MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Agenda 03

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

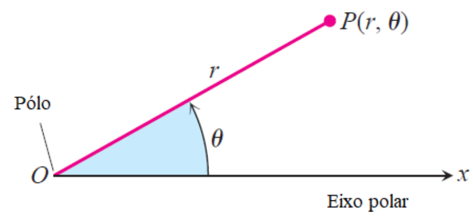
No monitoramento por radar, um operador está interessado na posição ou no ângulo que o objeto rastreado forma com algum raio fixo (por exemplo, uma semirreta direcionada para leste) e a que distância o objeto está localizado no momento. Nesta agenda, estudaremos um sistema de coordenadas inventado por Isaac Newton chamado de **sistema de coordenadas polares**, o qual é prático de usar nestas e noutras situações.

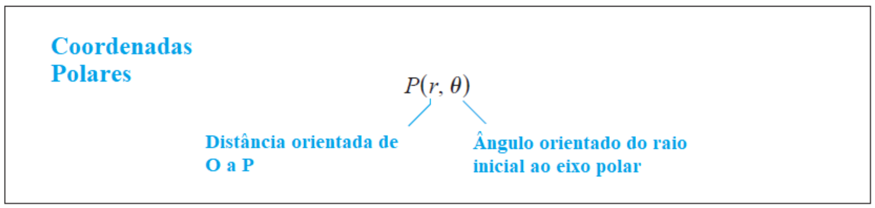
2 Curvas em $\mathbb{R}^2$ – O Sistema de Coordenadas Polares

Frequentemente o problema que vamos estudar envolve simetrias em torno de um certo ponto. Este é o caso, por exemplo, quando estudamos forças centrais (ou seja, forças cuja intensidade depende do inverso do quadrado da distância), como é o caso da força gravitacional e da força eletrostática.

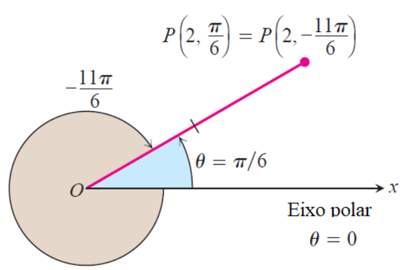
Para definirmos as coordenadas polares, primeiro escolhemos um ponto no plano, que chamaremos de **pólo** (ou origem) e o chamaremos de O. Então desenhamos um **raio inicial** (ou eixo polar) começando em O. Esse raio é normalmente desenhado horizontalmente e apontando para a direita, correspondendo à parte positiva do eixo Ox em coordenadas cartesianas. Desta forma, cada ponto P pode ser localizado por meio de sua associação a um **par de coordenadas polares**, (r, θ), no qual r dá a distância orientada de O a P e θ dá o ângulo orientado do eixo polar ao eixo OP.

*jeancb@ime.usp.br

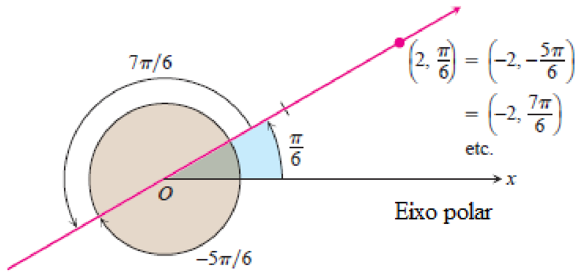




Como em Trigonometria, θ é positivo quando medido no sentido anti-horário e negativo quando medido no sentido horário. O ângulo associado a um ponto dado não é único. Por exemplo, o ponto 2 unidades a partir da origem ao longo do raio $\theta = \pi/6$ tem coordenadas polares $r = 2, \theta = \pi/6$. Tem, também, coordenadas $r = 2, \theta = -11\pi/6$



Existem também ocasiões em que desejamos que r seja negativo. Essa é a razão pela qual usamos a distância orientada ao definir $P(r, \theta)$. O ponto $P(2, 7\pi/6)$ pode ser alcançado girando-se $7\pi/6$ radianos no sentido anti-horário a partir do eixo polar e indo 2 unidades para frente. Também pode ser alcançado girando-se $\pi/6$ radianos no sentido anti-horário a partir do eixo polar e indo *para trás* 2 unidades. Assim, o ponto também tem coordenadas polares $r = -2, \theta = \pi/6$.



Na verdade, um único ponto tem infinitas coordenadas polares. No exemplo em apreço:

$$(2, \pi/6 \pm 2\pi), (2, \pi/6 \pm 4\pi), (2, \pi/6 \pm 6\pi), \cdots$$
$$(-2, -5\pi/6 \pm 2\pi), (-2, -5\pi/6 \pm 4\pi), (-2, -5\pi/6 \pm 6\pi), \cdots$$

A fim de obtermos uma bijeção entre o plano munido de coordenadas cartesianas sem a origem e o plano munido de coordenadas polares sem a origem, devemos fixar um ângulo θ_0 e considerar a região:

$$]0, \infty[\times[\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$$

Por conveniência, escolheremos sempre $\theta_0 = 0$. Desta forma, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} g: &]0,\infty[\times[0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & (r,\theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

é sempre uma bijeção. Se convencionarmos que $(0,0)$ em coordenadas polares representa $(0,0)$ em coordenadas cartesianas, definimos uma função $\widetilde{g} : \mathbb{E}^2 \to \mathbb{E}^2$ que faz corresponder qualquer ponto em coordenadas polares um, e somente um, par de coordenadas cartesianas e vice-versa:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{g}: & \{(0,0)\}\cup]0,\infty[\times[0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r,\theta) & \mapsto & \begin{cases} (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \text{se}\, r \neq 0, \\ (0,0), \text{se}\, r = 0 \end{cases} \end{array}$$

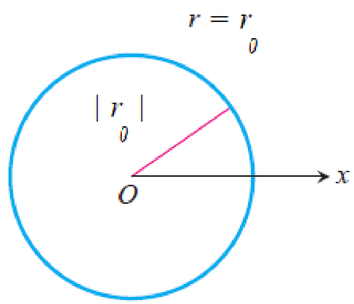
2.1 Gráficos Polares

Seja $r = f(\theta)$ uma função. Por definição, o gráfico desta função é o subconjunto **do plano, munido de coordenadas cartesianas** dado por:

$$\text{Graf}\,(r = f(\theta)) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = f(\theta)\cdot\cos\theta)\&(f(\theta)\cdot\sin\theta)\&((r,\theta) \in \text{dom}\,(f))\}$$

Vejamos, agora, os gráficos mais simples que se pode expressar em coordenadas polares.

Se mantivermos fixo r em certo valor constante $r_0 > 0$, o ponto $P(r, \theta)$ estará a r_0 unidades de comprimento do pólo, O. À medida que θ varia em qualquer intervalo de comprimento 2π, P traça um círculo de raio r_0 centrado em O.



Se mantivermos $\theta = \theta_0$ fixado, por sua vez, e fizermos $r \in \mathbb{R}$, o ponto $P(r, \theta_0)$ traçará uma reta passando pelo pólo que forma um ângulo θ_0 com ele.

Equação	Gráfico Polar
$r = r_0$	Círculo de raio $\lvert r_0 \rvert$ centrado em O
$\theta = \theta_0$	Reta passando por O formando um ângulo θ_0 com o eixo polar

Exemplo 1. *(a) $r = 1$ é a equação que descreve o círculo de raio 1 centrado em O;*

(b) $\theta = \pi/6$, é a equação que representa a reta passando pelo pólo e que faz um ângulo de $\pi/6$, no sentido anti-horário, com o eixo polar.

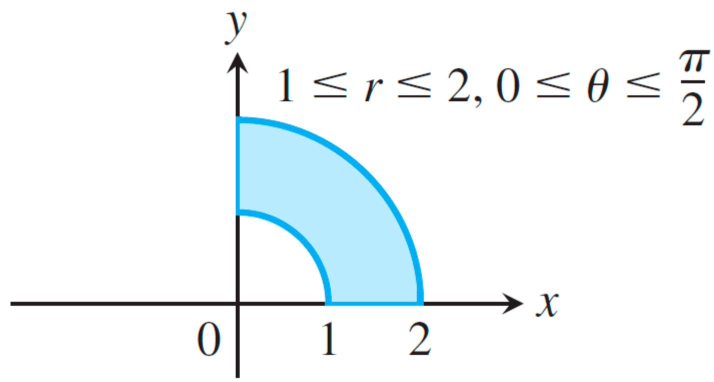
Equações da forma $r = r_0$ e $\theta = \theta_0$ podem ser combinadas para definir regiões, segmentos e raios.

2.2 Representando graficamente desigualdades

Representemos, graficamente, o conjunto de pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas:

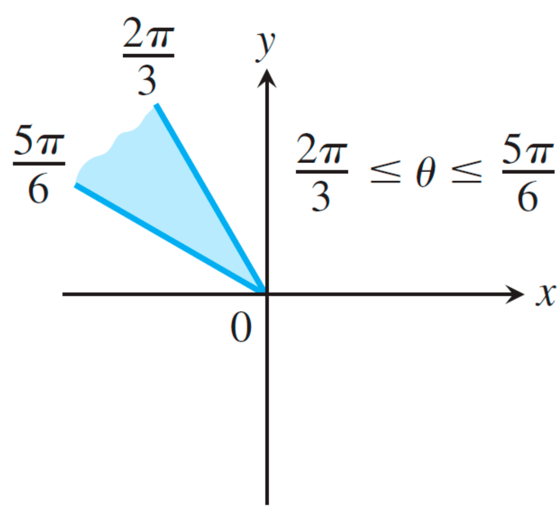
(a) $\{(r, \theta) \in \{(0,0)\} \cup]0, \infty[\times [0, 2\pi[\mid (1 \leq r \leq 2) \& (0 \leq \theta \leq \pi/2)\}$.

