

MAT0121 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL II

AGENDA 05

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

Funções com duas ou mais variáveis independentes aparecem com muito mais frequência em ciência do que funções de uma variável, e seu cálculo é ainda mais extenso. Suas derivadas são mais variadas e mais interessantes por causa das diferentes maneiras como as variáveis podem interagir, e suas integrais levam a uma variedade maior de aplicações.

Os estudos de Probabilidade, Estatística, Dinâmica dos Fluidos e Eletricidade, dentre outros, conduzem de um modo natural a funções de mais de uma variável real.

2 Funções de Várias Variáveis

Muitas funções dependem de mais de uma variável independente. A função $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$ calcula o volume de um cilindro circular reto a partir do seu raio e altura. A função $f(x, y) = x^2 + y^2$ calcula a altura do parabolóide $z = x^2 + y^2$ acima do ponto P de coordenadas $(x, y, 0)$. A temperatura, T , de um ponto na superfície da Terra depende de sua latitude x e longitude y , representada por $T = f(x, y)$. A seguir definiremos funções de mais de uma variável independente e apresentaremos maneiras de representá-las em gráficos.

*jeancb@ime.usp.br

2.1 Funções de Duas Variáveis

Definição 1. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de pares ordenados de números reais. Uma **função real f de duas variáveis em D** é, simplesmente, uma função de domínio D e contradomínio \mathbb{R} . Denotamos uma tal função por:

$$\begin{aligned} f : D \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = w \end{aligned}$$

As variáveis x e y são chamadas “variáveis independentes”, enquanto que a variável $w = f(x, y)$ é chamada “variável dependente” (de x e de y).

Em aplicações, costumamos usar letras que nos remetem ao significado da variável. Para dizermos que o volume de um cilindro circular reto é uma função de seu raio e altura, podemos escrever $V = f(r, h)$. Para sermos mais específicos, poderíamos trocar a notação $f(r, h)$ pela fórmula que calcula o valor de V a partir dos valores de r e h e escrever $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$. Em ambos os casos, r e h seriam as variáveis independentes e V seria a variável dependente da função.

Como de costume, calculamos funções definidas por fórmulas substituindo os valores das variáveis independentes na fórmula e calculando o valor correspondente da variável dependente.

Exemplo 2. Quando usamos coordenadas cartesianas, a distância de um ponto (x, y) à origem é dada pela função:

$$D(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Ao definirmos funções de duas variáveis, seguimos a prática usual de excluir entradas que levem a números complexos ou à divisão por zero. Se $f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$, y não pode ser menor que x^2 . Se $f(x, y) = 1/x \cdot y$, $x \cdot y$ não pode ser zero. Consideraremos que, caso não seja mencionado, o domínio de uma função de duas variáveis será o maior subconjunto do plano para cujos elementos a regra de definição da função nos gera um número real. O conjunto-imagem, por sua vez, consiste de todos os valores assumidos pela variável dependente conforme as variáveis independentes assumem os valores do domínio.

Exemplo 3. Uma função da forma:

$$\begin{aligned} p : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \sum_{m,n} a_{mn} \cdot x^m \cdot y^n \end{aligned}$$

com $m, n \in \mathbb{N}$ e $a_{mn} \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função polinomial em duas variáveis**.

Dentre as funções polinomiais, podemos destacar o seguinte:

Exemplo 4. Uma função da forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto a \cdot x + b \cdot y + c \end{aligned}$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função afim**.

Dentre as funções afins, há uma classe importantíssima de funções, dadas no seguinte:

Exemplo 5. Uma função da forma:

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto a \cdot x + b \cdot y \end{aligned}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função (ou funcional) linear**.

Exemplo 6. Uma função da forma:

$$\begin{aligned} f: R \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{p(x, y)}{q(x, y)} \end{aligned}$$

onde $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid q(x, y) \neq 0\}$ é denominada uma **função racional**.

Exemplo 7. Uma função:

$$\begin{aligned} f: R \subseteq \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \end{aligned}$$

tal que para todo $t > 0$ e para todo $(x, y) \in R$ tal que $(t \cdot x, t \cdot y) \in R$ tem-se:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = t^\lambda \cdot f(x, y)$$

:

para certo $\lambda \in \mathbb{R}$ é denominada **homogênea de grau λ** .

2.2 Determinando e Representando o Domínio e a Imagem de Funções de Duas Variáveis Reais

Exemplo 8. Determinar e esboçar o domínio da função de duas variáveis reais dada por:

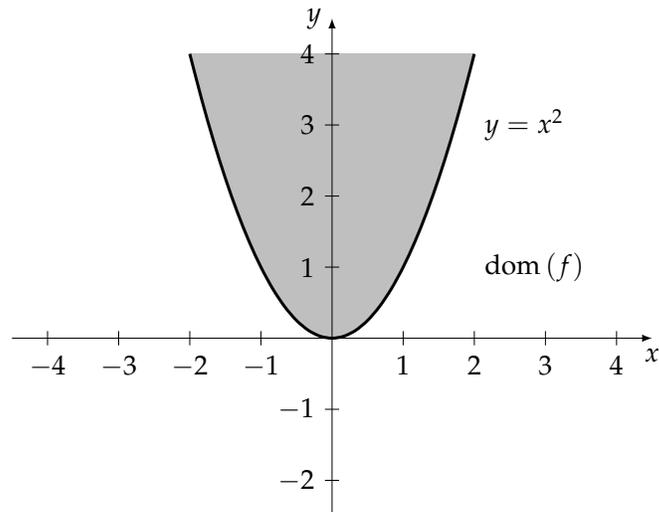
$$w = f(x, y) = \sqrt{y - x^2}$$

Solução: A condição para que exista (enquanto número real) $\sqrt{y - x^2}$ é que $y - x^2 \geq 0$, ou seja, que:

$$x^2 \leq y$$

Assim, o domínio de f consiste do seguinte conjunto:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 \leq y\}$$



Exemplo 9. Determinar e esboçar o domínio da função de duas variáveis reais dada pela regra:

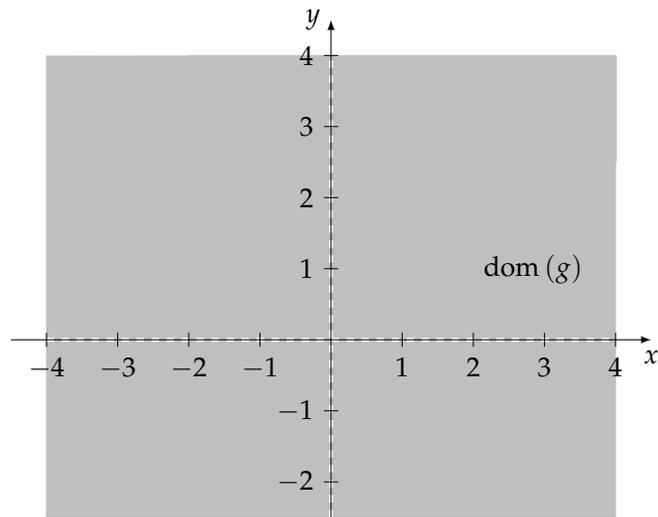
$$w = g(x, y) = \frac{1}{x \cdot y}$$

Solução: A condição para que exista (enquanto número real) $1/(x \cdot y)$ é que $x \cdot y \neq 0$, ou seja, que:

$$x \neq 0 \text{ e, simultaneamente, } y \neq 0$$

Assim, o domínio de f consiste do seguinte conjunto:

$$\text{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \neq 0) \& (y \neq 0)\} = \mathbb{R}^2 \setminus (\{(x, 0) \mid x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\})$$



Exemplo 10. Determinar e esboçar o domínio da função de duas variáveis reais dada pela regra:

$$w = h(x, y) = \arcsin\left(\frac{x}{x+y}\right)$$

Solução: Para que possamos calcular $\arcsin(x/(x+y))$, é necessário, primeiramente, que tenhamos:

$$x + y \neq 0,$$

ou seja, $y \neq -x$. Desta forma, seja qual for o domínio de h , ele estará contido em:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \neq -x\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y > -x) \text{ ou } (y < -x)\}$$

Agora, para que possamos calcular o arco-seno de $\frac{x}{x+y}$, é necessário que valha:

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1$$

Temos dois sub-casos a considerar.

Se estivermos no caso em que $y > -x$, teremos $x + y > 0$, de modo que:

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \iff -(x+y) \leq x \leq x+y$$

$$\iff -x - y \leq x \leq x + y \iff$$

$$\iff -x - y - x \leq x - x \leq x + y - x \iff$$

$$\iff (0 \leq 2x + y) \& (0 \leq y)$$

Se, no entanto, estivermos no caso em que $y < -x$, teremos $x + y < 0$, de modo que:

$$-1 \leq \frac{x}{x+y} \leq 1 \iff -(x+y) \geq x \geq x+y$$

$$\iff -x - y \geq x \geq x+y \iff$$

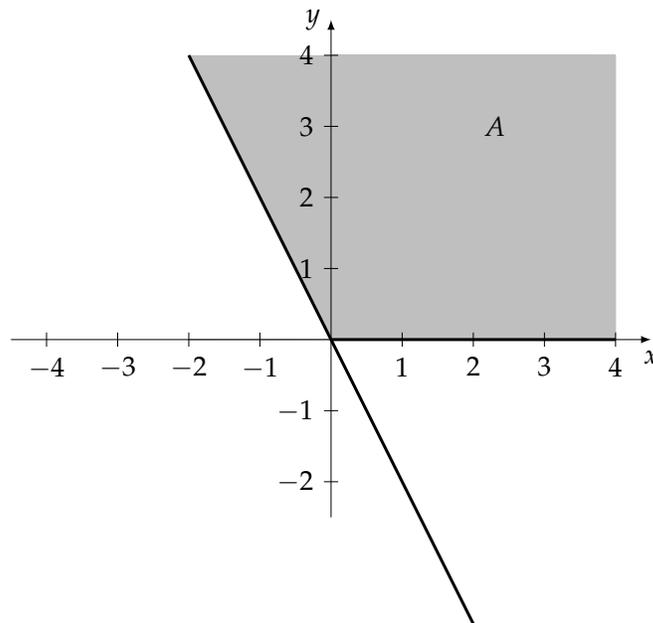
$$\iff -x - y - x \geq x - x \geq x + y - x \iff$$

$$\iff (2x + y \leq 0) \& (y \leq 0)$$

Assim, poderemos calcular $w = h(x, y)$ sempre que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ for tal que:

$$\begin{cases} -x < y \\ 0 \leq 2x + y \\ 0 \leq y \end{cases}$$

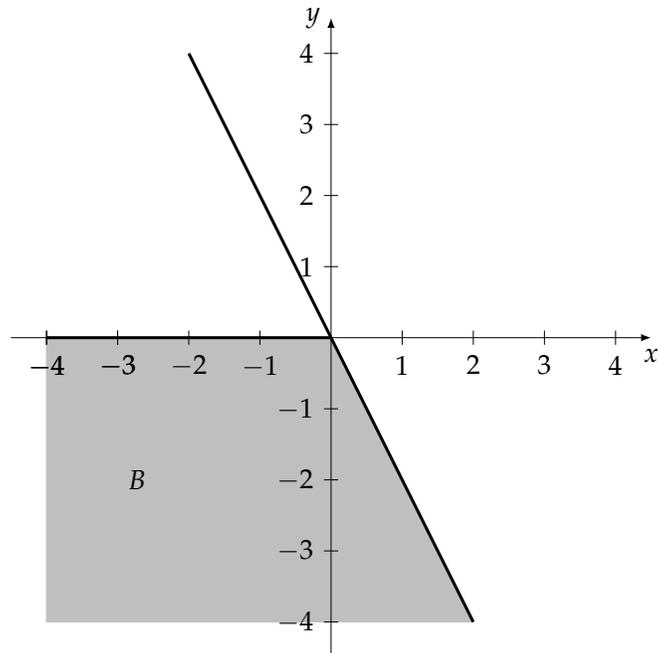
A região do plano cujos pontos satisfazem simultaneamente estas inequações está esboçada abaixo:



A outra possibilidade para o ponto do domínio é que ele satisfaça:

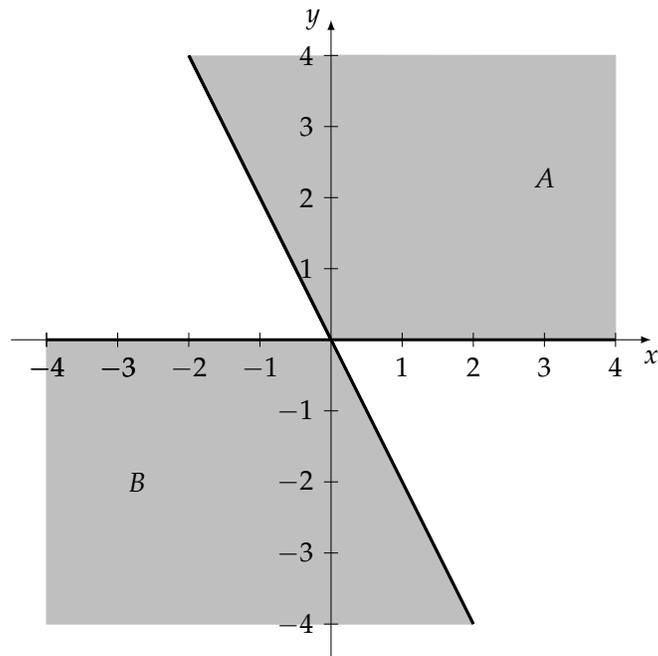
$$\begin{cases} y < -x \\ 2x + y \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$$

