MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Agenda 06

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

Nesta agenda aprofundaremos o nosso estudo sobre limites de funções de duas variáveis reais a valores reais. Constataremos muitas propriedades análogas às dos limites de funções de uma variável real a valores reais, como as chamadas "propriedades aritméticas" dos limites.

Apresentaremos, também, o conceito de função contínua, juntamente com exemplos e com demonstrações de propriedades de "combinações" de funções contínuas.

2 Mais alguns Resultados sobre Limites

Teorema 1. *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in R'$. Tem-se:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Rightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|$$

Demonstração. Usaremos o fato de que, para quaisquer números reais a, b temos:

$$||a| - |b|| \leq |a - b|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

Observando que:

$$||f(x,y)| - |L|| < |f(x,y) - L|,$$

*jeancb@ime.usp.br

concluímos que basta tomarmos o mesmo $\delta > 0$ (que garante que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$), e teremos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow ||f(x,y)| - |L|| < |f(x,y) - L| < \varepsilon$$

e portanto:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|.$$

□

A seguir veremos que, se um limite existir, então ele será único.

Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in R'$. Se:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$$

e:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2$$

então $L_1 = L_2$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que tenhamos:

$$\begin{cases} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1 \\ \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2 \end{cases} \tag{1}$$

mas que $L_1 \neq L_2$. Neste caso, podemos tomar o número positivo:

$$r = \frac{|L_2 - L_1|}{2} > 0,$$

e teremos:

$$]L_1 - r, L_1 + r[\cap]L_2 - r, L_2 + r[= \varnothing$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_1$, para este $r > 0$ existe δ_1 tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L_1| < r \iff f(x,y) \in]L_1 - r, L_1 + r[$$

e como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L_2$, para aquele mesmo $r > 0$, existe δ_2 tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - L_2| < r \iff f(x,y) \in]L_2 - r, L_2 + r[$$

Consideremos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Como $(x_0, y_0) \in R'$, para este $\delta > 0$ existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap R \setminus \{(x_0, y_0)\}$. Para este $(\bar{x}, \bar{y}) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap R \setminus \{(x_0, y_0)\} \subseteq R$, temos:

$$f(\bar{x}, \bar{y}) \in I_1 \cap I_2 = \varnothing,$$

o que é um absurdo. O absurdo provém de supormos que $L_1 \neq L_2$. Como a presunção de termos $L_1 \neq L_2$ redunda em um absurdo, essa deve ser, obrigatoriamente, falsa, ou seja, tem-se, na verdade, $L_1 = L_2$.

$\square$

Definição 2 (função infinitésima). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $(x_0, y_0) \in R'$. Dizemos que f* ***é infinitésima em*** *(x_0, y_0) se, e somente se,*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y) = 0$$

Exemplo 3. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_1 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

é infinitésima em $(0, 0)$.

De fato, para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta escolhermos, por exemplo, $\delta = \varepsilon$, e teremos:

$$0 < \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \varepsilon \Rightarrow |\pi_1(x, y) - 0| = |x| < \varepsilon$$

Exemplo 4. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x + y^2 \end{array}$$

é infinitésima em $(0, 0)$.

Demonstração. De fato, dado $\varepsilon > 0$, devemos exibir $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x, y)\| < \delta \Rightarrow |x + y^2| < \varepsilon$$

Como $|x + y^2| \leq |x| + |y^2|$, uma condição *suficiente* para que $|x + y^2| < \varepsilon$, é que tenhamos:

$$|x| + |y^2| < \varepsilon$$

Se impusermos que $\|(x,y)\| \leq 1$, teremos:

$$|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x,y)\| \leq 1$$

de modo que:

$$|y^2| = |y| \cdot |y| \leq |y|$$

Tomando $\delta = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\}$, teremos:

$$0 < \|(x,y)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \|(x,y)\| \leq 1 \\ |x| < \frac{\varepsilon}{2} \text{ e } |y| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |x + y^2| \leq |x| + |y^2| \leq |x| + |y| \cdot 1 < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Segue, portanto, que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x + y^2 = 0.$$

□

Definição 5 (função limitada em um ponto). *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in R$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dizemos que f* ***é limitada em*** *$(x_0, y_0) \in R$ se, e somente se, existirem $K > 0$ e uma bola aberta centrada em (x_0, y_0) (digamos, de raio r), $B((x_0, y_0), r)$, tais que:*

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0), r) \cap R)(|f(x,y)| \leq K)$$

Proposição 6. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in R \cap R'$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