Os pontos (r, θ) com $1 \leq r \leq 2$ são os pontos do plano que distam r, $1 \leq r \leq 2$ da origem, compreendendo a coroa circular que consiste dos pontos fora da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e dentro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Dentre estes pontos, a região só admite aqueles com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, ou seja, os do primeiro quadrante.



(b) $\{(r,\theta) \in \{(0,0)\} \cup]0,\infty[\times[0,2\pi[\mid 2\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/6\}$.

Os pontos (r,θ) com $2\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/6$ são os pontos localizados sobre retas que fazem ângulos entre $2\pi/3$ e $5\pi/6$ com o eixo polar.



Observação 2. *Daqui em diante, a fim de podermos descrever uma maior quantidade de curvas e regiões, permitiremos coordenadas (r,θ) com $r \in \mathbb{R}$ – ou seja, r poderá assumir, inclusive, valores negativos. Também admitiremos $\theta \in \mathbb{R}$.*

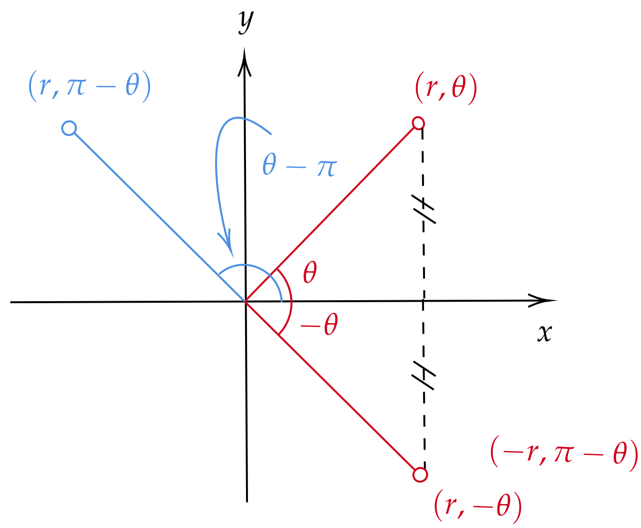
Antes de esboçar o gráfico de alguma curva dada em coordenadas polares, convém verificarmos certos tipos de simetria.

Diremos que o gráfico de uma função:

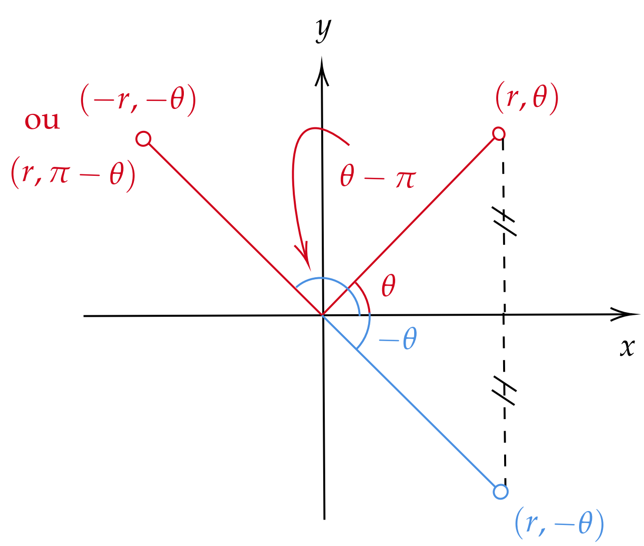
$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & \theta & \mapsto & r(\theta) \end{array}$$

tem:

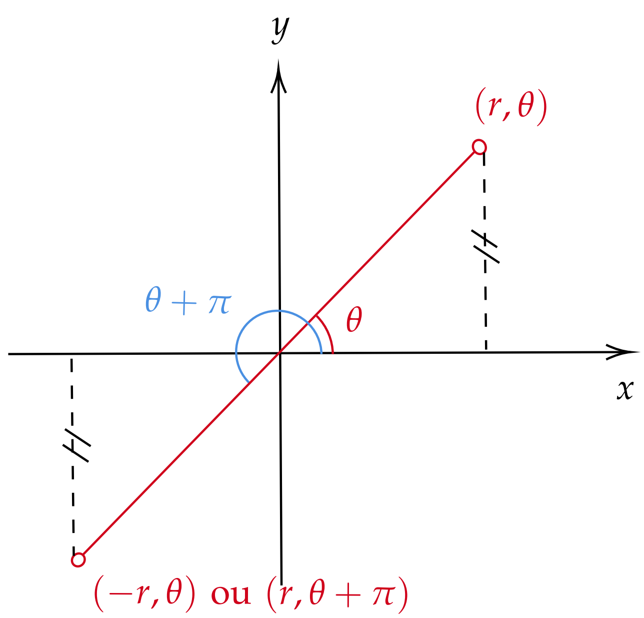
(a) **Simetria em relação ao eixo** Ox: sempre que o pertencimento do ponto de coordenadas (r, θ) ao gráfico acarretar o pertencimento do ponto $(r, -\theta)$ ao gráfico ou, equivalentemente, o pertencimento do ponto $(-r, \pi - \theta)$ ao gráfico.



(b) **Simetria em relação ao eixo** Oy: sempre que o pertencimento do ponto (r, θ) ao gráfico implicar no pertencimento do ponto $(r, \pi - \theta)$ ao gráfico ou, equivalentemente, $(-r, -\theta)$ ao gráfico.



(c) **Simetria em relação à origem:** se sempre que o ponto (r, θ) estiver no gráfico, seu antípoda, o ponto $(-r, \theta)$ ou $(r, \theta + \pi)$ também estiver no gráfico.



2.3 Coeficiente Angular

Nesta subseção veremos como encontrar coeficientes angulares, áreas e comprimentos de curvas polares $r = f(\theta)$.

O coeficiente angular de uma curva polar $r = f(\theta)$ é dado por dy/dx, e não por $r' = df/d\theta$. Para ver isto, devemos pensar no gráfico de $r = f(\theta)$ como gráfico das equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos(\theta) = f(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = r\sin(\theta) = f(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Pela **Regra da Cadeia**, segue que:

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{d\theta},$$

e portanto:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}$$

Se $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\theta)$ é uma função diferenciável de θ, x e y, por serem produtos de funções diferenciáveis de θ, também o serão, e quando $dx/d\theta \neq 0$ (pois se $dx/d\theta = 0$ a reta tangente será vertical), podemos calcular dy/dx a partir da fórmula paramétrica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\sin(\theta))}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos(\theta))} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

Assim, no ponto θ_0, o coeficiente angular da curva dada por $r = f(\theta)$ é:

$$\frac{f'(\theta_0)\sin(\theta_0) + f(\theta_0)\cos(\theta_0)}{f'(\theta_0)\cos(\theta_0) - f(\theta_0)\sin(\theta_0)}$$

desde que $dx/d\theta \neq 0$ em (r_0, θ_0).

Exemplo 3. *Encontrar as tangentes horizontais e verticais ao gráfico da cardioide* $r(\theta) = 1 - \cos(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Solução: Primeiramente, descrevemos a curva parametricamente:

$$\begin{cases} x(\theta) = r(\theta) \cdot \cos(\theta) = (1 - \cos(\theta)) \cdot \cos(\theta) = \cos(\theta) - \cos^2(\theta) \\ y(\theta) = r(\theta) \cdot \sin(\theta) = (1 - \cos(\theta)) \cdot \sin(\theta) = \sin(\theta) - \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Precisamos encontrar os zeros de $dy/d\theta$ e de $dx/d\theta$.

$$\frac{dy}{d\theta} = \cos(\theta) + \sin^2(\theta) - \cos^2(\theta) = \cos(\theta) + (1 - \cos^2(\theta)) - \cos^2(\theta) =$$

$$= 1 + \cos(\theta) - 2\cos^2(\theta) = (1 + 2\cos(\theta)) \cdot (1 - \cos(\theta))$$

Também,

$$\frac{dx}{d\theta} = -\sin(\theta) + 2\cos(\theta)\sin(\theta) = (2\cos(\theta) - 1) \cdot \sin(\theta)$$

Assim,

$$\frac{dx}{d\theta} = 0 \iff \theta = 0, \pi/3, 5\pi/3, 2\pi$$

$$\frac{dy}{d\theta} = 0 \iff \theta = 0, 2\pi/3, 4\pi/3, 2\pi.$$

As tangentes horizontais ocorrem quando $y'(\theta) = 0$ e $x'(\theta) \neq 0$, ou seja, quando $\theta \in \{2\pi/3, 4\pi/3\}$, e as tangentes verticais ocorrem quando $x'(\theta) = 0$ e $y'(\theta) \neq 0$, portanto em $\theta \in \{\pi/3, \pi, 5\pi/3\}$.