A região cujos pontos satisfazem todas as inequações acima está representada abaixo:



$$\text{dom}(h) = \overbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (-x < y) \& (0 \leq 2x + y) \& (0 \leq y)\}}^A \cup \underbrace{\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (y < -x) \& (2x + y \leq 0) \& (y \leq 0)\}}_B$$

Assim, o domínio de h fica representado como a região sombreada a seguir:



Exemplo 11. Determinar e esboçar o domínio da função de duas variáveis reais dada pela regra:

$$z = k(x, y) = \ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$$

Solução: Para que possamos calcular $\ln(36 - 4x^2 - 9y^2)$ será necessário que:

$$36 - 4x^2 - 9y^2 > 0,$$

ou, equivalentemente,

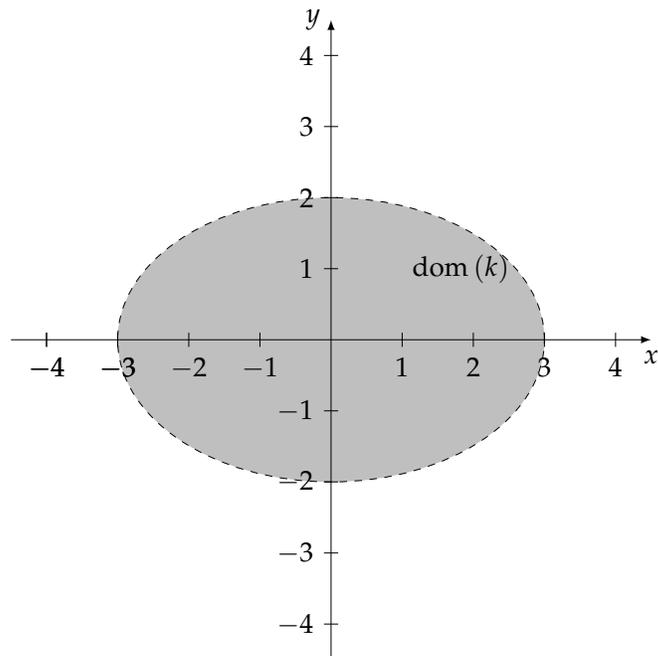
$$4x^2 + 9y^2 < 36$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1$$

Assim,

$$\text{dom}(k) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} < 1 \right\},$$

cuja representação gráfica é dada logo abaixo:



Definição 12 (operações com funções). Sejam $f : R_1 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : R_2 \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) A **soma** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f + g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) + g(x, y) \end{aligned}$$

(b) A **subtração** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f - g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) - g(x, y) \end{aligned}$$

(c) O **produto** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f \cdot g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) \cdot g(x, y) \end{aligned}$$

(d) O **quociente** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : R_1 \cap (R_2 \setminus g^{-1}[\{0\}]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto \frac{f(x, y)}{g(x, y)} \end{aligned}$$

2.3 Gráfico de Funções de Duas Variáveis a Valores Reais

Definição 13 (gráfico). Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. O gráfico de f é o conjunto:

$$\mathcal{G}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \mid ((x, y) \in R) \& (z = f(x, y))\} \subseteq \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$$

Daqui em diante identificaremos $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ com \mathbb{R}^3 mediante a bijeção:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3, \\ ((x, y), z) &\mapsto (x, y, z) \end{aligned}$$

que tem por inversa:

$$\begin{aligned} \psi : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto ((x, y), z) \end{aligned}$$

Posteriormente veremos que esta é uma bijeção bicontínua (isto é, a função e sua inversa são ambas contínuas). Desta forma, todas as propriedades “topológicas” estarão preservadas mediante esta identificação.

Em virtude da bijeção bicontínua descrita acima, passaremos a considerar o gráfico como sendo o seguinte subconjunto de \mathbb{R}^3 :

$$\begin{aligned} \text{Graf}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x, y, z) \in \mathcal{G}(f)\} = \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y) \in R) \& (z = f(x, y))\}. \end{aligned}$$

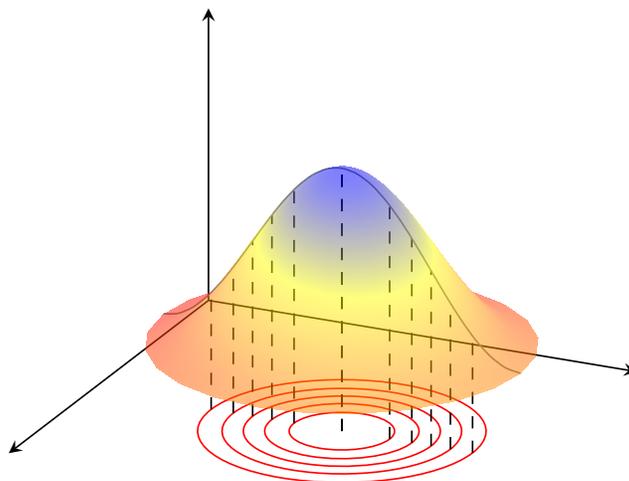
Existem duas maneiras-padrão de visualizar o comportamento dos valores de uma função $z = f(x, y)$. Uma é desenhar e identificar curvas no domínio de f ao longo das quais f assumo um valor constante. A outra é esboçar a superfície $z = f(x, y)$ no espaço.

Definição 14 (curva de nível e curva de contorno). Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $z_0 \in \mathbb{R}$. A curva de nível z_0 de f é o conjunto:

$$N_{z_0} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y) \in R) \& (f(x, y) = z_0)\}$$

Por sua vez, a curva de contorno z_0 é:

$$C_{z_0} = \{(x, y, z_0) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y) \in R) \& (f(x, y) = z_0)\}$$



Exemplo 15. Representar graficamente as curvas de níveis 100, 75, 51 e 0, e as respectivas curvas de contorno da função:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto 100 - x^2 - y^2$$

Para $z_0 = 100$, temos:

$$N_{100} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 100 - x^2 - y^2 = 100\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

Para $z_0 = 75$, temos:

$$N_{75} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 100 - x^2 - y^2 = 75\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 25\},$$

a circunferência centrada em $(0, 0, 0)$, contida no plano Oxy , e de raio igual a 5;

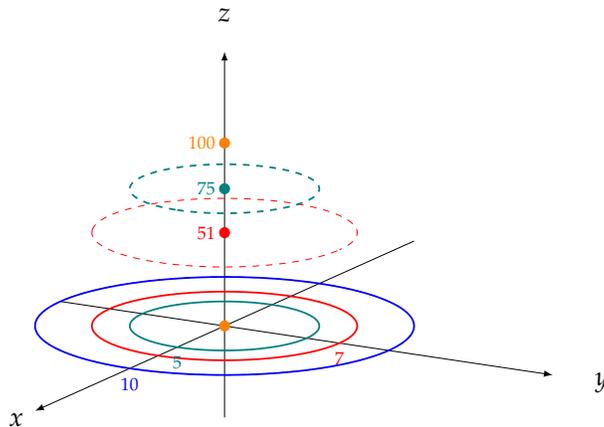
Para $z_0 = 51$, temos:

$$N_{51} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 100 - x^2 - y^2 = 51\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 49\},$$

a circunferência centrada em $(0, 0, 0)$, contida no plano Oxy , e de raio igual a 7;

$$N_0 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid 100 - x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 100\}$$

a circunferência centrada em $(0, 0, 0)$ e de raio igual a 10;



Na figura acima, a curva de nível zero está representada em azul, a curva de nível 51 está representada em vermelho, a curva de nível 75 está representada em verde e a curva de nível 100 está representada em laranja. Nas mesmas cores, mas pontilhadas, temos as representações das curvas de contorno.

Definição 16 (traços e seções). Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de duas variáveis reais. Um **traço** da superfície $\text{Graf}(f)$ é uma curva obtida da interseção daquela com um dos planos coordenados. Por sua vez, uma **seção** da superfície $\text{Graf}(f)$ é uma curva obtida da interseção daquela com algum plano paralelo a um plano coordenado.

Exemplo 17. Esboçar os traços da superfície que é o gráfico da função $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$.

Solução: O gráfico é:

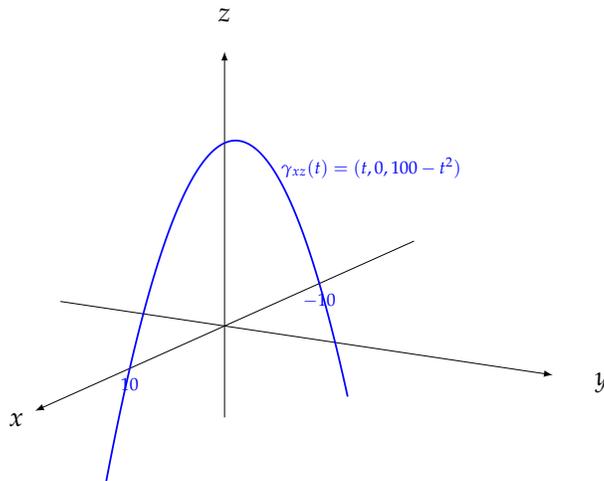
$$\text{Graf}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ((x, y) \in R) \& (z = f(x, y))\}$$

O **traço** do gráfico com respeito ao plano Oxz (que é o plano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $y = 0$:

$$\text{tr}_{xz}(\text{Graf}(f)) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R\} \cap Oxz = \{(x, 0, f(x, 0)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, 0) \in R\}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, 0, f(t, 0)) = (t, 0, 100 - t^2) \end{aligned}$$

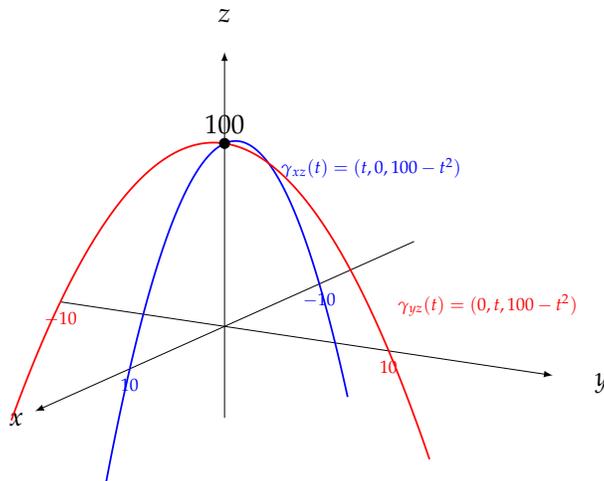


O **traço** do gráfico com respeito ao plano Oyz (que é o plano $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $x = 0$:

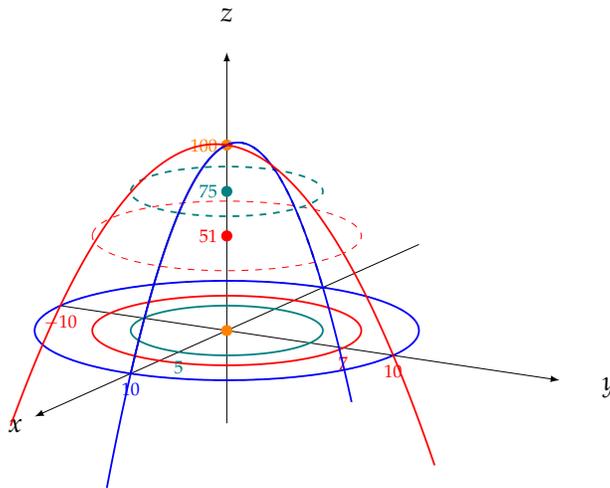
$$\text{tr}_{yz}(\text{Graf}(f)) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R\} \cap Oyz = \{(0, y, f(0, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, y) \in R\}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (0, t, f(0, t)) = (0, t, 100 - t^2) \end{aligned}$$



Colocando todas as curvas obtidas acima em uma mesma figura, começamos a ter uma noção do aspecto do gráfico de $f(x, y) = 100 - x^2 - y^2$:



Observe que, de acordo com a terminologia introduzida acima, “curvas de contorno” são um caso especial de “seções” da superfície.

Veja o gráfico desta função em <https://www.geogebra.org/3d/dqq2n9zd>.

Exemplo 18. Determinar as curvas de nível 0, 1, 4 e 9 e as respectivas curvas de contorno do gráfico de função:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

Solução:

Para $z_0 = 0$, temos:

$$N_0 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = |y|\}$$

Para $z_0 = 1$, temos:

$$N_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\},$$

uma hipérbole;

Para $z_0 = 4$, temos:

$$N_4 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 4\},$$

uma hipérbole;

Finalmente, para $z_0 = 9$, temos:

$$N_9 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 9\}$$

As correspondentes curvas de contorno são:

Para $z_0 = 0$, temos:

$$C_0 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = |y|\}$$

Para $z_0 = 1$, temos:

$$C_1 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 1\},$$

Para $z_0 = 4$, temos:

$$C_4 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 4\},$$

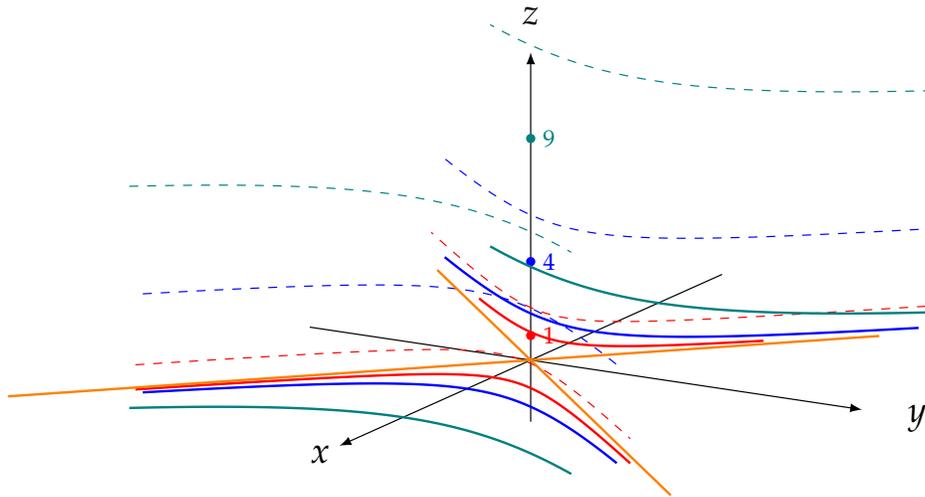
Finalmente, para $z_0 = 9$, temos:

$$C_9 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 - y^2 = 9\},$$

Exemplo 19. *Esboçar os traços, as curvas de nível 0, 1, 4 e 9 e as respectivas curvas de contorno do gráfico de função:*

$$\begin{aligned} h : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto x^2 - y^2 \end{aligned}$$

Solução:



Na figura acima, a curva de nível 4 está representada em azul, a curva de nível 1 está representada em vermelho, a curva de nível 9 está representada em verde. Nas mesmas cores, mas pontilhadas, temos as representações das curvas de contorno.

