = e^{-s \cdot x} \cdot |f(x)| \leq e^{-s \cdot x} \cdot M \cdot e^{-\gamma \cdot x} = M \cdot e^{(-\gamma - s) \cdot x}$$

Como $s > \gamma > 0$, tem-se $-s - \gamma > 0$, e decorre do **Teorema 18** que:

$$\int_0^\infty M \cdot e^{(-\gamma - s) \cdot x} dx = M \cdot \int_0^\infty e^{-(\gamma + s) \cdot x} dx \text{ converge .}$$

Pelo **Critério de Comparação**, segue que:

$$\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$$

converge. □

Definição 20. *Uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***de ordem exponencial*** *$\gamma > 0$ se existir $M > 0$ tal que:*

$$(\forall x > 0) \left(|f(x)| \leq M \cdot e^{-\gamma \cdot x} \right)$$

Teorema 21. *Seja f uma função de derivada contínua e de ordem exponencial $\gamma > 0$. Se $s > \gamma$, então:*

$$\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f'(x) dx$$

converge e:

$$\int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f'(x) dx = s \cdot \int_0^\infty e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx - f(0)$$

é convergente

Demonstração. Para todo $R > 0$:

$$\int_0^R e^{-s \cdot x} \cdot f'(x) dx = e^{-s \cdot x} \cdot f(x) \Big|_0^R + s \cdot \int_0^R e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$$

$$\int_0^R e^{-s \cdot x} \cdot f'(x) dx = e^{-s \cdot R} \cdot f(R) - f(0) + s \cdot \int_0^R e^{-s \cdot x} \cdot f(x) dx$$

Observe que como f é exponencial de ordem γ, tem-se, para todo $x > 0$:

$$e^{-s\cdot x}\cdot f(x)\leq M\cdot e^{(-\gamma-s)\cdot x}$$

$$\lim_{R\to\infty} e^{-s\cdot R}\cdot f(R)\leq \lim_{R\to\infty} M\cdot e^{\overbrace{(-\gamma-s)}^{<0}\cdot R}=0$$

Assim,

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f'(x)dx=-f(0)+s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx$$

e portanto:

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f'(x)dx=s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx-f(0)$$

$\square$

Seja f uma função de ordem exponencial $\gamma>0$ tal que, para todo $x\in\mathbb{R}$, tem-se:

$$f'(x)+3\cdot f(x)=x$$

Temos, para todo $s>\gamma$:

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}f(x)dx=\frac{f(0)}{s+3}+\frac{1}{s^2\cdot(s+3)}$$

De fato, como para todo $x\in\mathbb{R}$ temos:

$$f'(x)+3\cdot f(x)=x,$$

vale:

$$e^{-s\cdot x}\cdot f'(x)+3\cdot e^{-s\cdot x}\cdot f(x)=e^{-s\cdot x}\cdot x$$

e portanto:

$$\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f'(x)dx+3\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx=\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot xdx$$

Pelo **Teorema 21**, temos:

$$s\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx-f(0)+3\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx=\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot xdx$$

$$(s+3)\cdot\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx=\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot xdx=\frac{1}{s^2}+f(0)$$

$$\therefore\int_0^\infty e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx=\frac{1}{s^2\cdot(s+3)}+\frac{f(0)}{s+3}$$

Observação 22. *Dada uma função f de ordem exponencial, a função dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \mathscr{L}(f): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & s & \mapsto & \displaystyle\int_0^{\infty} e^{-s\cdot x}\cdot f(x)dx \end{array}$$

*é denominada **a transformada de Laplace de** f.*

3 A Integral de Uma Função Descontínua

Vimos, na agenda anterior, que uma condição necessária e suficiente para que uma função limitada, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fosse Riemann-integrável era que seu conjunto de descontinuidades fosse, no máximo, infinito enumerável.

Nesta seção veremos como calcular a integral de Riemann de funções $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ que sejam descontínuas em <u>um</u> ponto do intervalo. Começaremos analisando o caso em que o ponto de descontinuidade está em um extremo do intervalo, e posteriormente o caso em que o ponto de descontinuidade é ponto interior daquele.