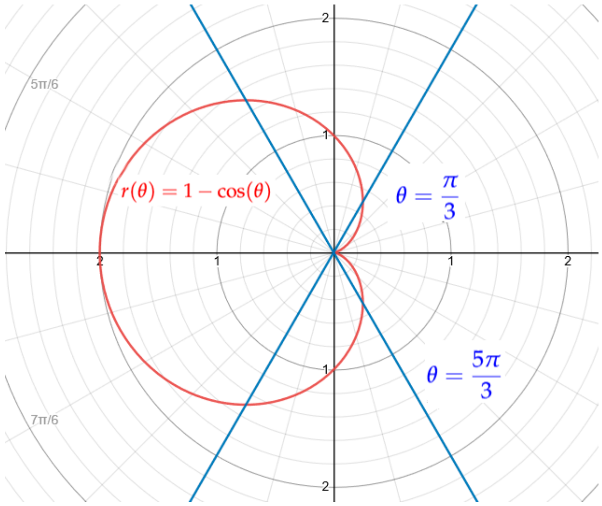


Figura 1: https://www.desmos.com/calculator/ms3eghkkgz?lang=pt-BR

Exemplo 4. *Encontrar as retas tangentes à rosácea:*

$$r = f(\theta) = 2 \cdot \sin(3\theta),\ 0 \leq \theta \leq \pi$$

no pólo.

Solução: $f(\theta) = 0$ quando $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3$ e π. A parametrização da curva é:

$$\begin{cases} x(\theta) = f(\theta) \cdot \cos(\theta) = [2 \cdot \sin(3\theta)] \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = f(\theta) \cdot \sin(\theta) = [2 \cdot \sin(3\theta)] \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

de modo que:

$$\frac{dx}{d\theta} = 2 \cdot [3 \cdot \cos(3\theta) \cdot \cos(\theta) - \sin(3\theta) \cdot \sin(\theta)] = 6 \cdot \cos(3\theta) \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot \sin(3\theta) \cdot \sin(\theta)$$

e:

$$\frac{dy}{d\theta} = 2 \cdot [3 \cdot \cos(3\theta) \cdot \sin(\theta) + \sin(3\theta) \cdot \cos(\theta)] = 6 \cdot \cos(3\theta) \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot \sin(3\theta) \cdot \cos(\theta)$$

Tem-se:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{6 \cdot \cos(3\theta) \cdot \sin(\theta) + 2 \cdot \sin(3\theta) \cdot \cos(\theta)}{6 \cdot \cos(3\theta) \cdot \cos(\theta) - 2 \cdot \sin(3\theta) \cdot \sin(\theta)}$$

Verificamos que $\frac{dx}{d\theta}(\theta_0) \neq 0$ para $\theta_0 \in \{0, \pi/3, 2\pi/3, \pi\}$. Assim, teremos:

$$\frac{dy}{dx}(0) = \frac{6 \cdot \cos(3 \cdot 0) \cdot \sin(0) + 2 \cdot \sin(3 \cdot 0) \cdot \cos(0)}{6 \cdot \cos(3 \cdot 0) \cdot \cos(0) - 2 \cdot \sin(3 \cdot 0) \cdot \sin(0)} = \frac{0}{6} = 0$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{6 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) + 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right)}{6 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) - 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{6 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) + 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)}{6 \cdot \cos\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) - 2 \cdot \sin\left(3 \cdot \frac{2\pi}{3}\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} = -\sqrt{3}$$

$$\frac{dy}{dx}(\pi) = \frac{6 \cdot \cos(3 \cdot \pi) \cdot \sin(\pi) + 2 \cdot \sin(3 \cdot \pi) \cdot \cos(\pi)}{6 \cdot \cos(3 \cdot \pi) \cdot \cos(\pi) - 2 \cdot \sin(3 \cdot \pi) \cdot \sin(\pi)} = \frac{0}{6} = 0$$

Assim, a curva tem retas tangentes no pólo com coeficientes angulares 0, $\sqrt{3}$ e $-\sqrt{3}$. Assim, as três retas tangentes correspondentes são $y = 0, y = \sqrt{3}x$ e $y = -\sqrt{3}x$.

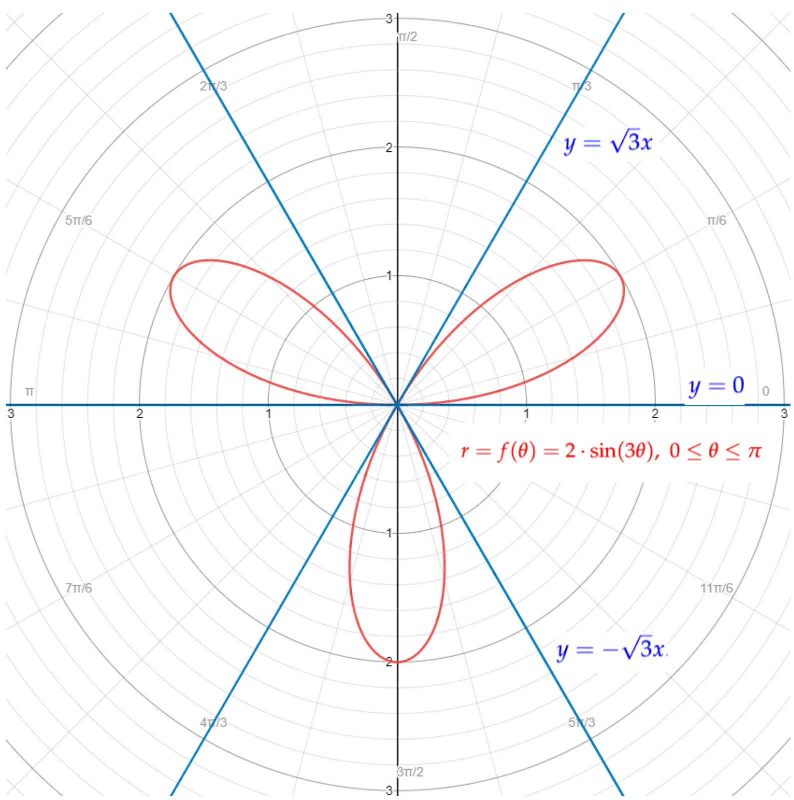


Figura 2: https://www.desmos.com/calculator/ms3eghkkgz?lang=pt-BR

2.4 Esboço de Curvas dadas em Coordenadas Polares

Exemplo 5 (Cardióide). *Representemos, graficamente, a curva dada em coordenadas polares pela equação:*

$$r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$$

Solução: Primeiramente procuramos verificar se a curva possui algum tipo de simetria. Como a função cosseno é par, temos que se (r, θ) está no gráfico, então $r = 1 - \cos(\theta)$, e como $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, segue que $(r, -\theta)$ é tal que $r = 1 - \cos(-\theta) = 1 - \cos(\theta)$, ou seja, $(r, -\theta)$ também pertence ao gráfico. Desta forma, temos uma simetria em relação ao eixo Ox.

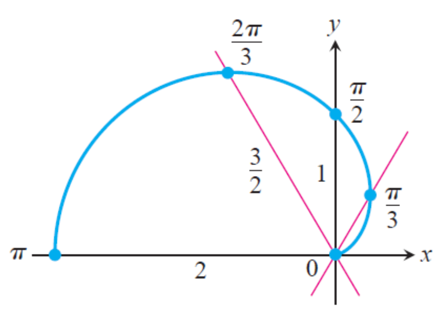
Na prática, isto significa que basta desenharmos o gráfico para $0 \leq \theta \leq \pi$ e, em seguida, tomar seu reflexo com respeito ao eixo Ox como o "resto" do gráfico.

Para $\theta = 0$ teremos $r(0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$. Conforme θ aumenta de 0 para π, $\cos(\theta)$ diminui de 1 para -1, e $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ aumenta do valor mínimo de 0 para um valor máximo de $r(\pi) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$.

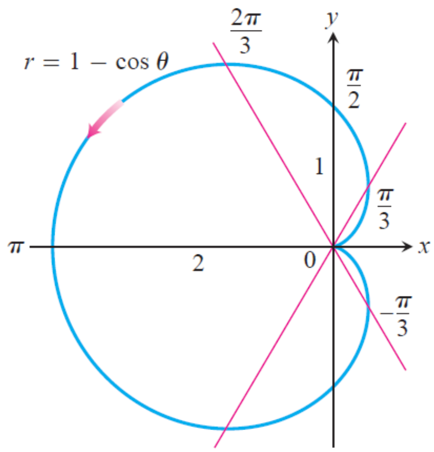
Fazemos a tabela com alguns ângulos notáveis entre 0 e π:

θ	$r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$
0	$r(0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$
$\frac{\pi}{6}$	$r(\pi/6) = 1 - \cos(\pi/6) = 1 - \sqrt{3}/2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 0.1339$
$\frac{\pi}{4}$	$r(\pi/4) = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 0.2929$
$\frac{\pi}{3}$	$r(\pi/3) = 1 - \cos(\pi/3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5000$
$\frac{\pi}{2}$	$r(\pi/2) = 1 - \cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1$
$\frac{2\pi}{3}$	$r(2\pi/3) = 1 - \cos(2\pi/3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = 1.5$
π	$r(\pi) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$

Esboçamos uma curva lisa passando pelos pontos da tabela:



e finalmente refletimos a figura obtida pelo eixo Ox, obtendo:



Na figura acima, a seta indica a direção do aumento de θ.