Exemplo 20. Determinar os traços do gráfico da função:

$$h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto x^2 - y^2$$

com respeito aos planos Oxz e Oyz .

Solução: O **traço** do gráfico com respeito ao plano Oxz (que é o plano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $y = 0$:

$$\text{tr}_{xz}(\text{Graf}(h)) = \{(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cap Oxz = \{(x, 0, h(x, 0)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\gamma_{xz} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t \mapsto (t, 0, t^2)$$

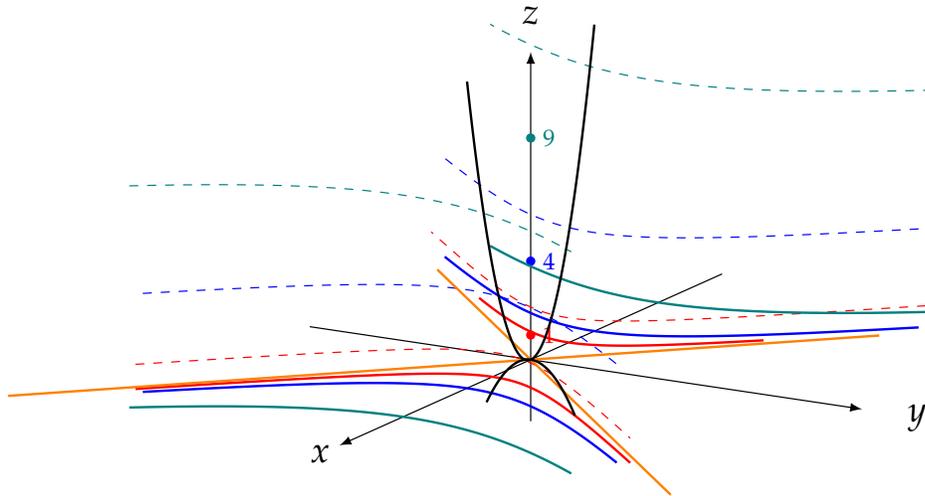
O **traço** do gráfico com respeito ao plano Oyz (que é o plano $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $x = 0$:

$$\text{tr}_{yz}(\text{Graf}(h)) = \{(x, y, h(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \mathbb{R}^2\} \cap Oyz = \{(0, y, h(0, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (0, t, h(0, t)) = (0, t, -t^2) \end{aligned}$$

Colocando todas as curvas obtidas acima em uma mesma figura, começamos a ter uma noção do aspecto do gráfico de $h(x, y) = x^2 - y^2$:



Veja o gráfico em <https://www.geogebra.org/3d/pt7yd4n8>.

Exemplo 21. Esboçar as curvas de nível 2, 4, 6, as curvas de contorno e os traços do gráfico da função:

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ (x, y) &\mapsto \sqrt{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

Solução: Temos:

A curva de nível 6 é:

$$N_6 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 6\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 36\}$$

A curva de nível 4 é:

$$N_4 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 4\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

A curva de nível 2 é:

$$N_2 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 2\} = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

A curva de nível 0 é:

$$N_0 = \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid \sqrt{x^2 + y^2} = 0\} = \{(0, 0, 0)\}$$

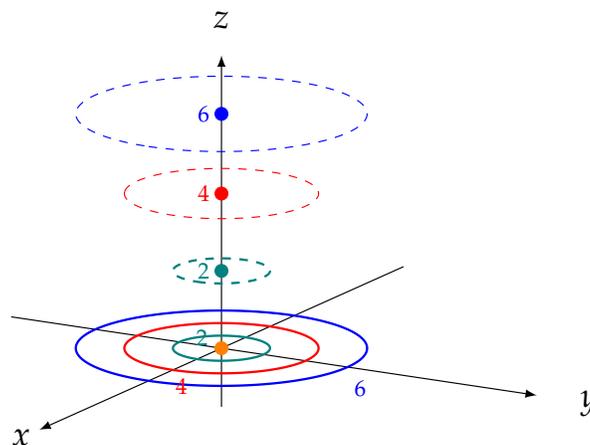
Por sua vez, as curvas de contorno são as seguintes:

$$C_6 = \{(x, y, 6) \mid x^2 + y^2 = 36\}$$

$$C_4 = \{(x, y, 4) \mid x^2 + y^2 = 16\}$$

$$C_2 = \{(x, y, 2) \mid x^2 + y^2 = 4\}$$

Juntamente com as curvas de contorno, a figura toma o aspecto a seguir:



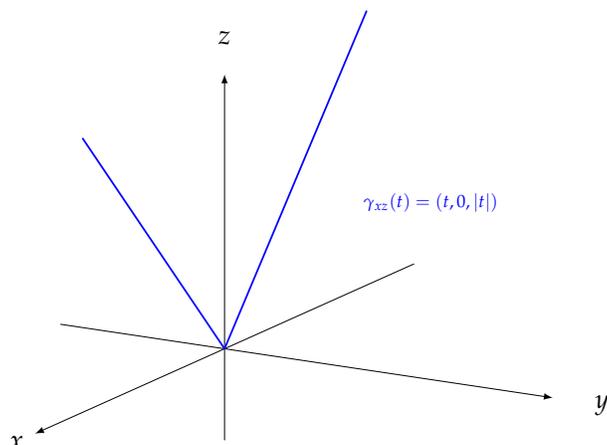
Na figura acima, a curva de nível 6 está representada em azul, a curva de nível 4 está representada em vermelho, a curva de nível 2 está representada em verde. Nas mesmas cores, mas pontilhadas, temos as representações das curvas de contorno.

O traço do gráfico com respeito ao plano Oxz (que é o plano $\{(x, 0, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $y = 0$:

$$\text{tr}_{xz}(\text{Graf}(f)) = \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R\} \cap Oxz = \{(x, 0, f(x, 0)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R\}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{xz} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (t, 0, f(t, 0)) = (t, 0, \sqrt{t^2} = |t|) \end{aligned}$$

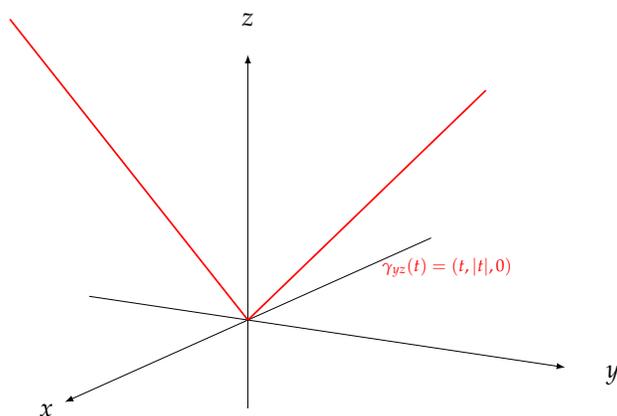


O **traço** do gráfico com respeito ao plano Oyz (que é o plano $\{(0, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (y \in \mathbb{R}) \& (z \in \mathbb{R})\}$) é obtido fazendo, no gráfico, $x = 0$:

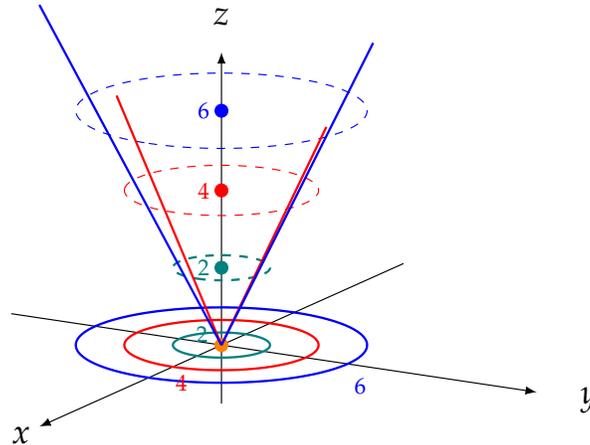
$$\begin{aligned} \text{tr}_{yz}(\text{Graf}(f)) &= \{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in R\} \cap Oyz = \\ &= \{(0, y, f(0, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (0, y) \in R\} \end{aligned}$$

No nosso caso, este traço é dado pela curva parametrizada por:

$$\begin{aligned} \gamma_{yz} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t &\mapsto (0, t, f(0, t)) = (0, t, |t|) \end{aligned}$$



Colocando todas as curvas obtidas acima em uma mesma figura, começamos a ter uma noção do aspecto do gráfico de $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$:



Veja o gráfico em <https://www.geogebra.org/3d/jpunkpec>.

2.4 Funções de Três Variáveis

O estudo de funções de três variáveis reais a valores reais é análogo àquele que fizemos das funções de duas variáveis reais a valores reais, exceto pelo fato, conforme veremos, de que não podemos visualizar diretamente o comportamento daquelas.

Definição 22. Seja $D \subseteq \mathbb{R}^3$ um conjunto de ternas ordenadas de números reais. Uma **função real** f de três variáveis em D é, simplesmente, uma função de domínio D e contradomínio \mathbb{R} . Denotamos uma tal função por:

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z) = w$$

As variáveis x, y e z são chamadas “variáveis independentes”, enquanto que a variável $w = f(x, y, z)$ é chamada “variável dependente” (de x , de y e de z).

Exemplo 23. Quando usamos coordenadas cartesianas, a distância de um ponto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ à origem é dada pela função:

$$D(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

Ao definirmos funções de três variáveis, seguimos a prática usual de excluir entradas que levem a números complexos ou à divisão por zero. Se $f(x, y, z) = \sqrt{y - x^2 - z^2}$, $y - x^2 - z^2$

não pode ser menor que 0. Se $f(x, y, z) = \frac{1}{x \cdot y \cdot z}$, $x \cdot y \cdot z$ não pode ser zero. Consideraremos que, caso não seja mencionado, o domínio de uma função de três variáveis será o maior subconjunto do espaço tridimensional para cujos elementos a regra de definição da função nos gera um número real. O conjunto-imagem, por sua vez, consiste de todos os valores assumidos pela variável dependente conforme as variáveis independentes assumem os valores do domínio.

Exemplo 24. Uma função da forma:

$$p : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \sum_{m,n,p} a_{mnp} \cdot x^m \cdot y^n \cdot z^p$$

com $m, n, p \in \mathbb{N}$ e $a_{mnp} \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função polinomial em três variáveis**.

Dentre as funções polinomiais de três variáveis, podemos destacar o seguinte:

Exemplo 25. Uma função da forma:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função afim**.

Dentre as funções afins, há uma classe importantíssima de funções, dadas no seguinte:

Exemplo 26. Uma função da forma:

$$f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$$

onde $a, b, c \in \mathbb{R}$ é denominada uma **função (ou funcional) linear**.

Exemplo 27. Uma função da forma:

$$f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto \frac{p(x, y, z)}{q(x, y, z)}$$

onde $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid q(x, y, z) \neq 0\}$ é denominada uma **função racional**.

Exemplo 28. Uma função:

$$f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) \mapsto f(x, y, z)$$

tal que para todo $t > 0$ e para todo $(x, y, z) \in R$ tal que $(t \cdot x, t \cdot y, t \cdot z) \in R$ tem-se:

$$f(t \cdot x, t \cdot y, t \cdot z) = t^\lambda \cdot f(x, y, z),$$

para certo $\lambda \in \mathbb{R}$ é denominada **homogênea de grau λ** .

2.5 Determinando e Representando o Domínio e a Imagem de Funções de Três Variáveis Reais

Assim como no caso de funções de uma ou duas variáveis reais a valores reais, quando apresentamos somente a “regra”, $w = f(x, y, z)$, de uma função de três variáveis reais a valores reais, assumiremos que seu contradomínio seja \mathbb{R} e que seu domínio consiste do maior subconjunto de \mathbb{R}^3 no qual possamos calcular a função e obter, como resultado, um número real.

Exemplo 29. Determinar o domínio da função de três variáveis reais dada por:

$$w = f(x, y, z) = \frac{1 - xy + z}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$$

Solução: A fim de que possamos calcular $f(x, y, z)$, devemos garantir que ocorram, simultaneamente:

$$\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2} \neq 0 \text{ e } 1 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0,$$

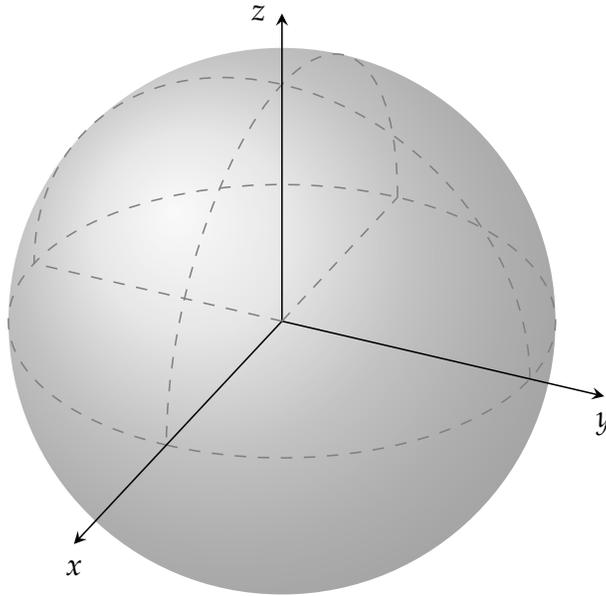
o que ocorre se, e somente se:

$$1 - x^2 - y^2 - z^2 > 0$$

Desta forma, tem-se:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 < 1\},$$

de modo que o domínio da função consiste dos pontos do espaço cuja distância à origem é estritamente menor do que 1.