3.1 Descontinuidade em Um Extremo do Intervalo

Seja $f:[a,c]\to\mathbb{R}$ uma função contínua em $[a,c[$ e descontínua em $x=c$. Neste caso, definimos a integral de f no intervalo $[a,b]$ como segue:

$$f \text{ descontínua em } c \Rightarrow \int_a^c f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to c_-}\int_a^b f(x)dx$$

Como extensão do conceito de integral, podemos defini-la no caso em que temos $f:[a,c[\to\mathbb{R}$ (ou seja, em que f *não* está definida em c). Neste caso, simplesmente definimos:

$$\int_a^c f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{b\to c_-}\int_a^b f(x)dx$$

No caso de f ser descontínua no extremo esquerdo, procedemos similarmente.

Exemplo 23. *Calcular:*

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$$

Solução: *A função $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$ <u>não</u> está definida em $x=1$. Temos:*

$$\lim_{b\to 1_-}\int_0^b \frac{1}{\sqrt{1-x}}dx = -\lim_{b\to 0_-} 2\cdot\sqrt{1-x}\Big|_0^b =$$

$$= -\lim_{b\to 1_-} 2\cdot[\sqrt{1-b}-1] = 2.$$

3.2 Descontinuidade no Interior do Intervalo

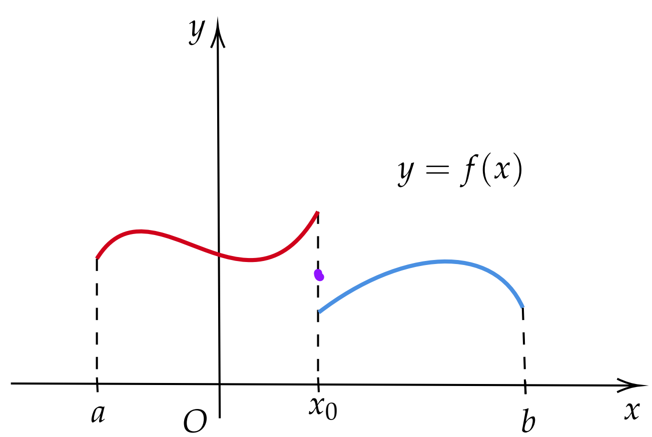
Analisemos, agora, o caso em que temos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ que é descontínua em um ponto $x_0 \in]a, b[$. Neste caso, definimos:

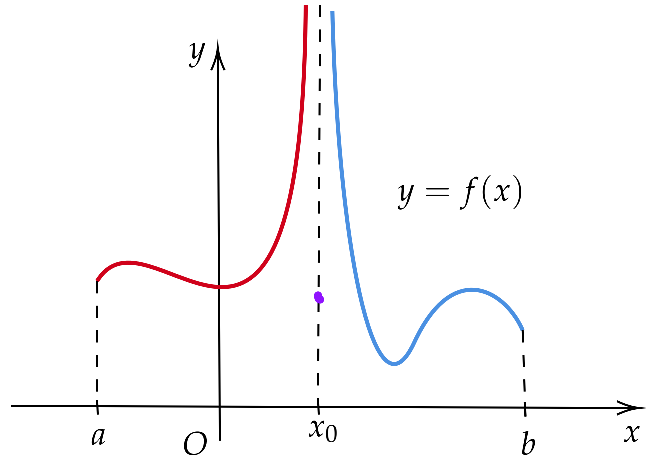
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_0} f(x)dx + \int_{x_0}^b f(x)dx,$$

sempre que as duas integrais,

$$\int_a^{x_0} f(x)dx \ \text{ e } \ \int_{x_0}^b f(x)dx \ \text{ existirem.}$$

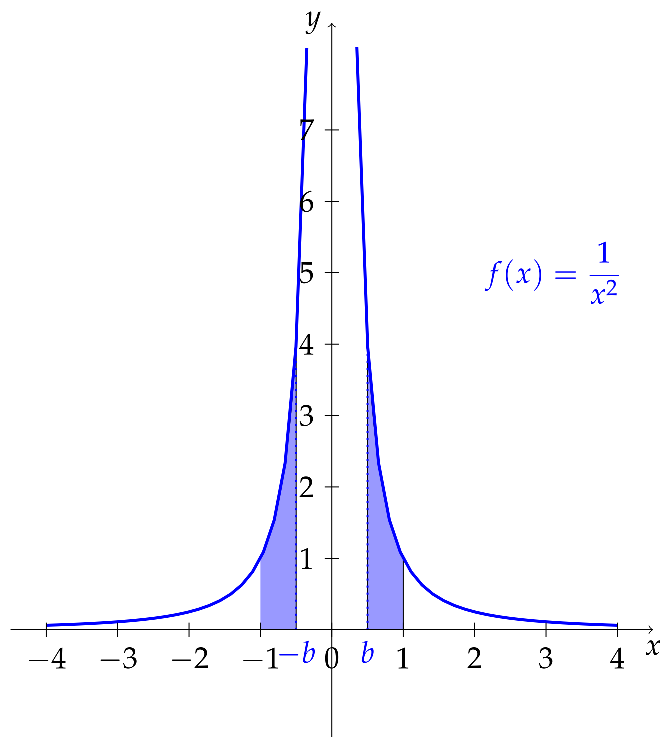
Assim, no caso em que f é limitada, temos a integral de Riemann, enquanto que no caso em que f é ilimitada, temos a extensão do conceito dada pela mesma equação acima.