A cardióide aparece como cáustica do círculo, quando posicionamos a fonte de luz em um ponto P de seu perímetro:

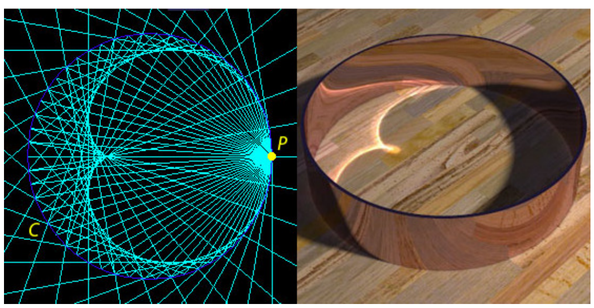


Figura 3: https://www.geogebra.org/m/EzdWepR8

A cardióide aparece em peças que direcionam camadas uniformes de fio em bobinas e carretéis e em padrões de intensidade de sinal de certas antenas de rádio e microfones unidirecionais (ver https://www.intmath.com/blog/mathematics/polar-coordinates-and-cardioid-microphones-2496).

2.5 Gráficos Polares

Representemos graficamente a curva dada pela equação:

$$r^2 = 4\cos(\theta)$$

A equação acima requer $\cos(\theta) \geq 0$, assim obtemos o gráfico inteiro fazendo θ percorrer de $-\pi/2$ a $\pi/2$. A curva é simétrica em relação ao eixo Ox porque:

$$(r,\theta) \in \text{Graf}\,(r^2 = 4\cos(\theta)) \Rightarrow r^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \Rightarrow (r,-\theta) \in \text{Graf}\,(r^2 = 4\cos(\theta))$$

A curva também é simétrica com relação à origem porque:

$$(r,\theta) \in \text{Graf}\,(r^2 = 4\cos(\theta)) \Rightarrow r^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow (-r)^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow (-r,\theta) \in \text{Graf}\,(r^2 = 4\cos(\theta))$$

Juntas, estas duas simetrias implicam simetria com relação ao eixo Oy.

A curva passa pela origem quando $\theta = \pm\pi/2$, e tem uma tangente vertical ambas as vezes porque $\tan(\theta)$ neste caso é infinito.

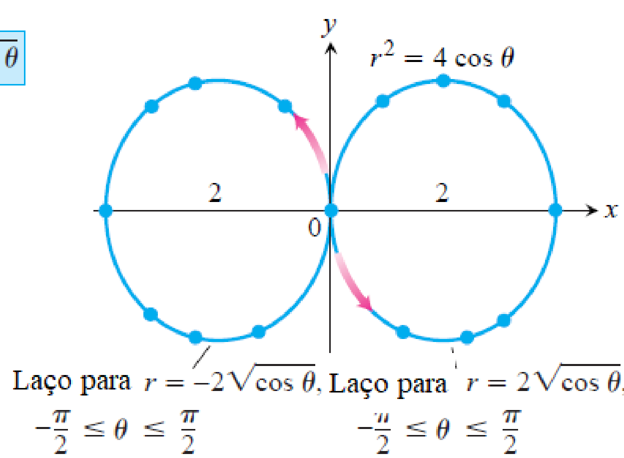
Para cada valor de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, a fórmula $r^2 = 4\cos(\theta)$ dá dois valores de r, a saber:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos(\theta)}$$

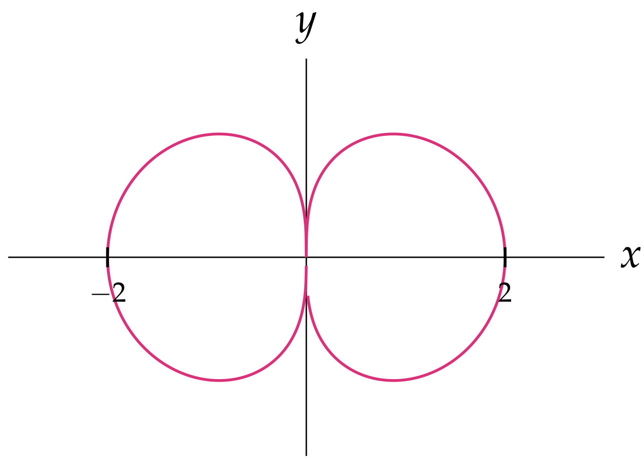
Fazemos uma pequena tabela de valores, marcamos os pontos correspondentes e usamos as informações sobre simetria e tangentes para nos guiar ao conectarmos os pontos por uma curva lisa.

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

(a)



(b)



Aproveite esta construção para resolver o exercício 10, item (b) da lista.

Exemplo 6. *Esboçar a curva de equação polar* $r = \cos(3\theta)$.

Solução: Primeiramente procuramos alguma simetria para a curva. Como:

$$(r,\theta) \in \text{Graf}\,(r = \cos(3\theta)) \Rightarrow r = \cos(3\theta) = \cos(-3\theta) \Rightarrow (r,-\theta) \in \text{Graf}\,(r = \cos(3\theta))$$

a curva apresenta simetria em torno do eixo Ox. Isto simplifica nosso trabalho, pois bastará esboçarmos o ramo da curva que se encontra no semiplano superior (em coordenadas cartesianas, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \geq 0$), ou seja, bastará estudarmos o comportamento da curva para $\theta \in [0,\pi]$. Vamos dividir este intervalo em alguns subintervalos menores, e nestes subintervalos vamos escolher ângulos θ convenientes tais que 3θ sejam ângulos"notáveis". Fazemos $[0,\pi] = [0,\pi/6] \cup [\pi/6,\pi/2] \cup [\pi/2,5\pi/6] \cup [5\pi/6,\pi]$.

No subintervalo $[0,\pi/6]$ temos:

θ	3θ	$r(\theta) = \cos(3\theta)$
0	0	$\cos(3\cdot 0) = 1$
$\pi/18$	$\pi/6$	$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
$\pi/12$	$\pi/4$	$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\pi/9$	$\pi/3$	$\cos(\pi/3) = 1/2$
$\pi/6$	$\pi/2$	$\cos(\pi/2) = 0$

Conforme θ varia de 0 a $\pi/6$, vemos que r sai do valor máximo $r = 1$ e diminui até alcançar $r = 0$.

Para $\theta \in [\pi/6,\pi/2]$ temos $3\theta \in [\pi/2,3\pi/2]$, de modo que $\cos(3\theta) \in [-1,0]$ - de modo que os pontos $(\cos 3\theta,\theta)$ estarão no terceiro quadrante. Não precisamos esboçar esta parte por enquanto, uma vez que ela será obtida por reflexão da parte da figura acima do eixo Ox.

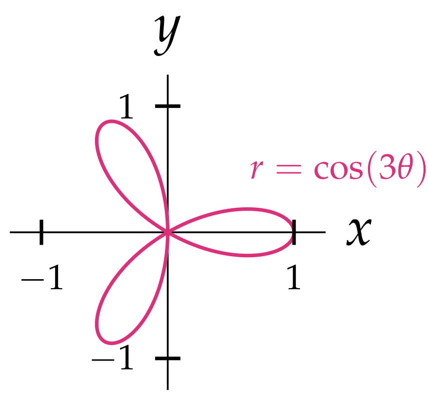
Este também é o caso para $\theta \in [5\pi/6, \pi]$, pois aí $3\theta \in [5\pi/2, \pi]$, donde $\cos(3\theta) \in [-1, 0]$.

Basta, assim, analisarmos o que ocorre conforme θ varia em $[\pi/2, 5\pi/6]$.

θ	3θ	$r(\theta) = \cos(3\theta)$
$\pi/2$	$3\pi/2$	$\cos(3\pi/2) = 0$
$7\pi/12$	$7\pi/4$	$\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$2\pi/3$	2π	$\cos(2\pi) = 1$
$3\pi/4$	$9\pi/4$	$\cos(9\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$5\pi/2$	$\cos(5\pi/2) = 0$

Assim, conforme θ varia de $\pi/2$ a $2\pi/3$, r aumenta de 0 a 1, e conforme θ varia de $2\pi/3$ a $5\pi/6$, r diminui de 1 a 0.

Obtemos, assim, um desenho como segue:



Para analisar construções de gráficos de curvas dadas em coordenadas polares, recomendamos que o leitor visite o site https://www.geogebra.org/m/S9RXWmNP.

2.6 Relacionando Coordenadas Polares e Cartesianas

Quando usamos tanto as coordenadas polares quanto as cartesianas em um plano, colocamos as duas origens juntas e tomamos o raio polar como sendo o eixo Ox positivo. O raio $\theta = \pi/2, r > 0$ torna-se, então, o eixo Oy positivo. Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados pelas equações:

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$
$$y = r \cdot \sin(\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

Usamos essas equações e álgebra para reescrever as equações polares na forma cartesiana e vice-versa.

Desta forma, são equações que definem a mesma curva:

- $r\cos\theta = 2$ e $x = 2$;
- $r^2\cos\theta\sin\theta = 4$ e $xy = 4$;
- $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$;
- $r = 1 + 2r\cos\theta$ e $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$;
- $r = 1 - \cos\theta$ e $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$.

Exemplo 7. *Encontrar uma equação polar* $x^2 + (y-3)^2 = 9$.