Exemplo 30. Determinar o domínio da função:

$$w = g(x, y, z) = \frac{\ln(x \cdot y \cdot z) + 1}{\sqrt[5]{x - y}}$$

Solução: A fim de que $\ln(x \cdot y \cdot z)$ seja um número real, devemos requerer que $x \cdot y \cdot z > 0$. Para podermos calcular $g(x, y, z)$, por sua vez, precisamos garantir que:

$$\sqrt[5]{x - y} \neq 0,$$

ou seja, que:

$$x \neq y$$

O domínio da função é, portanto:

$$\text{dom}(g) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \cdot y \cdot z > 0) \& (x \neq y)\}$$

Definição 31 (operações com funções de três variáveis). Sejam $f : R_1 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ e $g : R_2 \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$.

(a) A **soma** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f + g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) + g(x, y, z) \end{aligned}$$

(b) A **subtração** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f - g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) - g(x, y, z) \end{aligned}$$

(c) O **produto** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} f \cdot g : R_1 \cap R_2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto f(x, y, z) \cdot g(x, y, z) \end{aligned}$$

(d) O **quociente** de f e g é a função:

$$\begin{aligned} \frac{f}{g} : R_1 \cap (R_2 \setminus g^{-1}[\{0\}]) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto \frac{f(x, y, z)}{g(x, y, z)} \end{aligned}$$

2.6 Gráfico de Funções de Três Variáveis a Valores Reais

Definimos formalmente o gráfico de uma função de três variáveis reais a valores reais a seguir:

Definição 32 (gráfico). Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função real de três variáveis reais. O **gráfico** de f é o conjunto:

$$\mathcal{G}(f) = \{((x, y, z), w) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \mid ((x, y, z) \in R) \& (w = f(x, y, z))\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$$

Novamente, fazemos uma identificação entre $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$ e \mathbb{R}^4 , dada pela bijeção bicontínua:

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^4, \\ ((x, y, z), w) &\mapsto (x, y, z, w) \end{aligned}$$

que tem por inversa:

$$\begin{aligned}\Psi : \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \\ (x, y, z, w) &\mapsto ((x, y, z), w)\end{aligned}$$

Por intermédio desta identificação, podemos considerar, como gráfico de f o seguinte conjunto:

$$\begin{aligned}\text{Graf}(f) &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid ((x, y, z) \in R) \& (w = f(x, y, z))\} = \\ &= \{(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4 \mid (\Psi(x, y, z, w) \in \mathcal{G}(f))\} \subseteq \mathbb{R}^4\end{aligned}$$

Não podemos, obviamente, visualizar (geometricamente) o gráfico de uma função de três variáveis reais a valores reais, por se tratar de um subconjunto de \mathbb{R}^4 .

Não obstante, existem modos de “apreender” o comportamento de uma função $w = f(x, y, z)$ mediante a visualização de superfícies (subconjunto de \mathbb{R}^3) sobre as quais a função assume valores constantes fixados.

Definição 33 (superfície de nível). *Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função e $w_0 \in \mathbb{R}$. A superfície de nível w_0 de f é o conjunto:*

$$f^{-1}[\{w_0\}] = \{(x, y, z) \in R \mid f(x, y, z) = w_0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

Exemplo 34. *Determinar as superfícies de nível da função:*

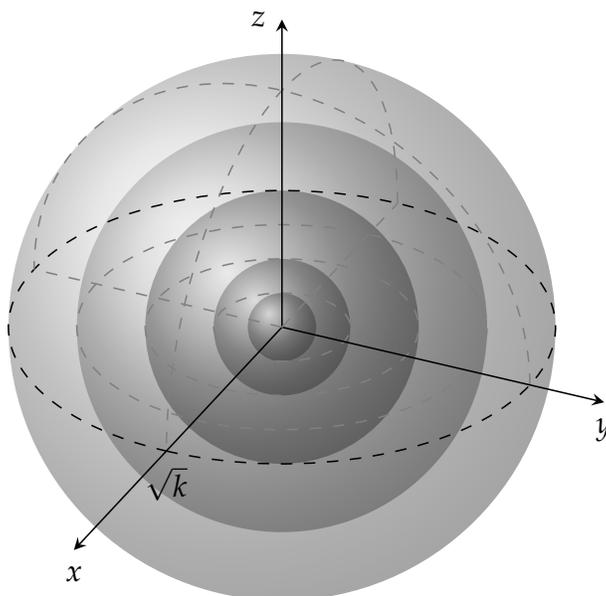
$$\begin{aligned}f : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y, z) &\mapsto x^2 + y^2 + z^2\end{aligned}$$

Solução: Vemos que para valores de $k \in \mathbb{R}$ com $k < 0$, a superfície de nível é vazia. Para $k \geq 0$, temos:

$$f^{-1}[\{k\}] = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid f(x, y, z) = k\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = k\}$$

Desta forma, para $k \geq 0$, a superfície de nível k consiste em todos os pontos pertencentes à esfera centrada na origem e de raio \sqrt{k} .

Desta forma, podemos concluir que a função assume valores tanto maiores quanto mais distantes da origem.



Exemplo 35. Considere a função:

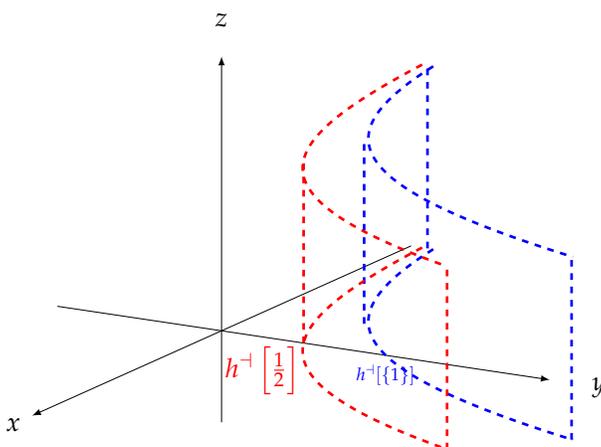
$$h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{y}{e^x}$$

Dado um número real $k \in \mathbb{R}$, a superfície de nível k é:

$$h^{-1}[\{k\}] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{y}{e^x} = k \right\} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = k \cdot e^x \right\}$$

Esboçamos, abaixo, em azul, a superfície de nível 1, e em vermelho a superfície de nível $\frac{1}{2}$:



Pelas superfícies de nível temos uma ideia do comportamento da função, que é constante sobre as superfícies cilíndricas dadas acima. Também podemos deduzir que a função cresce

na direção e sentido do vetor $(-1, 1, 0)$.

Exemplo 36. Determinar as superfícies de nível da função:

$$f : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x, y, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid (x \in \mathbb{R}) \& (y \in \mathbb{R})\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x^2 + y^2}{z}$$

Solução: Dado qualquer $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, a superfície de nível k é:

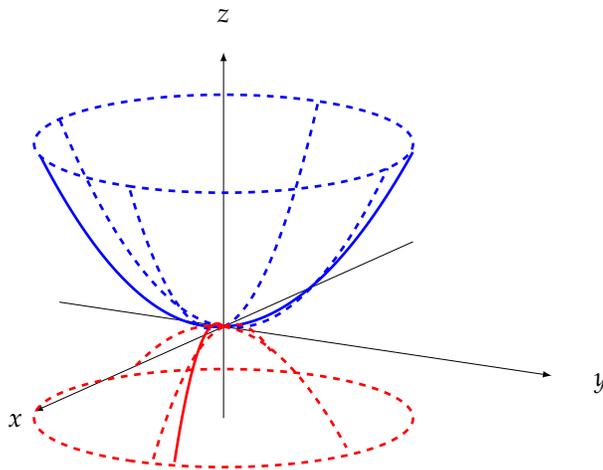
$$f^{-1}[\{k\}] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{z} = k \right\}$$

Para $k \neq 0$, temos:

$$f^{-1}[\{k\}] = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \frac{x^2 + y^2}{k} = z \right\},$$

isto é, a superfície de nível $k > 0$ é um parabolóide de equação: $z = \frac{x^2 + y^2}{k}$ sem o ponto $(0, 0, 0)$. Para valores de $k > 0$, as superfícies são parabolóides, sem o ponto $(0, 0, 0)$, com a concavidade voltada para cima. Para valores de $k < 0$ as superfícies são parabolóides com a concavidade voltada para baixo.

Esboçamos, abaixo, a superfície de nível 1, em azul e a superfície de nível -1 , em vermelho.



3 Noções Métricas e Topológicas de \mathbb{R}^n

Assim como acontece com os domínios de funções definidas em intervalos da reta real, os domínios de funções definidas em porções do plano requerem uma descrição “topológica”.

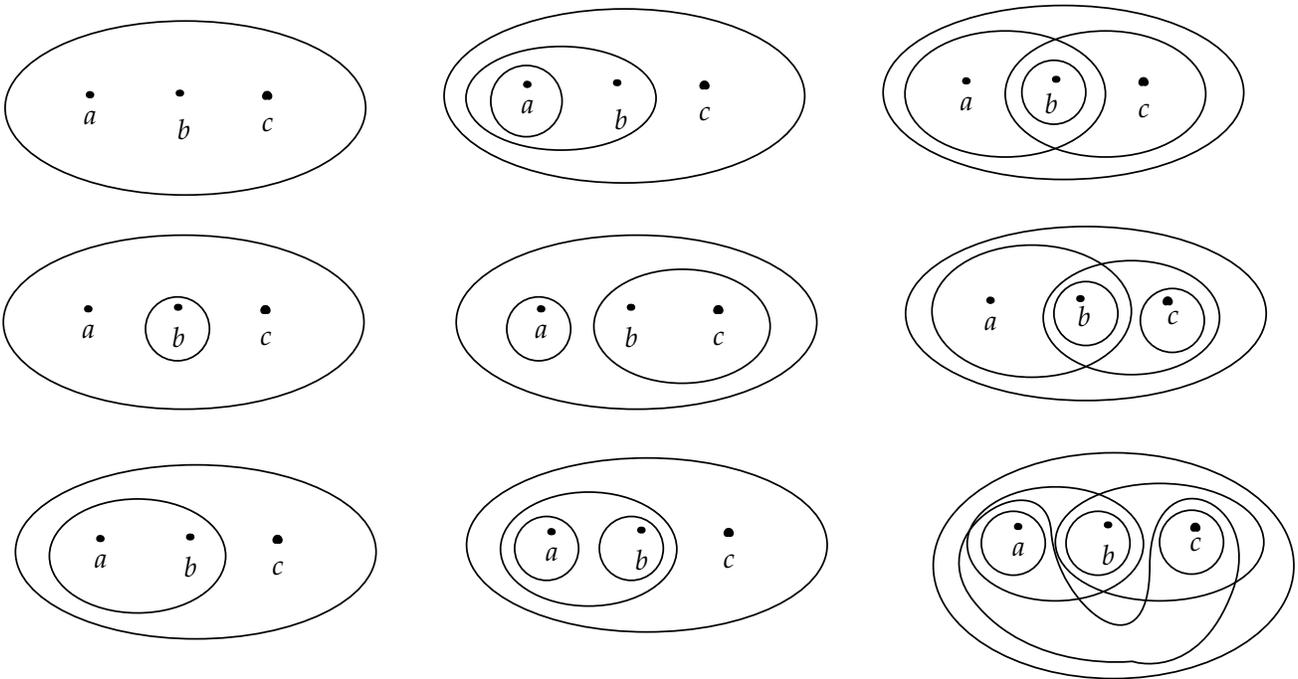
Para prosseguir com o nosso estudo de limites para funções de mais de uma variável, por exemplo, será conveniente explicitar o que compreendemos por “ponto de acumulação” de um conjunto no plano, conceito este pertencente à Topologia.

Dotar um conjunto de uma topologia consiste em descrever o que entendemos por “subconjunto aberto”. De modo geral, dado um conjunto qualquer, X , uma **topologia** sobre X é um “conjunto de subconjuntos de X ”, $\tau \subseteq \wp(X)$, sujeito às seguintes propriedades:

- (A1) $\emptyset \in \tau, X \in \tau$ (o conjunto vazio e o próprio conjunto X são abertos);
- (A2) Se $U, V \in \tau$ então $U \cap V \in \tau$ (ou seja, a interseção de subconjuntos abertos é, novamente, aberta);
- (A3) Se $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \tau$ então $\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$ (isto é, a reunião de *qualquer* família de abertos é aberta).