Então f é limitada *em (x_0, y_0).*

Demonstração. De fato, como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

segue do **Teorema 1** que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|.$$

Assim, dado $\varepsilon = 1$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow ||f(x,y)| - |L|| < 1,$$

ou seja,

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow |L| - 1 < |f(x,y)| < |L| + 1$$

Assim, como $-|L| - 1 = -(|L| + 1) < |L| - 1$, temos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta \Rightarrow -(|L|+1) < f(x,y) < |L| + 1 \iff |f(x,y)| < |L| + 1.$$

Desta forma, basta tomarmos $K = |L| + 1$ e $\eta > 0$ construído acima, e teremos:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta) \cap R)(|f(x,y)| < K)$$

$\square$

Veremos, a seguir, que o produto de uma função infinitésima em um ponto (x_0, y_0) por uma função limitada em (x_0, y_0) é, novamente, infinitésima.

Teorema 7. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in R \cap R'$ e $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$

e que existam $K > 0$ e $\eta > 0$ tais que:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta))(|g(x,y)| \leq K)$$

Então:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \cdot g)(x,y) = 0$$

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos o número positivo $\frac{\varepsilon}{K} > 0$.

Como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 0$$

para $\frac{\varepsilon}{K} > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{K}$$

Tomando $\delta = \min\{\eta, \delta_1\} > 0$, teremos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x,y)| < \frac{\varepsilon}{K} \\ |g(x,y)| \leq K \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) \cdot g(x,y)| = |f(x,y)| \cdot |g(x,y)| < \frac{\varepsilon}{\cancel{K}} \cdot \cancel{K} = \varepsilon$$

□

Proposição 8. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in R'$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \neq 0$$

Então existem $M > 0$ e $\eta > 0$ tais que:

$$(\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta))(M < |f(x,y)|)$$

Demonstração. Suponhamos $L > 0$. Como

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

dado $\varepsilon = \frac{L}{2} > 0$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta))(|f(x,y) - L| < \frac{L}{2}) \iff$$

$$\iff (\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta)) \left(-\frac{L}{2} < f(x,y) - L < \frac{L}{2}\right) \iff$$

$$\iff (\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta)) \left(\frac{L}{2} < f(x,y) < \frac{3L}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta)) \left(\frac{L}{2} < f(x,y) \leq |f(x,y)|\right).$$

Tomando $M = \frac{L}{2} > 0$, teremos:

$$(\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta)) \, (M < |f(x,y)|) \, .$$

Se $L < 0$, consideremos $\varepsilon = -\frac{L}{2} > 0$, para o qual existirá $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta)\cap R)\left(|f(x,y)-L| < -\frac{L}{2}\right) \iff$$

$$\iff (\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta)\cap R)\left(\frac{L}{2} < f(x,y)-L < -\frac{L}{2}\right) \iff$$

$$\iff (\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta)\cap R)\left(L+\frac{L}{2} < f(x,y) < L-\frac{L}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta)\cap R)\left(f(x,y) < \frac{L}{2} < 0\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta)\cap R)\left(\frac{|L|}{2} < |f(x,y)|\right)$$

Assim, basta tomarmos $M = \frac{|L|}{2}$, e teremos:

$$(\forall (x,y) \in R \cap B((x_0,y_0),\eta))\,(M < |f(x,y)|)\,.$$

□

Proposição 9. *Sejam* $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0,y_0) \in R'$ *e* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tais que:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \neq 0$$

Então:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{f(x,y)} = \frac{1}{L}$$

Demonstração. Como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$$

segue do **Teorema 1** que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L|$$

Uma vez que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \neq 0,$$

tem-se:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} |f(x,y)| = |L| > 0,$$

Pela **Proposição 8** existem $M > 0$ e $\eta_1 > 0$ tais que:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta_1) \cap R)(M < |f(x,y)|)$$

Pela **Proposição 6**, existem também $\eta_2 > 0$ e $K > 0$ tais que:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta_2) \cap R)(|f(x,y)| \leq K)$$

Finalmente, como:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L,$$

dado $\varepsilon > 0$, para o número positivo $M \cdot |L| \cdot \varepsilon > 0$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < M \cdot |L| \cdot \varepsilon$$