Solução: Expandimos $(y-3)^2$ no primeiro membro da expressão para obter:

$$x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

donde $r = 0$ ou $r = 6\sin\theta$, com $0 \leq \theta \leq \pi$.

Exemplo 8. *Encontrar uma equação cartesiana equivalente para a equação polar dada em cada caso:*

(a) $r^2 = 4r\cos\theta$.

(b) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Solução:

Ad (a): Fazendo a substituição $r^2 = x^2 + y^2$ e a substituição $x = r\cos\theta$, obtemos:

$$x^2 + y^2 = 4x,$$

que completando quadrados pode ser escrita como:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

que corresponde a uma circunferência de raio 2 centrada no ponto $(2, 0)$.

Ad (b): Temos $r(2\cos\theta - \sin\theta) = 4$, ou seja:

$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$$

Efetuando as substituições $r\cos\theta = x$ e $r\sin\theta = y$, obtemos:

$$2x - y = 4$$

ou:

$$y = 2x - 4$$

uma reta passando por $(0, -4)$ com coeficiente angular igual a 2.

3 Área em Coordenadas Polares

Em se tratando de áreas de curvas dadas em coordenadas cartesianas, as regiões mais simples cujas áreas podemos calcular são retângulos. No caso das coordenadas polares, as regiões mais simples são setores circulares.

A área de um setor circular de raio r_k com ângulo interno $\Delta\theta_k$ é:

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k$$

Nossos elementos básicos constituintes das regiões definidas por curvas polares serão aproximadas por estes setores circulares. A fórmula acima pode ser deduzida de uma simples regra-de-três:

Ângulo que define o setor	Área do setor
2π	πr_k^2
$\Delta\theta_k$	x

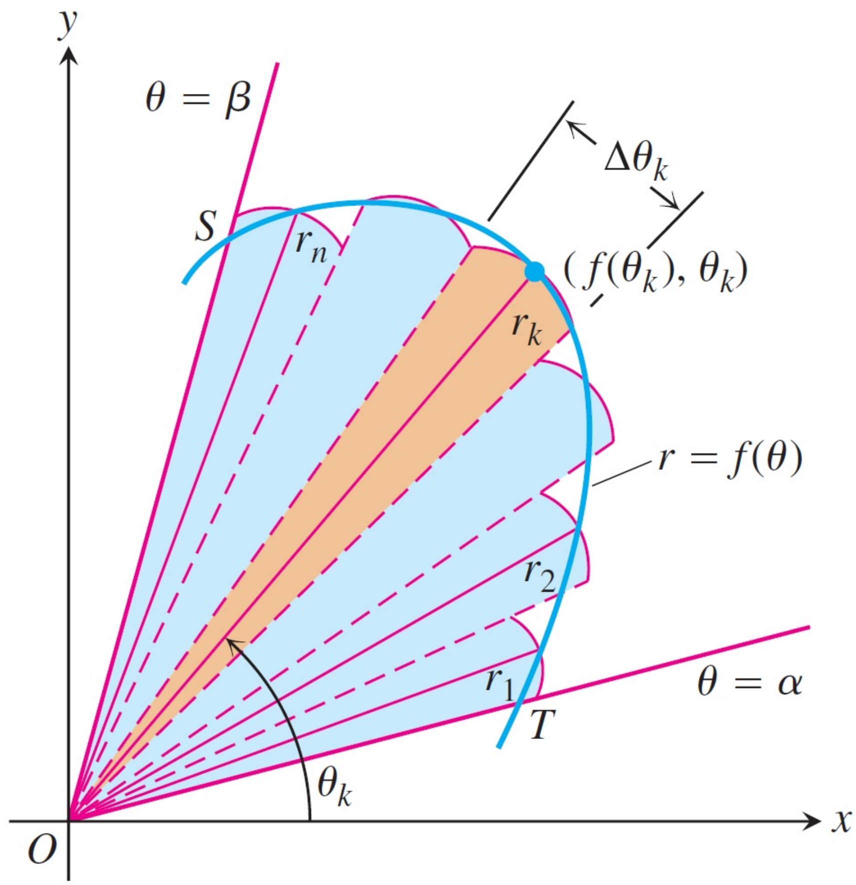


Figura 4: https://www.geogebra.org/m/mCuDhtjU

$$2\pi x = \pi r_k^2 \Delta\theta_k$$

$$x = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k$$

Consideremos o seguinte problema: queremos calcular a área OTS na figura 4, que é limitada pelos raios $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ e pela curva $r = f(\theta)$.

Aproximamos a região com n setores circulares não sobrepostos, baseados em uma partição $\mathcal{P}$ do ângulo $\angle TOS$. O setor típico tem raio $r_k = f(\theta_k)$ e ângulo central de medida, em radianos, $\Delta\theta_k$. Sua área é:

$$A_k = \frac{1}{2} r_k^2 \Delta\theta_k = \frac{1}{2} (f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k$$

A área da região OTS é aproximadamente:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k.$$

Se f é contínua, esperamos que as aproximações melhorem à medida que refinamos mais e mais a partição, e somos levados à seguinte fórmula para a área da região:

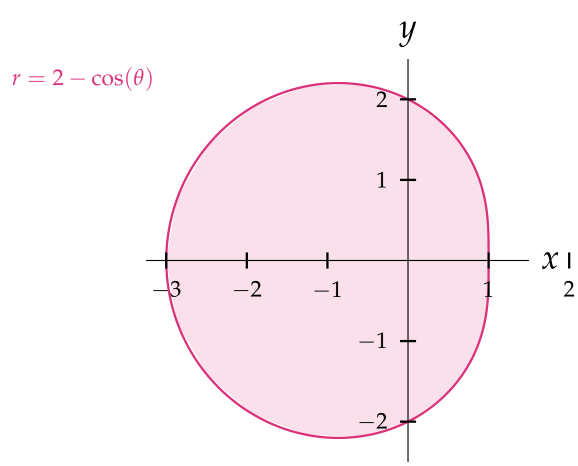
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}(f(\theta_k))^2 \Delta\theta_k = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2}(f(\theta))^2 d\theta$$

A **área** da região **entre a origem e a curva** $r = f(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$ é:

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

Exemplo 9. *Calule a área da região delimitada pelas curvas:*

(a) $r(\theta) = 2 - \cos(\theta)$



Solução:

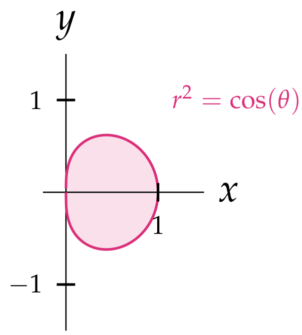
Neste caso, tem-se $\alpha = 0$, $\beta = 2 \cdot \pi$ *e* $r = f(\theta) = 2 - \cos(\theta)$. *Assim:*

$$A = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{2} f(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (2-\cos(\theta))^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} (4 - 4\cos(\theta) + \cos^2(\theta)) d\theta =$$

$$= 2\int_{0}^{2\pi} d\theta - 2\int_{0}^{2\pi} \cos(\theta) d\theta + \frac{1}{2}\int_{0}^{2\pi} \cos^2(\theta) d\theta = 4\pi + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}\cdot\left(\theta + \frac{1}{2}\sin(2\theta)\right)\right]_{0}^{2\pi} =$$

$$= 4\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{9\pi}{2}$$

(b) $r^2 = \cos(\theta)$, $r \geq 0$



Após fazer um esboço da curva, concluímos que a área é dada por:

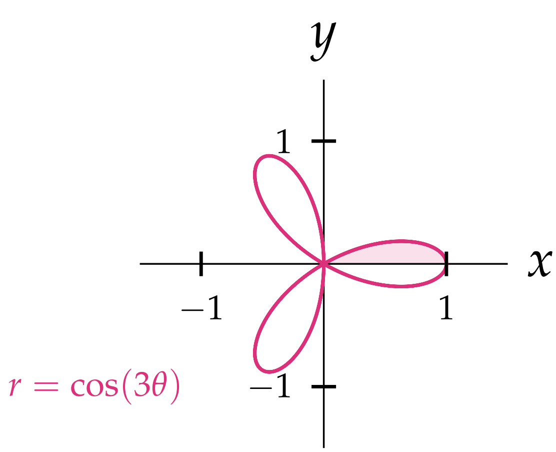
$$A = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(\theta)d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

(c) $r(\theta) = \cos(3\theta)$

Solução: *Após fazer um esboço, vemos que a área delimitada por esta curva é igual a seis vezes a área da curva que se encontra no primeiro quadrante.*

Vejamos que intervalo de ângulos devemos varrer para obter este ramo da curva determinando a reta tangente no polo. Temos $f(\theta) = 0$ *no primeiro quadrante se, e somente se, tivermos simultaneamente* $0 \leq 3\theta \leq \frac{\pi}{2}$ *e* $\cos(3\theta) = 0$, *o que ocorre em* $\left[0, \frac{\pi}{6}\right]$ *se, e somente se,* $3\theta = \frac{\pi}{2}$, *ou seja, para* $\theta = \frac{\pi}{6}$.