Exemplo 37. Consideremos o conjunto $X = \{a, b, c\}$, de modo que:

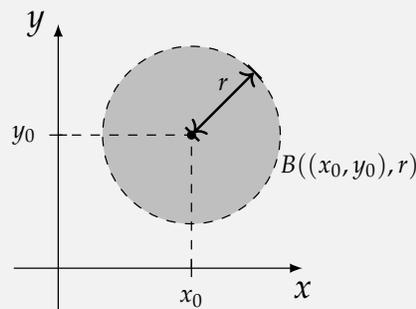
$$\wp(X) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a, b, c\}\}$$



Os seguintes conjuntos ão topologias sobre X :

Definição 40 (bola aberta). Sejam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$. A **bola aberta de centro** (x_0, y_0) e **raio** r é o conjunto de todos os pontos de \mathbb{R}^2 cuja distância ao ponto (x_0, y_0) é estritamente menor que r :

$$\begin{aligned} B((x_0, y_0), r) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d((x, y), (x_0, y_0)) < r\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\} \end{aligned}$$



É comum, por vezes, nos depararmos com o termo “vizinhança” de um ponto. Trata-se de um conceito um pouco mais amplo que o de bola aberta, descrito a seguir:

Definição 41. Seja $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. Uma **vizinhança de** (x_0, y_0) é um subconjunto do plano que contém uma bola aberta centrada em (x_0, y_0) .

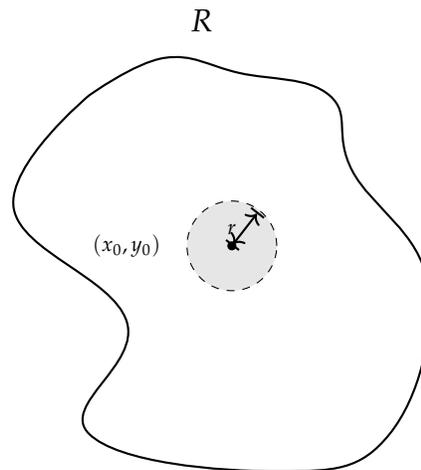
O próximo conceito, o de “ponto interior”, nos permitirá definir o que entendemos por “conjunto aberto” de \mathbb{R}^2 , e conseqüentemente o que entendemos pela “topologia de \mathbb{R}^2 ”.

Intuitivamente, um ponto $(x_0, y_0) \in R$ é ponto interior de um conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^2$, se pudermos “encapsulá-lo” como centro de uma bola aberta inteiramente contida em R . Ou seja, $(x_0, y_0) \in R$ é interior se, e somente se, além dele, toda uma bola aberta estiver inteiramente em R . Pode ser necessário tomar uma bola aberta de raio muito pequeno, mas isto não importa. Para que um ponto seja interior a R , basta que exista *uma* bola aberta centrada nele e inteiramente contida em R .

Definição 42 (ponto interior). Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos. Um ponto $(x_0, y_0) \in R$ é um **ponto interior de R** se, e somente se existir um $r > 0$ tal que o disco centrado em (x_0, y_0) de raio r ,

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

está inteiramente contido em R .



Definição 43 (interior de uma região). Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$. O **interior de R** é o conjunto de todos os pontos interiores de R , ou seja, de todo ponto tal que existe uma bola aberta centrada nele e inteiramente contida em R . Denotamos:

$$\text{int}(R) = \{(x, y) \in R \mid (\exists r > 0)(B((x_0, y_0), r) \subseteq R)\}$$

Observe que, para qualquer região $R \subseteq \mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\text{int}(R) \subseteq R$$

Finalmente estamos em condições de definir a topologia – denominada “topologia usual” – de \mathbb{R}^2 , ou seja, de descrever o que entendemos por “conjunto aberto” de \mathbb{R}^2 . Veremos que este conceito se apoia em todos os outros introduzidos até aqui.

Definição 44 (conjunto aberto). Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que R é aberto se, e somente se, tivermos:

$$R \subseteq \text{int}(R)$$

ou seja, se para qualquer $(x_0, y_0) \in R$ existir $r_{(x_0, y_0)} > 0$ tal que:

$$B((x_0, y_0), r_{(x_0, y_0)}) \subseteq R$$

Uma vez que sempre temos $\text{int}(R) \subseteq R$, tem-se que R é aberto se, e somente se, $R = \text{int}(R)$.

Formalmente, podemos dizer que a **topologia usual de \mathbb{R}^2** é dada por:

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \text{int}(U) = U\}$$

Exemplo 45. O plano, \mathbb{R}^2 , é aberto, uma vez que dado qualquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$, tem-se $B((x_0, y_0), 1) \subseteq \mathbb{R}^2$. Assim, todo ponto de \mathbb{R}^2 é interior a \mathbb{R}^2 .

Exemplo 46. Dados quaisquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, a bola aberta de centro (x_0, y_0) e raio r , $B((x_0, y_0), r)$ é um conjunto aberto.

Demonstração. De fato, dado qualquer $(x_1, y_1) \in B((x_0, y_0), r)$, considere

$$\eta = r - d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) > 0$$

Afirmamos que $B((x_1, y_1), \eta) \subset B((x_0, y_0), r)$.

De fato, dado $(x, y) \in B((x_1, y_1), \eta)$, tem-se

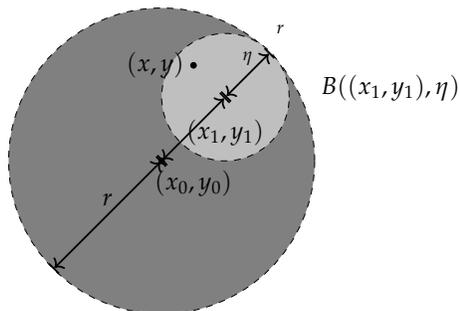
$$d((x, y), (x_1, y_1)) < \eta = r - d((x_0, y_0), (x_1, y_1))$$

de modo que pela **Desigualdade Triangular** tem-se:

$$d((x, y), (x_0, y_0)) \leq d((x, y), (x_1, y_1)) + d((x_1, y_1), (x_0, y_0)) <$$

$$< \eta + d((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = r - d((x_0, y_0), (x_1, y_1)) + d((x_1, y_1), (x_0, y_0)) = r$$

de modo que $(x, y) \in B((x_0, y_0), r)$. Como $(x, y) \in B((x_1, y_1), \eta)$ é arbitrário, segue que $B((x_1, y_1), \eta) \subset B((x_0, y_0), r)$.



Assim, todo ponto de $B((x_0, y_0), r)$ é interior a $B((x_0, y_0), r)$. □

Exemplo 47. O conjunto:

$$R = \{(x, y) \mid x < y\}$$

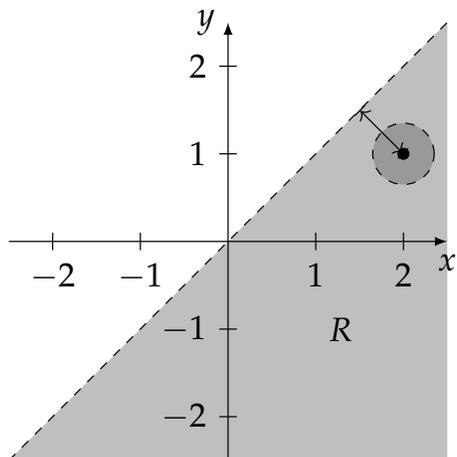
é aberto.

De fato, dado $(x_0, y_0) \in R$, a distância até a reta $y - x = 0$ é:

$$\delta = \frac{|x_0 - y_0|}{\sqrt{2}} = \frac{y_0 - x_0}{\sqrt{2}} > 0$$

de tal modo que:

$$B\left((x_0, y_0), \frac{y_0 - x_0}{2 \cdot \sqrt{2}}\right) \subseteq R$$



Teorema 48. *Seja τ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 , isto é:*

$$\tau = \{U \subseteq \mathbb{R}^2 \mid \text{int.}(U) = U\}.$$

τ satisfaz as seguintes propriedades:

(A1) $\mathbb{R}^2, \emptyset \in \tau$;

(A2) Se I é um conjunto qualquer e $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \tau$, então:

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \tau$$

(A3) Se $U_1, U_2, \dots, U_n \in \tau$, então:

$$U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n \in \tau$$

Demonstração. Ad (A1): Por um lado, tem-se sempre $\text{int.}(\emptyset) \subset \emptyset$. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, segue também que $\emptyset \subset \text{int.}(\emptyset)$. Segue assim que $\text{int.}(\emptyset) = \emptyset$.

Ad (A2): Basta mostrarmos que dado qualquer $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ existe $\delta > 0$ tal que $B((x, y), \delta) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Mas, de fato, dado $(x, y) \in \bigcup_{i \in I} U_i$ existe algum $i_0 \in I$ tal que $(x, y) \in U_{i_0}$. Como, por hipótese, U_{i_0} é aberto, existirá algum $\delta_{i_0} > 0$ tal que $B((x, y), \delta_{i_0}) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Logo, $(x, y) \in \text{int.}(\bigcup_{i \in I} U_i)$.

Ad (A3): Novamente, basta mostrarmos que:

$$U_1 \cap \dots \cap U_n \subseteq \text{int.}(U_1 \cap \dots \cap U_n).$$

Dado $(x, y) \in U_1 \cap \dots \cap U_n$, tem-se:

$$((x, y) \in U_1) \& ((x, y) \in U_2) \& \dots \& ((x, y) \in U_n).$$

Como cada $U_i, i \in \{1, \dots, n\}$, é aberto, existirão $\delta_i > 0, i \in \{1, \dots, n\}$ tais que:

$$(B((x, y), \delta_1) \subset U_1) \& (B((x, y), \delta_2) \subset U_2) \& \dots \& (B((x, y), \delta_n) \subset U_n)$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$, tem-se:

$$(\forall i \in \{1, \dots, n\})(B((x, y), \delta) \subset U_i),$$

e portanto:

$$B((x, y), \delta) \subset U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_n$$

Assim, segue que $U_1 \cap \dots \cap U_n \in \tau$. □

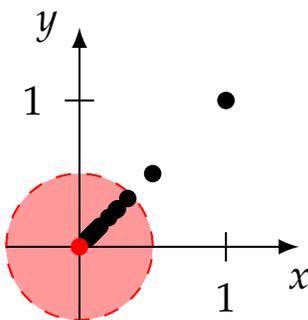
Posteriormente, ao definir o “limite de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ conforme sua variável, (x, y) , se aproxima de um ponto (x_0, y_0) ”, será necessário que possamos calcular f em pontos (x, y) **arbitrariamente** próximos de (x_0, y_0) – embora não, necessariamente, em (x_0, y_0) .

A fim de formalizar o conceito de “ponto do qual podemos nos aproximar tanto quanto queiramos por elementos de R ”, introduzimos a seguinte:

Definição 49 (ponto de acumulação). *Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto de acumulação** de R se qualquer bola aberta centrada em (x_0, y_0) contiver um ponto, $(x, y) \in R$ diferente de (x_0, y_0) .*

Exemplo 50. *Considere o conjunto:*

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



O ponto $(0,0)$ é ponto de fronteira de S . De fato, como \mathbb{R} é arquimediano, dado qualquer $r > 0$, existe um número natural, n_r , tal que $n_r > \frac{\sqrt{2}}{r}$. Temos, assim:

$$\left(\frac{1}{n_r}, \frac{1}{n_r} \right) \in R \subseteq \mathbb{R}^2$$

e:

$$d \left(\left(\frac{1}{n_r}, \frac{1}{n_r} \right), (0,0) \right) = \sqrt{\left(\frac{1}{n_r} - 0 \right)^2 + \left(\frac{1}{n_r} - 0 \right)^2} = \sqrt{\frac{2}{n_r^2}} = \frac{\sqrt{2}}{n_r} < r$$

Assim, qualquer bola aberta centrada em $(0,0)$, $B((0,0), r)$, contém um ponto de S , $\left(\frac{1}{n_r}, \frac{1}{n_r} \right)$.

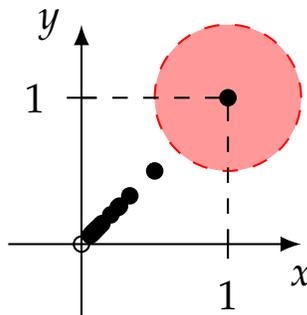
Sempre que um ponto não é de acumulação, dizemos que este é um ponto “isolado”. A definição precisa é apresentada a seguir:

Definição 51 (ponto isolado). *Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que um ponto $(x_0, y_0) \in R$ é um **ponto isolado de R** se, e somente se, não for um ponto de acumulação, ou seja, se, e somente se, existir $r > 0$ tal que:*

$$B((x_0, y_0), r) \cap R = \{(x_0, y_0)\}$$

Exemplo 52. *Considere o conjunto do exemplo anterior:*

$$S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$



O ponto $(1, 1)$ é um ponto isolado de S . Com efeito, basta tomarmos $r = \frac{1}{2}$, e teremos:

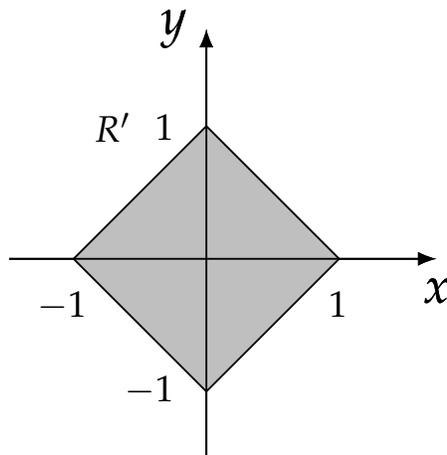
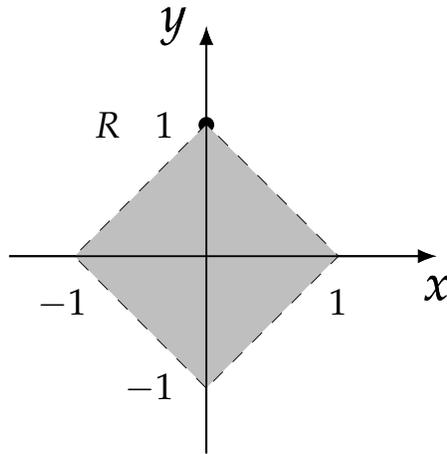
$$B\left(\left(1, 1\right), \frac{1}{2}\right) \cap S = \{(1, 1)\}$$

Definição 53 (conjunto derivado). *Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$. O **derivado de R** é o conjunto de todos os pontos de acumulação do conjunto R . Denotamos o derivado de R por R' .*

Exemplo 54. *O derivado do conjunto $S = \left\{ \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n} \right) \mid n \in \mathbb{N} \right\}$ é, por definição, o conjunto de todos os pontos de acumulação de S . Assim, temos:*

$$S' = \{(0, 0)\}.$$

Exemplo 55. *O derivado do conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$ é o conjunto $R' = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| \leq 1\}$.*



A noção a seguir será muito utilizada, devido ao **Teorema de Heine-Borel**, no estudo da existência de maximantes e/ou minimantes de funções contínuas de duas variáveis.