Exemplo 24. *Estudar (quanto à convergência) a integral:*

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$



Solução: *Observamos que em* $x = 0 \in]-1, 1[$ *a função* $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ *não está definida (e a função não é limitada neste intervalo). Neste caso, verificamos se existem:*

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} \;\; e \;\; \int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

Temos, assim, duas integrais impróprias.
Temos:

$$\int_{-1}^{0} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0_-} \int_{-1}^{b} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0_-} \left[\frac{1}{b} - \frac{1}{(-1)} \right] = \infty$$

de modo que esta integral imprópria diverge. Também:

$$\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0_+} \int_{b}^{1} \frac{dx}{x^2} = \lim_{b \to 0_+} \left[-1 + \frac{1}{b} \right] = \infty$$

e esta integral imprópria diverge.

Deste modo, a integral imprópria:

$$\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2}$$

diverge.

3.3 Integral de uma Função com Vários Pontos de Descontinuidade

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada e descontínua em uma quantidade finita de pontos do intervalo $[a, b]$, $a \leq x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n \leq b$, ou seja,

$$\text{Desc}\,(f) = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}.$$

Vimos, na agenda anterior, que toda função assim é Riemann-integrável. O cálculo da integral é feito como segue:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

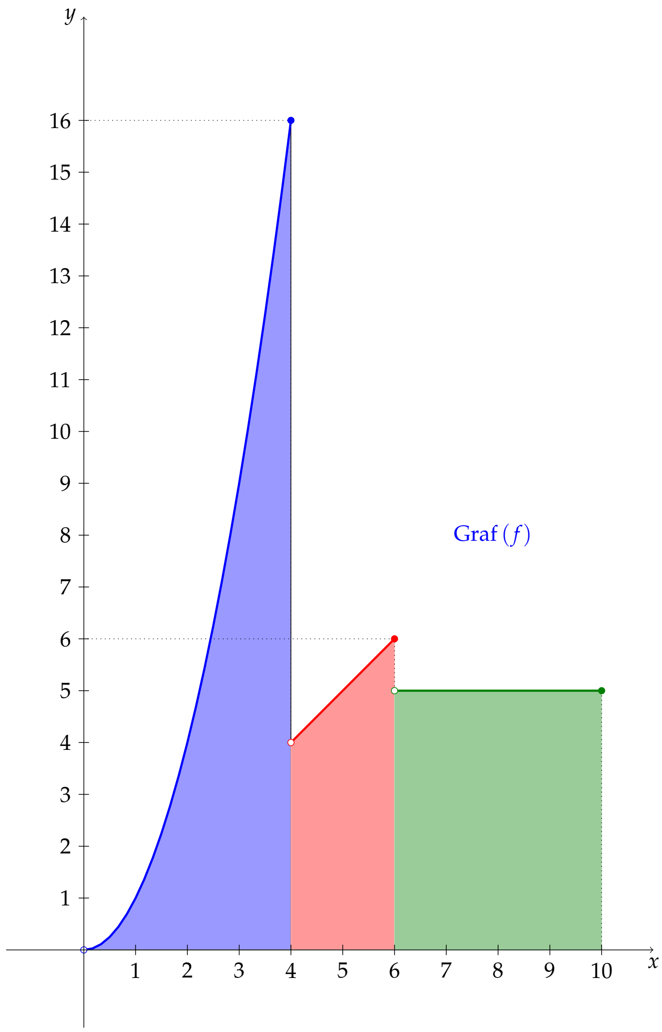
No caso em que $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é ilimitada, estendemos a definição do mesmo modo, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{x_1} f(x)dx + \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx + \cdots + \int_{x_{n-2}}^{x_{n-1}} f(x)dx + \int_{x_{n-1}}^{b} f(x)dx$$

sempre que cada uma das integrais do membro direito da igualdade acima existir.