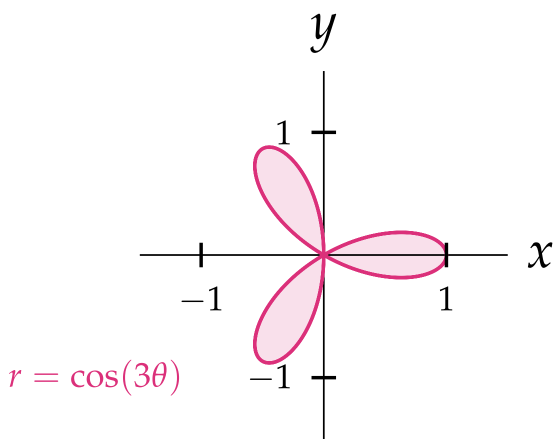
Deste modo, a sexta parte da área desejada será aquela compreendida entre $\theta = 0$ *e* $\theta = \frac{\pi}{6}$.



$$A_{\frac{1}{6}} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} r(\theta)^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} [\cos(3\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}} \cos^2(3\theta) d\theta = \frac{\pi}{24}$$

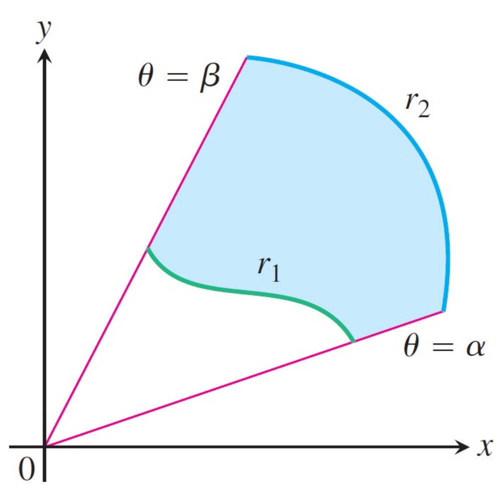
Assim, a área A é:

$$A = 6 \cdot \frac{\pi}{24} = \frac{\pi}{4}.$$



4 Área entre Curvas

Para encontrar a área de uma região como a da figura a seguir, que está entre duas curvas polares, uma "mais interna" (no sentido de mais próxima da origem) $r = r_1(\theta)$ e outra "mais externa" (no sentido de mais distante da origem) $r = r_2(\theta)$, de $\theta = \alpha$ a $\theta = \beta$, subtraímos a integral de $(1/2)r_1(\theta)^2$ da integral de $(1/2)r_2(\theta)^2$.



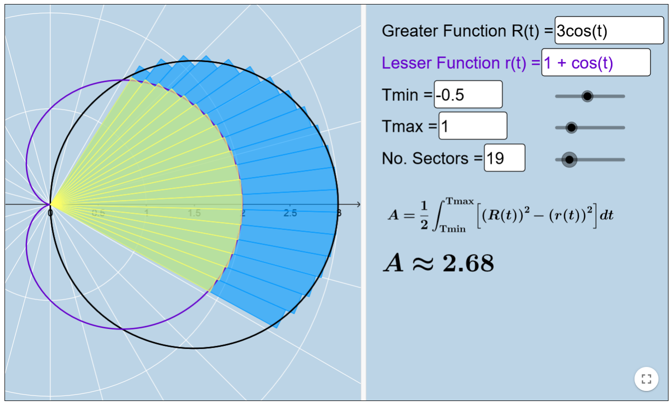


Figura 5: https://www.geogebra.org/m/evy57yN4

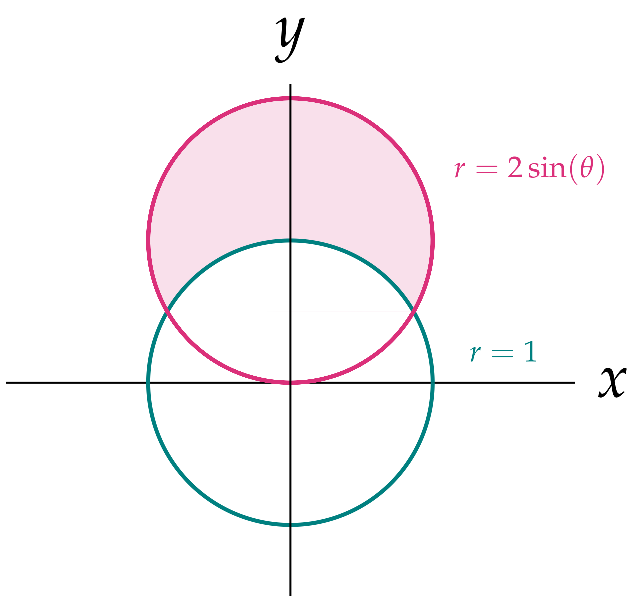
Isso leva à fórmula a seguir:

A **área** da região $0 \leq r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta)$, $\alpha \leq \theta \leq \beta$, é:

$$A = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_2(\theta)^2 d\theta - \int_\alpha^\beta \frac{1}{2} r_1(\theta)^2 d\theta = \int_\alpha^\beta \frac{1}{2}(r_2^2(\theta) - r_1^2(\theta))d\theta$$

Exemplo 10. *Encontre a área da região interior ao círculo* $x^2 + (y-1)^2 = 1$ *e exterior ao círculo* $x^2 + y^2 = 1$.

Solução: Fazemos um esboço das curvas para identificar a região de integração:



Para identificar os pontos em que as duas curvas se interceptam, resolvemos:

$$x^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$
$$y^2 = (y-1)^2$$
$$y = \frac{1}{2}$$

Substituindo em $x^2 + y^2 = 1$, tem-se $x = \pm\sqrt{3}/2$. Em termos de ângulos, trata-se dos raios $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$.

Escrevemos a curva $x^2 + y^2 = 1$ em coordenadas polares: como se trata de uma circunferência centrada na origem, sua equação é $r = 1$.

Também escrevemos a curva $x^2 + (y-1)^2 = 1$, que é $x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1$, em coordenadas polares, usando a substituição $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$:

$$r^2 - 2r\sin(\theta) + 1 = 1$$

$$r = 2\sin(\theta)$$

A fronteira da região "mais externa" é a curva $r_2(\theta) = 2\sin(\theta)$, para θ entre $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$, de modo que $r_2(\theta) = 2\sin(\theta)$. A fronteira da região "mais interna" é a curva $r_1(\theta) = 1$ entre $\theta = \pi/6$ e $\theta = 5\pi/6$.

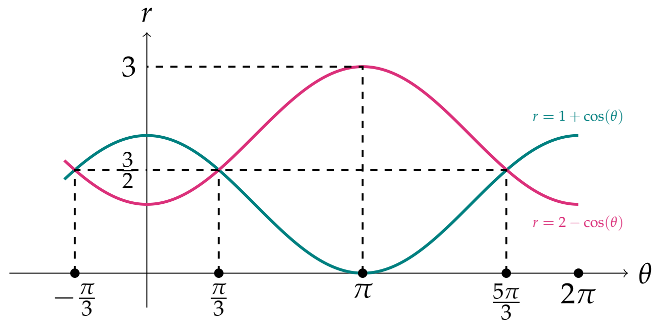
A área da região desejada é:

$$\int_{\pi/6}^{5\pi/6} \frac{1}{2}[(2\sin(\theta))^2 - 1^2]d\theta = \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6}(2\sin(\theta))^2 d\theta - \frac{1}{2}\int_{\pi/6}^{5\pi/6} 1^2 d\theta =$$
$$= \frac{4\pi + 3\sqrt{3}}{6} - \frac{2\pi}{6} = \frac{2\pi + 3\sqrt{3}}{6}$$

Exemplo 11. *Calule a área da interseção das regiões limitadas pelas curvas dadas em coordenadas polares por:*

(a) $r(\theta) = 2 - \cos(\theta)$ *e* $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$*.*

Neste caso, temos as curvas $r(\theta) = 2 - \cos(\theta)$ *e* $r(\theta) = 1 + \cos(\theta)$*, e precisamos determinar suas posições relativas. Para isto, fazemos, em um mesmo sistema cartesiano, os gráficos de cada função:*



Conforme construímos o gráfico, buscamos determinar onde estas duas curvas se interceptam, o que ocorre nos valores de $\theta \in [-\pi, \pi]$ *tais que:*

$$2 - \cos(\theta) = 1 + \cos(\theta)$$
$$1 = 2\cos(\theta)$$
$$\frac{1}{2} = \cos(\theta) \iff \left(\theta = -\frac{\pi}{3}\right) \vee \left(\theta = \frac{\pi}{3}\right)$$