Definição 56 (conjunto fechado). *Seja $F \subseteq \mathbb{R}^2$. Dizemos que F é **fechado** se, e somente se F contiver todos os seus pontos de acumulação, ou seja, se $F' \subseteq F$.*

Exemplo 57. *Todo conjunto finito, F , é fechado, por não conter nenhum ponto de acumulação. Desta forma, tem-se trivialmente $F' = \emptyset \subseteq F$.*

Um resultado extremamente útil para concluirmos que certos conjuntos são fechados é dado no seguinte:

Teorema 58. *Um conjunto é fechado se, e somente se, seu complementar é aberto.*

Demonstração. (\Rightarrow) Seja $F \subseteq \mathbb{R}^2$ fechado. Dado qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus F$ se, e somente se, $(x, y) \notin F$. Como F é fechado, e portanto contém todos os seus pontos de acumulação, o fato de (x, y) não pertencer a F implica, fatalmente, que (x, y) não é ponto de acumulação de F . Segue, portanto, que $(x, y) \notin F$ e que existe $r > 0$ tal que $B((x, y), r) \cap F = \emptyset$. Assim, tem-se $B((x, y), r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus F$. Isto mostra que todo ponto de $\mathbb{R}^2 \setminus F$ é ponto interior, de modo que:

$$\text{int}(\mathbb{R}^2 \setminus F) = \mathbb{R}^2 \setminus F.$$

(\Leftarrow) Suponhamos que $\mathbb{R}^2 \setminus F$ seja um conjunto aberto. Mostraremos que F é fechado.

Seja (x, y) um ponto de acumulação de F . Suponhamos, por absurdo, que $\mathbb{R}^2 \setminus F$ seja aberto e que $(x, y) \notin F$. Então, como $\mathbb{R}^2 \setminus F$ é aberto, existe $r > 0$ tal que $B((x, y), r) \subseteq \mathbb{R}^2 \setminus F$, ou seja, tal que $B((x, y), r) \cap F = \emptyset$. Mas isto contraria a nossa hipótese, uma vez que supusemos ser (x, y) um ponto de acumulação de F . O absurdo estava em supor que tínhamos, simultaneamente, $\mathbb{R}^2 \setminus F$ e F não fechado (porque (x, y) é um ponto de acumulação de F que não lhe pertence). Assim, tem-se F fechado (em caso contrário, concluiríamos um absurdo). \square

Exemplo 59. Toda bola fechada é um conjunto fechado.

Exemplo 60. O conjunto $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$ é um subconjunto fechado de \mathbb{R}^2 . De fato, já vimos que o conjunto $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x < y\}$ é aberto, e por motivos similares, o conjunto $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x\}$ também é aberto. Observa-se, facilmente, que:

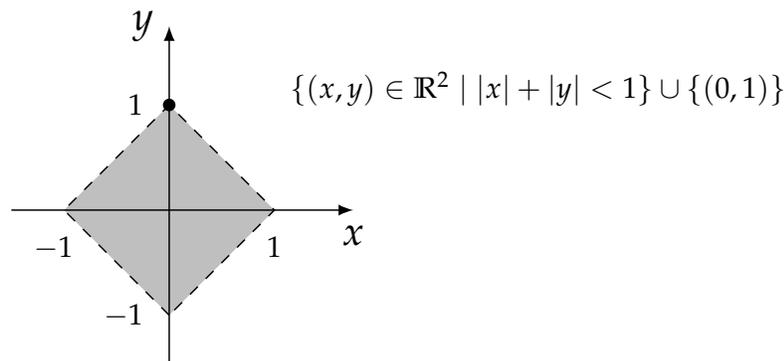
$$\mathbb{R}^2 \setminus \Delta = R \cup S,$$

que, por ser reunião de abertos, é aberto. Em virtude do teorema anterior, segue que Δ , por ter complementar aberto, é fechado.

Exemplo 61. O conjunto:

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\} \cup \{(0, 1)\},$$

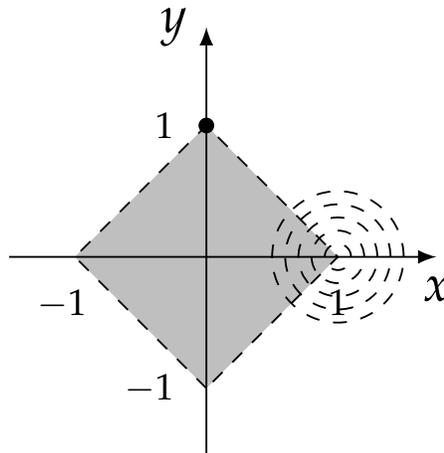
representado a seguir:



não é **nem aberto, nem fechado**.

Com efeito, note que $(1,0)$ é um ponto de acumulação, uma vez que dado qualquer $r > 0$, tem-se:

$$\left(1 - \min\left\{r, \frac{1}{2}\right\}, 0\right) \in B((1,0), r) \cap C$$

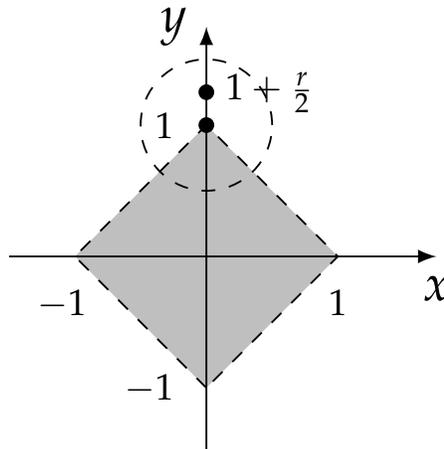


No entanto, como $(1,0) \notin C$, **C não pode ser fechado** (uma vez que não contém pelo menos um de seus pontos de acumulação).

Por outro lado, para qualquer $r > 0$, tem-se:

$$B((0,1), r) \not\subset C,$$

uma vez que $(0, 1 + \frac{r}{2}) \notin C$.



Desta forma, um conjunto pode não ser nem aberto, nem fechado.

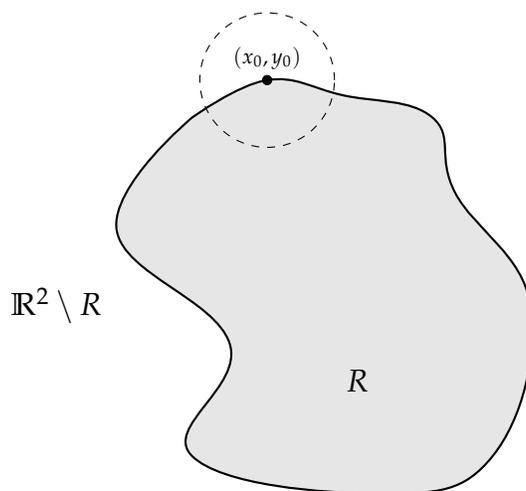
Observação 62. Na linguagem coloquial as palavras “aberto” e “fechado” têm significados exclusivos e totalizantes. Tal fato não ocorre aqui, conforme ilustram os exemplos dados abaixo:

Conjuntos	aberto	fechado
$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$	sim	não
conjunto finito	não	sim
$\left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$	não	não
\mathbb{R}^2	sim	sim

Definição 63 (ponto de fronteira). Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos. Um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto de fronteira de R** se, e somente se para qualquer $r > 0$, o disco centrado em (x_0, y_0) de raio r satisfaz:

$$B((x_0, y_0), r) \cap R \neq \emptyset \text{ e } B((x_0, y_0), r) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus R) \neq \emptyset$$

Note que o ponto de fronteira não precisa, necessariamente, pertencer ao conjunto R .



Definição 64 (fronteira de um conjunto). Seja $X \subseteq \mathbb{R}^2$. Denominamos por **fronteira de X** o conjunto:

$$\text{Fr.}(X) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\forall \delta > 0)((B((x, y), \delta) \cap X \neq \emptyset) \& (B((x, y), \delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X) \neq \emptyset))\}$$

Decorre imediatamente da definição da fronteira de um conjunto X que:

$$\text{Fr.}(X) = \text{Fr.}(\mathbb{R}^2 \setminus X)$$

Definição 65 (ponto exterior). Seja $R \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto de pontos. Um ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ é um **ponto exterior** a R se, e somente se existir um $r > 0$ tal que o disco centrado em (x_0, y_0) de raio r ,

$$B((x_0, y_0), r) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

está inteiramente contido no complementar de R .

Teorema 66. Seja $X \subset \mathbb{R}^2$.

$$\mathbb{R}^2 = \text{int.}(X) \cup \text{Fr.}(X) \cup \text{int.}(\mathbb{R}^2 \setminus X)$$

Demonstração. A inclusão $\text{int.}(X) \cup \text{Fr.}(X) \cup \text{int.}(M \setminus X) \subseteq M$ é sempre válida. Mostremos que a recíproca é verdadeira.

Dado $(x, y) \in M$, há somente duas possibilidades: $(x, y) \in X$ ou $(x, y) \in M \setminus X$.

Se $(x, y) \in X$, então $(x, y) \in \text{int.}(X)$ ou $(x, y) \in X \setminus \text{int.}(X)$. Caso $(x, y) \notin \text{int.}(X)$, então $(x, y) \in X \setminus \text{int.}(X)$, de modo que para todo $\delta > 0$, $B((x, y), \delta) \not\subseteq X$. Isto significa que para todo $\delta > 0$ tem-se $B((x, y), \delta) \cap (M \setminus X) \neq \emptyset$, e como $(x, y) \in B((x, y), \delta) \cap X$, segue que $(x, y) \in \text{Fr.}(X)$. Logo $(x, y) \in X \Rightarrow ((x, y) \in \text{int.}(X)) \vee ((x, y) \in \text{Fr.}(X))$.

Se $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus X$, então $(x, y) \in \text{int.}(\mathbb{R}^2 \setminus X)$ ou $(x, y) \in (\mathbb{R}^2 \setminus X) \setminus \text{int.}(\mathbb{R}^2 \setminus X)$. Caso $(x, y) \notin \text{int.}(\mathbb{R}^2 \setminus X)$, então para todo $\delta > 0$ tem-se $B((x, y), \delta) \not\subseteq \mathbb{R}^2 \setminus X$, de modo que para todo $\delta > 0$, $B((x, y), \delta) \cap X \neq \emptyset$. Como $(x, y) \in B((x, y), \delta) \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X) \neq \emptyset$, segue que $(x, y) \in \text{Fr.}(\mathbb{R}^2 \setminus X) = \text{Fr.}(X)$.

Mostramos, assim, que:

$$x \in M \Rightarrow \begin{cases} x \in X \Rightarrow \begin{cases} x \in \text{int.}(X) \\ x \in \text{Fr.}(X) \end{cases} \\ x \in M \setminus X \Rightarrow \begin{cases} x \in \text{int.}(M \setminus X) \\ x \in \text{Fr.}(M \setminus X) = \text{Fr.}(X) \end{cases} \end{cases}$$

Assim, $M \subseteq \text{int.}(X) \cup \text{Fr.}(X) \cup \text{int.}(M \setminus X)$, e vale:

$$M = \text{int.}(X) \cup \text{Fr.}(X) \cup \text{int.}(M \setminus X)$$

□

3.1 Conjuntos e Funções Limitados

Para garantirmos a existência de maximantes e minimantes de certas funções contínuas, é necessário estabelecermos o conceito de “conjunto limitado”, dado a seguir:

Definição 67 (região limitada). Uma região $R \subseteq \mathbb{R}^2$ é **limitada** se, e somente se, estiver contida em algum disco de raio fixado. Ou seja, se, e somente se, existir $M > 0$ tal que:

$$R \subseteq B((0,0), M)$$

Equivalentemente, R é limitado se, e somente se:

$$(\forall (x, y) \in R) (\|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < M)$$

Dentre os conjuntos limitados do plano podemos citar segmentos de reta, triângulos, interiores de triângulos, retângulos, circunferências e discos. São exemplos de conjuntos ilimitados no plano as retas, os eixos coordenados, os gráficos de funções definidas em intervalos infinitos, quadrantes, semiplanos e o próprio plano.

Exemplo 68. Dados quaisquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ e $r > 0$, o conjunto:

$$R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < r\}$$

é limitado. De fato, temos:

$$R \subseteq B((0,0), \|(x_0, y_0)\| + r)$$

Dado $(x, y) \in R$, temos:

$$\begin{aligned} d((x, y), (0,0)) &= \|(x, y) - (0,0)\| = \|(x, y) - (x_0, y_0) + (x_0, y_0) - (0,0)\| \leq \\ &\leq \|(x, y) - (x_0, y_0)\| + \|(x_0, y_0) - (0,0)\| < r + \|(x_0, y_0)\| \end{aligned}$$

Assim, $(x, y) \in B((0,0), \|(x_0, y_0)\| + r)$, e portanto $R \subseteq B((0,0), \|(x_0, y_0)\| + r)$, de modo que R é limitado.