Exemplo 25. *Seja:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,10] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} x^2, \ se\ 0 < x \leq 4 \\ x, \ se\ 4 < x \leq 6 \\ 5, \ se\ 6 < x \leq 10 \end{cases} \end{array}$$



Vemos que f é descontínua no ponto $x_1 = 4$, uma vez que:

$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} f(x) = \lim_{x \to 4} x^2 = 16$$

$$\lim_{x \to 4_+} f(x) = \lim_{\substack{x \to 4 \\ x>4}} f(x) = \lim_{x \to 4} x = 4$$

ou seja,

$$\lim_{x \to 4_-} f(x) = 16 \neq 4 = \lim_{x \to 4_+} f(x)$$

e no ponto $x_2 = 6$, pois:

$$\lim_{x \to 6_-} f(x) = \lim_{\substack{x \to 6 \\ x<6}} f(x) = \lim_{x \to 6} x = 6$$

$$\lim_{x\to 6_+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 6 \\ x>6}} f(x) = \lim_{x\to 6} 5 = 5$$

ou seja,

$$\lim_{x\to 6_-} f(x) = 6 \neq 5 = \lim_{x\to 6_+} f(x)$$

A fim de calcular $\int_0^{10} f(x)dx$*, precisamos decompor o intervalo* $]0,10]$ *em subintervalos restritos aos quais as funções sejam contínuas. Neste caso,*

$$]0,10] =]0,4] \cup]4,6] \cup]6,10].$$

Assim,

$$\int_0^{10} f(x)dx = {\color{blue}\int_0^4 f(x)dx} + {\color{red}\int_4^6 f(x)dx} + {\color{green}\int_6^{10} 5dx} = \int_0^4 x^2dx + \int_4^6 xdx + 5\cdot\int_6^{10} dx =$$

$$= \frac{160}{3}.$$

3.4 Estudo da Convergência de Integrais Impróprias de Funções Descontínuas

Para determinar a convergência de integrais impróprias de funções descontínuas e para estimar seus valores, usamos os seguintes teoremas, análogos aos da seção anterior.

Teorema 26. *Sejam* $f, \varphi : [a,c] \to \mathbb{R}$ *funções descontínuas apenas no ponto* c *e tais que, para todo* $x \in [a,c]$ *valer a desigualdade:*

$$0 \leq f(x) \leq \varphi(x)$$

e se $\int_a^c \varphi(x)dx$ *converge, então* $\int_a^c f(x)dx$ *converge e:*

$$\int_a^c f(x)dx \leq \int_a^c \varphi(x)dx$$

Demonstração. Como ambas as funções são contínuas em qualquer intervalo da forma $[a,b]$, ambas são Riemann-integráveis.

Assim, para qualquer $b \in \mathbb{R}$ com $a < b < c$, da hipótese de que $(\forall x \in [a,c])(0 \leq f(x) \leq \varphi(x))$ e da monotonicidade da integral de Riemann, segue que para todo $b \in]a,c[$ tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b \varphi(x)dx$$

Pela definição da integral de funções descontínuas, $f, \varphi : [a, c] \to \mathbb{R}$ no extremo c do intervalo, tem-se:

$$\int_a^c f(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{b \to c} \int_a^b f(x)dx$$

e:

$$\int_a^c \varphi(x)dx \overset{\text{def.}}{=} \lim_{b \to c} \int_a^b \varphi(x)dx$$

Como consequência da propriedade da conservação do sinal no limite, segue peortanto que:

$$\int_a^c f(x)dx = \lim_{b \to c_-} \int_a^b f(x)dx \leq \lim_{b \to c_-} \int_a^b \varphi(x)dx = \int_a^c \varphi(x)dx$$

$\square$

Teorema 27. *Se $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma função alternante e descontínua apenas no ponto c, e se a integral imprópria $\int_a^c |f(x)|dx$ converge, então a integral $\int_a^c f(x)dx$ também converge.*

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[2] Boulos, P., **Cálculo Diferencial e Integral**, volume 1, São Paulo, Pearson Makron Books, 1999.

[3] Guidorizzi, H.L., **Um Curso de Cálculo**, volume 2, São Paulo, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, 1986.

[4] Piskunov, N., **Differential and Integral Calculus**, traduzido do russo por G. Yankovsky, MIR Publishers. Moscow, União das Repúblicas Socialistas Soviéticas, 1965.