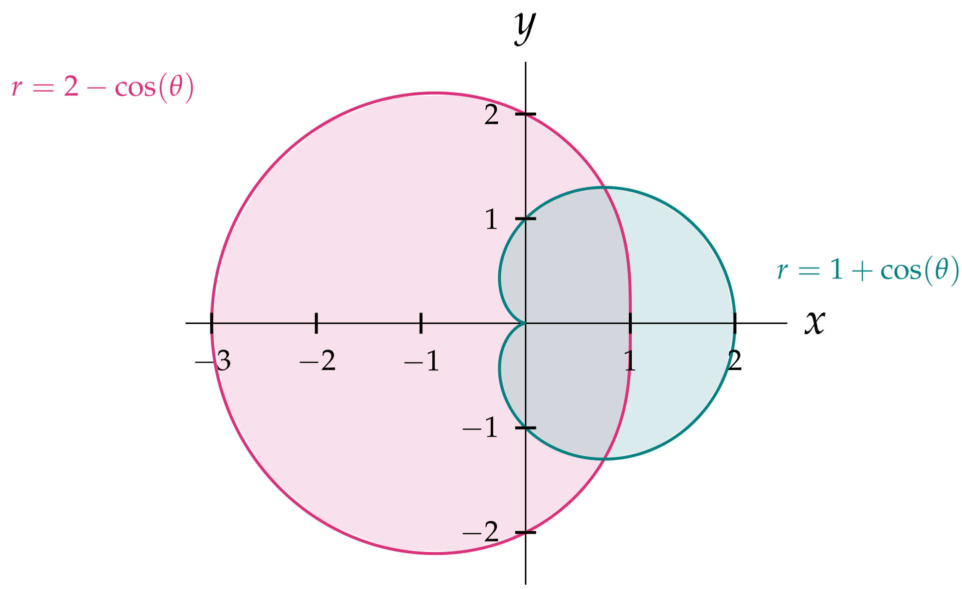
Verificamos que:

$$\left(\forall\theta \in \left[\frac{-\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]\right)\left(2 - \cos(\theta) \leq \frac{3}{2} \leq 1 + \cos(\theta)\right)$$

A área da parte interior à curva $r_2(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ *e exterior à curva* $r_1(\theta) = 2 - \cos(\theta)$ *será:*

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [(1 + \cos(\theta))^2 - (2 - \cos(\theta))^2] d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (6 \cdot \cos(\theta) - 3) d\theta = 3\sqrt{3} - \pi$$

A área, S, da interseção, portanto, será igual à diferença entre a área total delimitada por $r_1(\theta) = 1 + \cos(\theta)$ *e a área calculada acima.*



A área da cardioide é:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{2\pi} (1 + \cos(\theta))^2 d\theta = \frac{3\pi}{2}$$

Logo, a área da interseção é:

$$S = \frac{3\pi}{2} - (3\sqrt{3} - \pi) = \frac{5\pi}{2} - 3\sqrt{3}.$$

(b) $r(\theta) = \sin(\theta)$ *e* $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$.

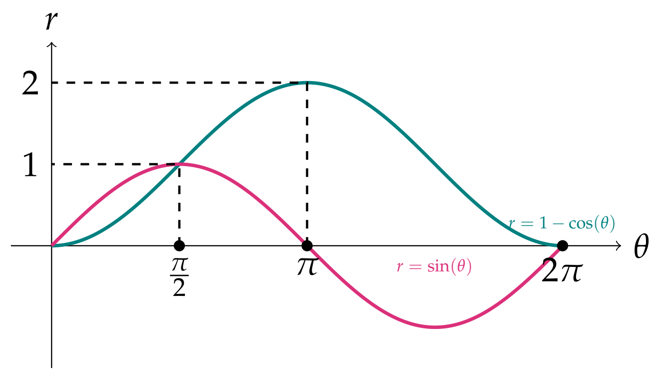
Neste caso, temos as curvas $r(\theta) = \sin(\theta)$ *e* $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$*, e precisamos determinar suas posições relativas. Para isto, primeiramente buscamos determinar onde estas curvas se interceptam, o que ocorrerá nos pontos* (r, θ) *onde* $r_1(\theta) = r_2(\theta)$*, ou seja, onde:*

$$\sin(\theta) = 1 - \cos(\theta)$$
$$\sin(\theta) + \cos(\theta) = 1$$
$$\sqrt{1 - \cos^2(\theta)} + \cos(\theta) = 1$$

Fazendo $u = \cos(\theta)$*, temos:*

$$\sqrt{1 - u^2} + u = 1 \iff 1 - u^2 = 1 - u \iff u^2 - u = 0 \iff (u = 0) \vee (u = 1)$$

Mas temos $\cos(\theta) = 0 \iff \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ *e* $\cos(\theta) = 1 \iff \theta \in \{0, 2\pi\}$. *Assim, as interseções ocorrem para* $\theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$



Verificamos que para $0 \leq \theta \leq \pi/2$ *tem-se:*

$$1 - \cos(\theta) \leq \sin(\theta)$$

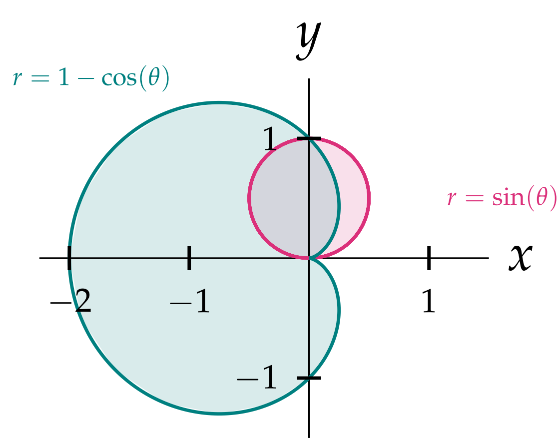
$$\therefore \left(\forall\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) (2 - \cos(\theta) \leq \sin(\theta))$$

A área da parte interior à curva $r_2(\theta) = \sin(\theta)$ *e exterior à curva* $r_1(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ *será:*

$$\frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} [(\sin(\theta))^2 - (2 - \cos(\theta))^2] d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} (6 \cdot \cos(\theta) - 3) d\theta = 6 - \frac{3\pi}{2}$$

A área, S, da interseção, portanto, será igual à diferença entre a área total delimitada por $r_1(\theta) = \sin(\theta)$ *e a área calculada acima, ou seja,*

$$S = \pi - \left(6 - \frac{3\pi}{2}\right) = \frac{5\pi}{2} - 6$$



(c) $r(\theta) = 1$ *e* $r(\theta) = 2 \cdot (1 - \cos(\theta))$.

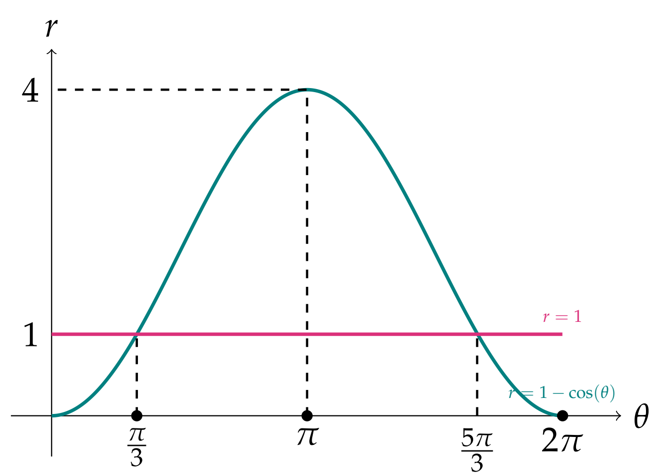
Neste caso, temos as curvas $r(\theta) = \sin(\theta)$ *e* $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$*, e precisamos determinar suas posições relativas. Para isto, primeiramente buscamos determinar onde estas curvas se interceptam, o que ocorrerá nos pontos* (r, θ) *onde* $r_1(\theta) = r_2(\theta)$*, ou seja, onde:*

$$\begin{aligned} \sin(\theta) &= 1 - \cos(\theta) \\ \sin(\theta) + \cos(\theta) &= 1 \\ \sqrt{1 - \cos^2(\theta)} + \cos(\theta) &= 1 \end{aligned}$$

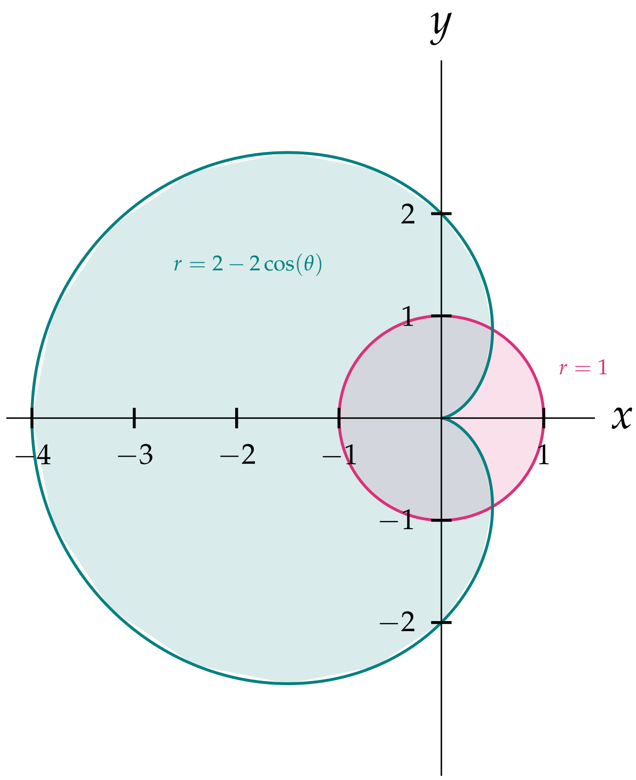
Fazendo $u = \cos(\theta)$*, temos:*

$$\sqrt{1 - u^2} + u = 1 \iff 1 - u^2 = 1 - u \iff u^2 - u = 0 \iff (u = 0) \vee (u = 1)$$