Definição 69 (função limitada). Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que f é **limitada** se, e somente se, $f[R]$ for um conjunto limitado. Equivalentemente, se, e somente se, existir $M > 0$ tal que:

$$(\forall (x, y) \in R)(|f(x, y)| \leq M)$$

Exemplo 70. A função:

$$f : \begin{array}{l} \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\} \\ (x, y) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto 2x + 3y \end{array}$$

é limitada.

De fato, para qualquer $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ com $x^2 + y^2 \leq 1$ tem-se:

$$|f(x, y)| = |2x + 3y| \leq 2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| \leq 2 \cdot \|(x, y)\| + 3 \cdot \|(x, y)\| \leq 5$$

Exemplo 71. A função:

$$h : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \\ (x, y) \end{array} \begin{array}{l} \rightarrow \mathbb{R} \\ \mapsto \frac{1}{x^2 + y^2} \end{array}$$

não é limitada. Com efeito, dado qualquer $M > 0$, podemos tomar $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que:

$$x_0^2 + y_0^2 < \frac{1}{M},$$

ou seja, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $\|(x_0, y_0) - (0, 0)\| < \frac{1}{\sqrt{M}}$, digamos. $\left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot M}}, 0\right)$ e teremos:

$$M < 2M = \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot M}}\right)^2 + 0^2} = h\left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot M}}, 0\right)$$

Como dado qualquer $M > 0$ podemos obter $(x_0, y_0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2 \cdot M}}, 0\right) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ tal que $M < h(x_0, y_0)$, a função h é **ilimitada**.

3.2 Subconjuntos Compactos do Plano

Definição 72 (conjunto compacto). Um subconjunto do plano, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ é **compacto** se, e somente se, for simultaneamente fechado e limitado.

Exemplo 73. *Todo subconjunto finito do plano é compacto.*

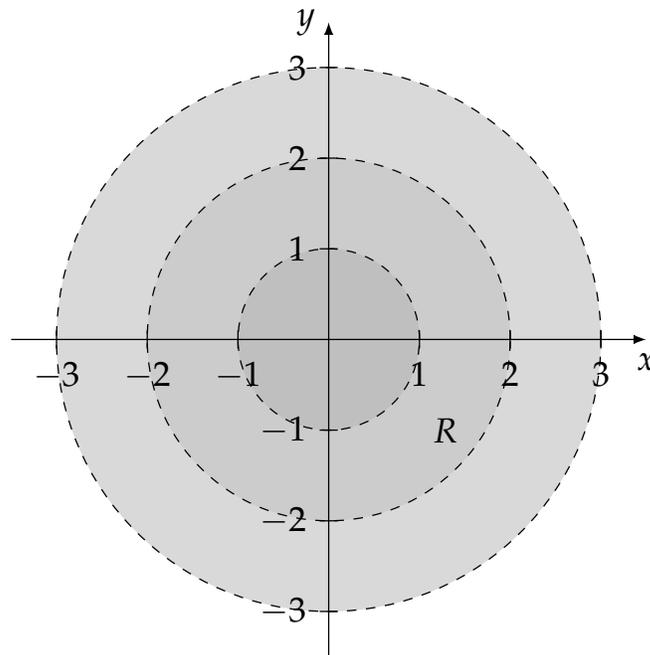
Exemplo 74. *Toda bola fechada em \mathbb{R}^2 é compacta.*

Exemplo 75. *Dados intervalos fechados e limitados, $[a, b], [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$, o retângulo $[a, b] \times [c, d]$ é um conjunto compacto.*

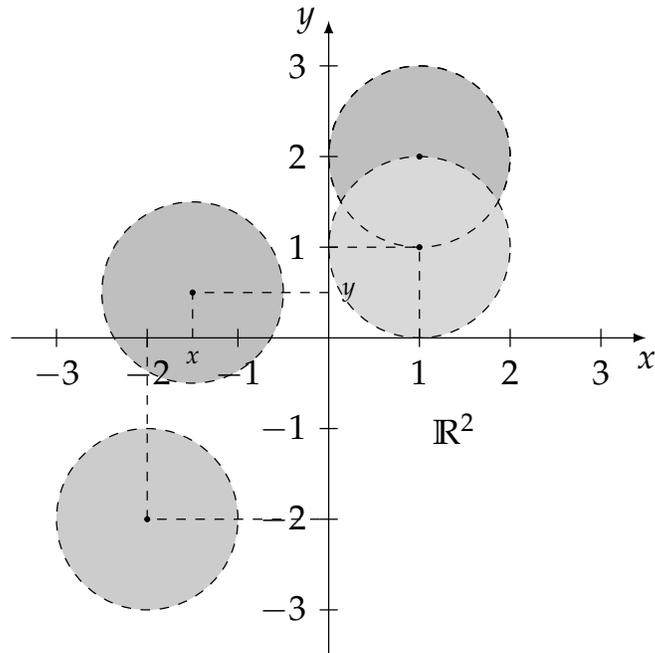
Definição 76 (cobertura aberta). *Seja $R \subset \mathbb{R}^2$. Uma cobertura aberta de R é uma coleção de subconjuntos abertos de \mathbb{R}^2 , $\mathcal{U} = \{U_i \mid (U_i \subset \mathbb{R}^2 \text{ aberto}) \& (i \in I)\}$, tal que:*

$$R \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

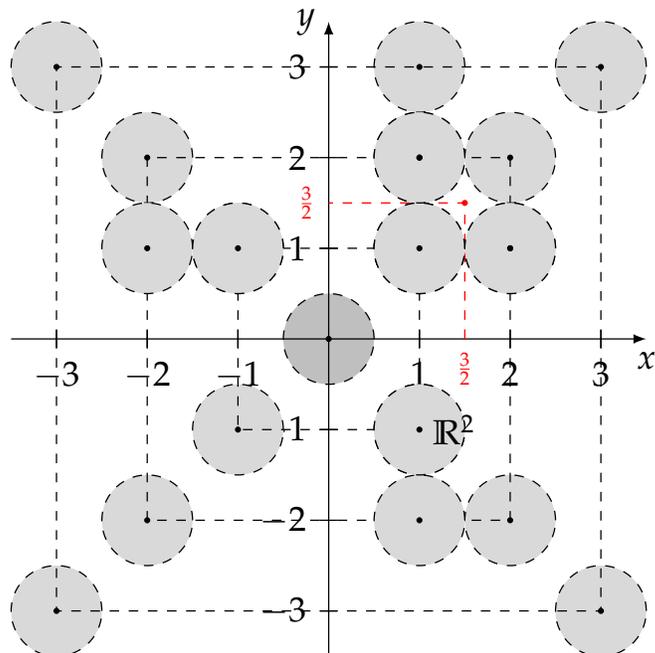
Exemplo 77. $\mathcal{U} = \{B((0,0), n) \mid n \in \mathbb{N}\}$ é uma cobertura aberta de \mathbb{R}^2 .



Exemplo 78. $\mathcal{U} = \{B((x,y), 1) \mid (x,y) \in \mathbb{R}^2\}$ é uma cobertura aberta de \mathbb{R}^2 .



Exemplo 79. $\mathcal{V} = \left\{ B\left((m, n), \frac{1}{2}\right) \mid (m, n) \in \mathbb{Z}^2 \right\}$ é uma cobertura aberta para \mathbb{Z}^2 , mas não para \mathbb{R}^2 .



De fato, observe que $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \in \mathbb{R}^2$ mas $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) \notin B((m, n), 1/2)$, para qualquer par de números inteiros, (m, n) .

Definição 80 (subcobertura finita). Sejam $R \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta de R . Uma **subcobertura finita** de \mathcal{U} é um subconjunto finito de \mathcal{U} , $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_n}\} \subset \mathcal{U}$ que ainda é uma cobertura aberta para R , ou seja, tal que:

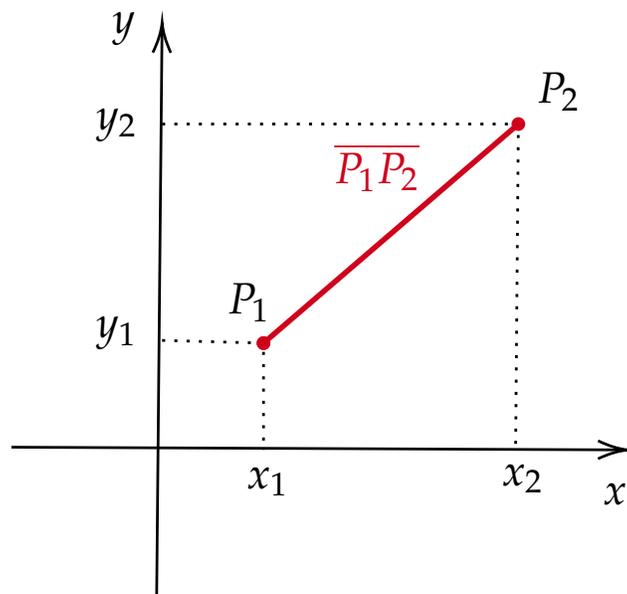
$$R \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_n} = \bigcup_{k=1}^n U_{i_k}$$

Uma caracterização de grande valor teórico dos conjuntos compactos é a seguinte:

Teorema 81 (Heine-Borel). Toda cobertura aberta de um conjunto compacto, $K \subseteq \mathbb{R}^2$ admite uma subcobertura finita.

Definição 82 (segmento). Sejam $P_1 = (x_1, y_1)$ e $P_2 = (x_2, y_2)$ pontos de \mathbb{R}^2 . O **segmento** $\overline{P_1P_2}$ é o conjunto:

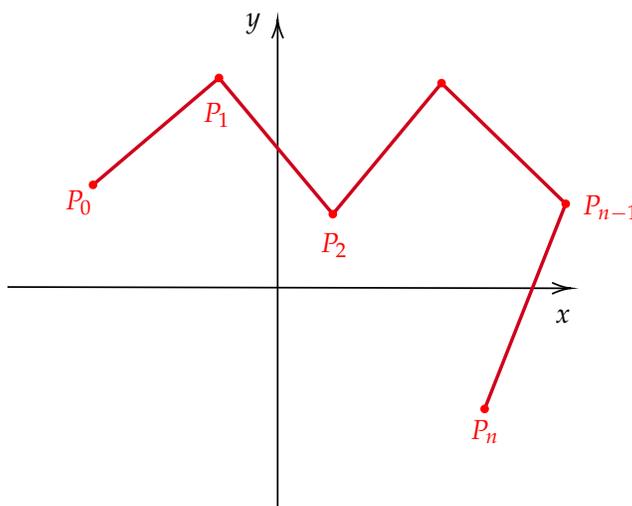
$$\overline{P_1P_2} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) = \lambda \cdot (x_1, y_1) + (1 - \lambda) \cdot (x_2, y_2), \lambda \in [0, 1]\}$$



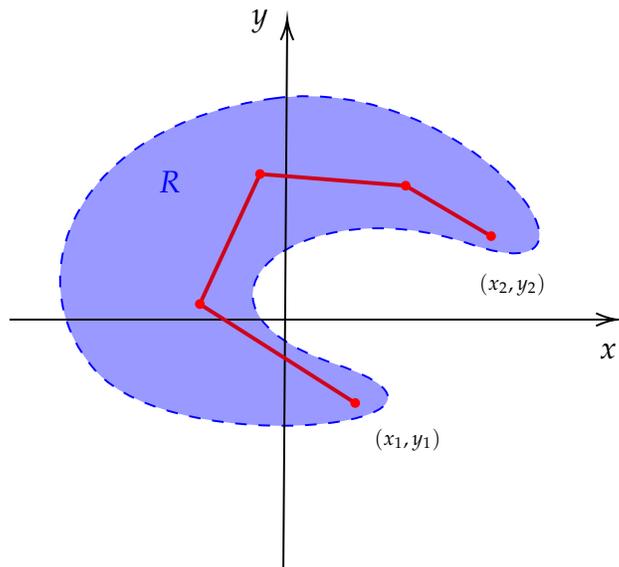
Definição 83 (poligonal). Sejam $P_1 = (x_1, y_1), P_2 = (x_2, y_2), \dots, P_{n-1} = (x_{n-1}, y_{n-1})$ e $P_n = (x_n, y_n)$ pontos de \mathbb{R}^2 . A **linha poligonal de vértices** $P_1, P_2, \dots, P_{n-1}, P_n$ é o seguinte conjunto:

$$\overline{P_1P_2} \cup \overline{P_2P_3} \cup \dots \cup \overline{P_{n-1}P_n}$$

Dizemos que P_0 é o ponto inicial da linha poligonal e que P_n é o ponto final da linha poligonal.



Definição 84 (conjunto conexo por poligonais em \mathbb{R}^2). Um conjunto $R \subseteq \mathbb{R}^2$ é **conexo por linhas poligonais** se, e somente se, dados quaisquer pontos $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in R$, existir uma linha poligonal inteiramente contida em R cujo ponto inicial é (x_1, y_1) e cujo ponto final é (x_2, y_2) .