Mas temos $\cos(\theta) = 0 \iff \theta = \pm\frac{\pi}{2}$ *e* $\cos(\theta) = 1 \iff \theta \in \{0, 2\pi\}$*. Assim, as interseções ocorrem para* $\theta \in \left\{\frac{\pi}{2}, 2\pi\right\}$



Verificamos que para $\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{5\pi}{3}$ *tem-se:*



A área da interseção será igual à diferença da área da circunferência de raio 1 e da área da região S, exterior à curva $r = 2 \cdot (1 - \cos(\theta))$ e interior à curva $r = 1$:

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} [1^2 - (2 - 2\cos(\theta))^2] d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} (-3 + 8\cos(\theta) - 4\cos^2(\theta)) d\theta =$$

$$= -2\pi - \frac{4\pi}{3} + 7\sqrt{3}$$

5 Comprimento de uma Curva dada em Coordenadas Polares

Podemos obter uma fórmula em coordenadas polares para calcular o comprimento de uma curva $r = f(\theta), \alpha \leq \theta \leq \beta$, parametrizando a curva como:

$$\begin{cases} x(\theta) = r \cdot \cos(\theta) = f(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = r \cdot \sin(\theta) = f(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Pela fórmula deduzida na AGENDA 1, temos:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta =$$

$$= \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f'(\theta) \cdot \sin(\theta) + f(\theta) \cdot \cos(\theta)]^2 + [f'(\theta) \cdot \cos(\theta) - f(\theta) \cdot \sin(\theta)]^2} d\theta$$

Note que:

$$\begin{aligned}
&[f'(\theta) \cdot \sin(\theta) + f(\theta) \cdot \cos(\theta)]^2 + [f'(\theta) \cdot \cos(\theta) - f(\theta) \cdot \sin(\theta)]^2 = \\
&\quad = f'(\theta)^2 \cdot \sin^2(\theta) + f(\theta)^2 \cdot \cos^2(\theta) + \cancel{2 \cdot f(\theta) \cdot f'(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)} + \\
&\quad + f'(\theta)^2 \cdot \cos^2(\theta) - \cancel{2 \cdot f(\theta) \cdot f'(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\theta)} + f(\theta)^2 \cdot \sin^2(\theta) = \\
&\quad = f'(\theta)^2 \cdot [\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)] + f(\theta)^2 \cdot [\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta)] = \\
&\quad = f'(\theta)^2 + f(\theta)^2
\end{aligned}$$

Assim,

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{f(\theta)^2 + f'(\theta)^2} d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

Exemplo 12. *Calcular o comprimento da cardioide:*

$$r = 1 - \cos(\theta)$$

Apêndice: Parábolas e Elipses em Coordenadas Polares

Nesta seção apresentamos uma definição geral de cônica conveniente à sua descrição em coordenadas polares.

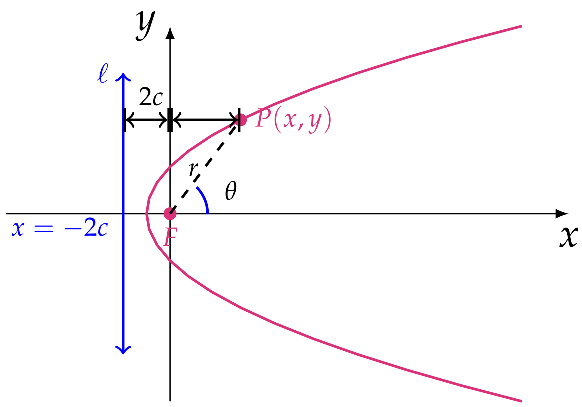
Definição 13 (cônica). *Sejam $\epsilon > 0$, F um ponto do plano e ℓ uma reta tal que $F \notin \ell$. A cônica $\mathscr{C}$ de excentricidade ϵ, foco F e diretriz ℓ consiste de todos os pontos P do plano tais que:*

$$\frac{\text{dist}\,(P, F)}{\text{dist}\,(P, \ell)} = \epsilon$$

Se $\epsilon = 1$, a cônica é denominada **parábola**. No caso em que $0 \leq \epsilon < 1$, a cônica é uma **e**lipse, enquanto que se $\epsilon > 1$, chamamos a cônica de **hipérbole**.

5.1 Parábola $y^2 = x + c$ com Polo no Foco

Consideremos uma parábola com $F = (0, 0)$ e reta diretriz $\ell : x = -2c$:



Pela definição de parábola como cônica de excentricidade 1, tem-se:

$$\frac{\text{dist}\,(P, F)}{\text{dist}\,(P, \ell)} = 1$$

$$\frac{r}{r \cdot \cos(\theta) + 2c} = 1$$

$$r = r \cdot \cos(\theta) + 2c$$

$$r \cdot (1 - \cos(\theta)) = 2c$$

Para todo $\theta \neq 0, 2\pi$, podemos escrever:

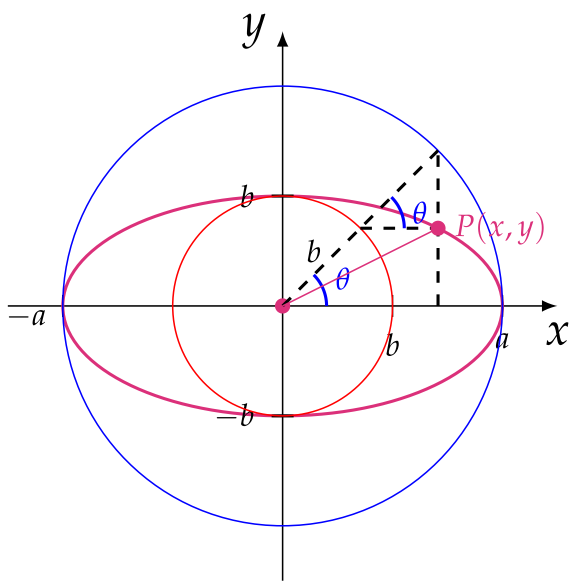
$$r(\theta) = \frac{2c}{1 - \cos(\theta)}$$

5.2 Elipse com Polo na Origem

Consideremos a elipse de equação:

$$\mathscr{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

com $0 < b < a$. Sejam $\epsilon = c/a$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, $F = (\pm c, 0)$ e considere $\ell : x = -c$.



Podemos escrever:

$$\mathscr{E}:\begin{cases} x = a\cdot\cos(\theta) \\ y = b\cdot\sin(\theta)\end{cases}$$

de modo que:

$$r = \operatorname{dist}\left((0,0),(x,y)\right) = \sqrt{a^2\cdot\cos^2(\theta)+b^2\cdot\sin^2(\theta)} = \sqrt{a^2-a^2\cdot\sin^2(\theta)+b^2\sin^2(\theta)} =$$

$$= \sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cdot\sin^2(\theta)} = \sqrt{a^2-c^2\cdot\sin^2(\theta)} = a\sqrt{1-\epsilon^2\cdot\sin^2(\theta)}$$

Assim,

$$r(\theta) = a\cdot\sqrt{1-\epsilon^2\cdot\sin^2(\theta)}$$

5.3 Elipse com Polo em um dos Focos

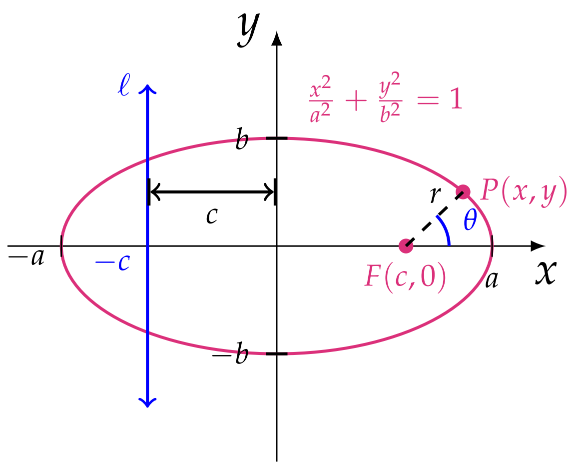
Consideremos uma elipse de equação:

$$\mathscr{E}:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

com $0<b<a$.

Fazendo $c=\sqrt{a^2-b^2}$, considere $\epsilon = c/a$, o ponto $F=(c,0)$ e a reta $\ell : x = -c$. A elipse $\mathscr{E}$ é o conjunto de todos os pontos P do plano tais que:

$$\frac{\text{dist}\,(P,F)}{\text{dist}\,(P,\ell)} = \epsilon$$



Por definição da excentricidade, temos:

$$\frac{r}{2c + r\cdot\cos(\theta)} = \epsilon$$

$$r = \frac{\text{dist}\,(P,F)}{\text{dist}\,(P,\ell)} = 2c\cdot\epsilon + \epsilon\cdot r\cdot\cos(\theta)$$

$$r\cdot(1-\epsilon\cdot\cos(\theta)) = 2c\epsilon \tag{1}$$

Como $0 \leq \epsilon < 1$ e $0 \leq \cos(\theta) \leq 1$, tem-se:

$$\epsilon\cdot\cos(\theta) < 1,$$

de modo que $0 < 1-\epsilon\cdot\cos(\theta)$, e podemos reescrever (1) como:

$$r(\theta) = \frac{2c\epsilon}{1-\epsilon\cdot\cos(\theta)}$$

Referências

[1] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.

[2] https://math.stackexchange.com/questions/1550259/cardioid-in-coffee-mug, acessado em 17 de março de 2020.