4 Limite e Continuidade

Consideremos uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida no interior de um círculo de raio $r > 0$, exceto, possivelmente, no centro desse círculo, (x_0, y_0) , e um número real L . Neste caso, dizemos que o limite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tende a (x_0, y_0) é L se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ for possível exibir um $\delta = \delta((x_0, y_0), \varepsilon)$ tal que, sempre que estiver satisfeita a condição:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

teremos:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

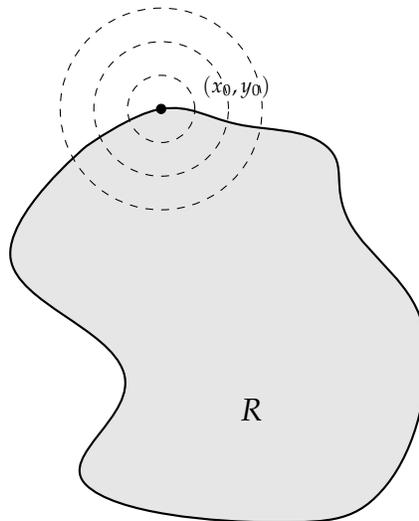
Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Coloquialmente, podemos dizer que $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ocorre se, e somente se, a fim de obter valores de $f(x, y)$ **arbitrariamente** próximos de L , bastar tomarmos (x, y) **suficientemente** próximo de (x_0, y_0) .

Observe que não exigimos $(x_0, y_0) \in R = \text{dom}(f)$ – isto é, f *não precisa* estar definida em (x_0, y_0) . Formalmente, a fim de podermos discutir o limite de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ em um ponto (x_0, y_0) , é *suficiente* que este seja um **ponto de acumulação de** R , pois neste caso temos “como” nos aproximar, tanto quanto queiramos, do ponto (x_0, y_0) por pontos de R , onde efetivamente podemos calcular $f(x, y)$: com efeito, qualquer bola aberta centrada em

(x_0, y_0) conterá pontos de R , o domínio de f .



Segue abaixo a definição “formal”:

Definição 85 (limite). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in R'$ e $L \in \mathbb{R}$. Dizemos que o **limite de $f(x, y)$ conforme (x, y) tende a (x_0, y_0) é L** se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que:*

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Exemplo 86. *Mostrar que:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x + 3y = 0$$

Solução: Devemos mostrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que vale a implicação:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |(2x + 3y) - 0| < \varepsilon,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir uma **condição suficiente**, em termos de um δ que devemos construir, para que tenhamos:

$$|2x + 3y| < \varepsilon$$

Vamos, portanto, “trabalhar” a desigualdade acima a fim de obter tal δ .

Naturalmente, se garantirmos que:

$$2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| < \varepsilon$$

teremos garantido, pela **Desigualdade Triangular**, que $|2x + 3y| < \varepsilon$, pois temos $|2x + 3y| \leq |2x| + |3y| = 2 \cdot |x| + 3 \cdot |y|$ - e "forçar" $2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| < \varepsilon$ também "força" $|2x + 3y| < \varepsilon$.

Vamos, então, procurar um δ que nos garanta que:

$$0 < \|(x, y)\| < \delta$$

implique:

$$2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| < \varepsilon$$

Como $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$ e $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y)\|$, vale:

$$2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| \leq 2 \cdot \|(x, y)\| + 3 \cdot \|(x, y)\| = 5 \cdot \|(x, y)\|$$

Assim, para que tenhamos:

$$2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| < \varepsilon$$

é **suficiente** "forçarmos":

$$5 \cdot \|(x, y)\| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$0 < \|(x, y)\| < \frac{\varepsilon}{5}$$

Obtemos, portanto, que:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \|(x, y)\| < \frac{\varepsilon}{5} \Rightarrow 5 \cdot \|(x, y)\| < \varepsilon \stackrel{2|x|+3|y| \leq 5\|(x,y)\|}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow 2 \cdot |x| + 3 \cdot |y| < \varepsilon \stackrel{|2x+3y| \leq 2|x|+3|y|}{\Rightarrow} |2x + 3y - 0| < \varepsilon$$

Desta forma, basta tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{5}$, e teremos:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow |(2x + 3y) - 0| < \varepsilon,$$

e portanto:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2x + 3y = 0.$$

Exemplo 87. Verificar que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (2,1)} x + y^2 = 3$$

Solução: Devemos mostrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ de tal modo que vale a implicação:

$$0 < \|(x, y) - (2, 1)\| < \delta \Rightarrow |(x + y^2) - 3| < \varepsilon,$$

ou seja, dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir uma **condição suficiente**, em termos de um δ que devemos construir, para que tenhamos:

$$|x + y^2 - 3| < \varepsilon$$

Vamos, portanto, “trabalhar” a desigualdade acima a fim de obter tal δ .

Observando que o ponto no qual desejamos discutir o limite é $(2, 1)$, de modo que é conveniente obtermos expressões que dependam de $|x - 2|$ e de $|y - 1|$.

Naturalmente, se garantirmos que:

$$|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| < \varepsilon$$

teremos garantido, pela **Desigualdade Triangular**, que $|x + y^2 - 3| < \varepsilon$, pois temos $|x + y^2 - 3| = |x - 2 + y^2 - 1| \leq |x - 2| + |y^2 - 1| = |x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1|$ e “forçar” $|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| < \varepsilon$ também “força” $|x + y^2 - 3| < \varepsilon$.

Vamos, então, procurar um δ que nos garanta que:

$$0 < \|(x, y)\| < \delta$$

implique:

$$|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| < \varepsilon$$

Como $|x - 2| = \sqrt{(x - 2)^2} \leq \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \|(x, y) - (2, 1)\|$ e $|y - 1| = \sqrt{(y - 1)^2} \leq \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2} = \|(x, y) - (2, 1)\|$, vale:

$$|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| \leq \|(x, y) - (2, 1)\| + |y + 1| \cdot \|(x, y) - (2, 1)\|$$

Gostaríamos que o termo $|y + 1|$ que aparece acima fosse limitado por alguma constante, M . Para tanto, é suficiente, por exemplo, restringirmo-nos a valores de y tais que:

$$|y + 1| < M$$

Assim, para que tenhamos:

$$|x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| \leq \|(x, y) - (2, 1)\| + M \cdot \|(x, y) - (2, 1)\| < \varepsilon$$

precisaremos, primeiramente, garantir que a distância de y a -1 seja inferior a M . Para isto, basta exigirmos que $\|(x, y) - (2, 1)\| < M$.

Satisfeita a condição acima (ou seja, se já tivermos garantido que $\|(x, y) - (2, 1)\| < M$), para garantir $|x - 2| + M \cdot |y - 1| < \varepsilon$ basta “forçarmos”, por exemplo:

$$\|(x, y) - (2, 1)\| < \frac{\varepsilon}{1 + M},$$

pois deste modo teremos:

$$\begin{aligned} |x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| &\leq |x - 2| + M \cdot |y - 1| \leq \|(x, y) - (2, 1)\| + M \cdot \|(x, y) - (2, 1)\| < \\ &< \frac{\varepsilon}{1 + M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{1 + M} = \varepsilon \end{aligned}$$

Assim, é **suficiente** “forçarmos”:

$$\|(x, y) - (2, 1)\| < \min \left\{ M, \frac{\varepsilon}{M + 1} \right\}$$

ou seja, basta tomarmos $\delta = \min \left\{ M, \frac{\varepsilon}{M + 1} \right\}$, e teremos:

$$\begin{aligned} 0 < \|(x, y) - (2, 1)\| < \delta &\Rightarrow (|x - 2| < \delta) \& (|y - 1| < \delta) \stackrel{\delta \leq M}{\Rightarrow} \\ &\stackrel{\delta \leq M}{\Rightarrow} (|x - 2| < \delta) \& (|y - 1| < \delta) \& (|y + 1| \leq M) \Rightarrow \end{aligned}$$

$$|f(x, y) - 3| = |x + y^2 - 3| \stackrel{\text{D.T.}}{\leq} |x - 2| + |y + 1| \cdot |y - 1| \stackrel{\delta \leq M}{\Rightarrow}$$

$$|f(x, y) - 3| \leq |x - 2| + M \cdot |y - 1| \stackrel{\delta < \frac{\varepsilon}{M+1}}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{\varepsilon}{1 + M} + M \cdot \frac{\varepsilon}{1 + M} = \varepsilon$$

Basta, portanto, tomarmos $\delta = \min \left\{ M, \frac{\varepsilon}{1 + M} \right\}$, e teremos:

$$0 < \|(x, y) - (2, 1)\| < \delta \Rightarrow |x + y^2 - 3| < \varepsilon.$$

4.1 Existência de Limites

No caso de uma função de uma variável real a valores reais, temos dois modos de nos aproximar de um ponto: pela esquerda e pela direita.

No caso de uma função de duas variáveis reais a valores reais, temos uma infinidade de direções pelas quais podemos nos aproximar de um ponto.

Definição 88. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $S \subseteq R$, $(x_0, y_0) \in R'$, $L \in \mathbb{R}$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Tem-se:*

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S}} f(x,y) = L$$

se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in S$ tal que:

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

tivermos:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Teorema 89. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in R'$, $L \in \mathbb{R}$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Se:*

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

então tem-se, para todo $S \subseteq R$,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S}} f(x,y) = L$$

Demonstração. De fato, suponhamos que exista:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Então dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $(x, y) \in R$ tal que $0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$ tem-se:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Em particular, para qualquer $(x, y) \in S \subseteq R$, existirá $\delta > 0$ tal que se (x, y) for tal que:

$$0 < \|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta$$

então:

$$|f(x, y) - L| < \varepsilon$$

Desta forma, tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S}} f(x, y) = L$$

□

O teorema anterior nos fornece, em sua forma contrapositiva, o seguinte critério:

Se existirem dois subconjuntos $S_1, S_2 \subseteq S$ tais que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x, y) = L_1 \neq L_2 = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x, y)$$

então o limite não existe.

Em geral, tomaremos S como “curvas” pelas quais podemos nos aproximar do ponto.

É importante ressaltar aqui que o critério dado acima serve, somente, para demonstrar que certo limite não existe. Fazemos isto exibindo dois subconjuntos do domínio da função ao longo dos quais os limites calculados diferem.

Ainda que mostremos que o limite ao longo de duas curvas diferentes coincidam, isto, por si só, não garante que o limite exista, pois sempre poderá existir um outro caminho ao longo do qual o limite difira.

Assim, para provar que um limite **não existe**, utilizamos o critério acima, enquanto que para provar que um limite **existe**, devemos proceder por argumentos envolvendo ε e δ s.

Exemplo 90. Consideremos a função dada por:

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Afirmamos que:

$$\nexists \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$$

Para demonstrar isto, devemos exibir dois subconjuntos do domínio pelos quais os limites calculados sejam distintos.

De fato, considere as curvas dadas por:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} \text{ e } S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

Por um lado, temos:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = 1$$

Por outro lado,

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = 0$$

de modo que, por depender do caminho, o limite não existe.

Exemplo 91. Consideremos a função:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \mapsto \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Afirmamos que, neste caso,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y) = 0$$

De fato, pelos conjuntos:

$$S_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$$

$$S_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

tem-se:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, 0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{\sqrt{x^2 + 0^2}} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow 0} f(0, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{\sqrt{0^2 + y^2}} = 0$$

Isto, em si, não garante que o limite exista. Para que o limite exista é necessário que o limite seja o mesmo por *todos* os subconjuntos que contêm $(0,0)$. Neste caso, dado $\varepsilon > 0$, devemos mostrar que existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| < \varepsilon$$

Sabe-se que:

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} \text{ e } |y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

Desta forma, para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, tem-se:

$$|f(x, y)| = \frac{|x \cdot y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{|x| \cdot |y|}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Logo, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, e teremos:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = |f(x, y) - 0| = |f(x, y)| \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$$

Desta forma,

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x \cdot y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

Exemplo 92. *Afirmamos que:*

$$\nexists \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2}$$

Consideremos os seguintes conjuntos:

$$S_1 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

Temos,

$$\lim_{\substack{(x, y) \rightarrow (0, 0) \\ (x, y) \in S_1}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0}{x^2 + 0^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_2}} f(0,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y}{0^2 + y^2} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Delta}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x}{x^2 + x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Como pudemos exibir dois subconjuntos do domínio, S_1 e Δ , tais que:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) = 0 \neq \frac{1}{2} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Delta}} f(x,y)$$

segue que o limite não existe.

Exemplo 93. Considere a função:

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x,y) \mapsto \frac{x \cdot y^2}{x^2 + y^4}$$

Consideremos:

$$S_1 = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$S_2 = \{(0,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$\Delta = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = y\}$$

Temos:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_1}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot 0^2}{x^2 + 0^4} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S_2}} f(x,y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{0 \cdot y^2}{0^2 + y^4} = 0$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in \Delta}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot x^2}{x^2 + x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{1 + x^2}$$

Na verdade, o limite é zero ao longo de qualquer reta que passe pela origem, ou seja, ao longo de qualquer conjunto:

$$R_m = \{(x, m \cdot x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in R_m}} f(x,y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot (m \cdot x)^2}{x^2 + (m \cdot x)^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cdot x^3}{x^2 + m^4 \cdot x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2 \cdot x}{1 + m^4 \cdot x^2} = 0$$

Apesar disto, não é verdade que $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x,y) = 0$. Tomemos:

$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2 = x\}$$

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (0,0) \\ (x,y) \in S}} f(x,y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} = \lim_{y \rightarrow 0} f(y^2, y) = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 \cdot y^2}{(y^2)^2 + y^4} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Referências

- [1] Pinto, D., Morgado, M.C.F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, 2014.
- [2] Mendes, C. M., *CÁLCULO III - NOTAS DE AULA*, São Carlos, 1988. Cópia digital disponível em <https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/claudio.pdf>.
- [3] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.
- [4] <https://math.stackexchange.com/questions/1550259/cardioid-in-coffee-mug>, acessado em 17 de março de 2020.
- [5] Torres, V., Gomes da Silva, M. *Experimento: confeccionando e verificando que a curva cicloide apresenta o menor tempo entre dois pontos desnivelados*. In *Experiências em Ensino de Ciências*, Vol. 15, n. 3, 2020. Disponível em https://if.ufmt.br/eenci/artigos/Artigo_ID766/v15_n3_a2020.pdf.