Consideremos, agora, $\delta = \min\{\eta_1, \eta_2, \delta_1\}$. Tem-se:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta_1 \\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \eta_2 \\ 0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} M < |f(x,y)| \\ 0 \neq |f(x,y)| \\ |f(x,y) - L| < M \cdot |L| \cdot \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{1}{|f(x,y)|} < \frac{1}{M} \\ 0 \neq \frac{1}{|f(x,y)|} \\ |f(x,y) - L| < M \cdot |L| \cdot \varepsilon \end{cases} \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x,y)} - \frac{1}{L} \right| = \left| \frac{L - f(x,y)}{f(x,y) \cdot L} \right| = \frac{1}{|f(x,y)| \cdot |L|} \cdot |f(x,y) - L| \leq$$

$$\leq \frac{1}{M} \cdot \frac{1}{|L|} \cdot (M \cdot |L| \cdot \varepsilon) = \varepsilon$$

Como para qualquer $\varepsilon > 0$ é possível exibir $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \left| \frac{1}{f(x,y)} - \frac{1}{L} \right| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{f(x,y)} = \frac{1}{L}.$$

$\square$

Teorema 10 (Propriedades Operatórias dos Limites). *Sejam* $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $L, M \in \mathbb{R}$ *e* $(x_0, y_0) \in R'$ *tais que:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \quad e \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$$

Então:

(a)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = L + M$$

(b)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f-g)(x,y) = L - M$$

(c)
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\cdot g)(x,y) = L \cdot M$$

(d) Se $M \neq 0$*, tem-se:*

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) = \frac{L}{M}$$

Demonstração. Ad (a): Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(f+g)(x,y) - (L+M)| = |f(x,y) - L + g(x,y) - M| \leq |f(x,y) - L| + |g(x,y) - M| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Desta forma, como para todo $\varepsilon > 0$ pudemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$ implica:

$$|(f+g)(x,y) - (L+M)| < \varepsilon$$

segue que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) = L+M = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

Ad (b): Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\frac{\varepsilon}{2} > 0$. Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Se tomarmos $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, teremos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \\ |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |(f-g)(x,y) - (L-M)| = |f(x,y) - L - g(x,y) + M| \leq |f(x,y) - L| + |M - g(x,y)| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Desta forma, como para todo $\varepsilon > 0$ pudemos encontrar $\delta > 0$ tal que $0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta$ implica:

$$|(f-g)(x,y) - (L-M)| < \varepsilon$$

segue que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f-g)(x,y) = L-M = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$$

Ad (c): Se $L = 0$, uma vez que existe $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)$, segue do que já provamos acima que o limite do produto é zero.

Desta forma, suponhamos $L \neq 0$.

Podemos escrever:

$$|(f\cdot g)(x,y) - L\cdot M| = |f(x,y)\cdot g(x,y) - L\cdot M| =$$

$$= |f(x,y)\cdot g(x,y) - L\cdot g(x,y) + L\cdot g(x,y) - L\cdot M| \overset{\overset{\text{D.T.}}{\uparrow}}{\leq}$$

$$\overset{\overset{\text{D.T.}}{\uparrow}}{\leq} |f(x,y)\cdot g(x,y) - L\cdot g(x,y)| + |L\cdot g(x,y) - L\cdot M| =$$

$$= |g(x,y)|\cdot|f(x,y) - L| + |L|\cdot|g(x,y) - M|$$

Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $\frac{\varepsilon}{2|L|} > 0$. Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, existe $\delta_1 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_1 \Rightarrow |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$$

Uma vez que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, g é limitada em uma bola aberta da forma $B((x_0,y_0),\eta)$, ou seja, existe $K > 0$ tal que:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta))(|g(x,y)| \leq K)$$

Ademais, como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = M$, dado $\frac{\varepsilon}{2|L|} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|}$$

Como $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$, dado $\frac{\varepsilon}{2|K|} > 0$, existe $\delta_2 > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta_2 \Rightarrow |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2|K|}$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \eta\}$. Temos:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow \begin{cases} |f(x,y) - L| < \frac{\varepsilon}{2|K|} \\ |g(x,y)| \leq K \text{ e } |g(x,y) - M| < \frac{\varepsilon}{2|L|} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y)\cdot g(x,y) - L\cdot M| \leq |g(x,y)|\cdot|f(x,y) - L| + |L|\cdot|g(x,y) - M| \leq$$

$$\leq K\cdot|f(x,y) - L| + |L|\cdot|g(x,y) - M| < K\cdot\frac{\varepsilon}{2|K|} + |L|\cdot\frac{\varepsilon}{2|L|} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y)\cdot g(x,y) - L\cdot M| < \varepsilon$$

ou seja,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f \cdot g)(x,y) = L \cdot M = \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\right) \cdot \left(\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)\right)$$

Ad (d): Decorre das **Proposições 9** e do item (c), provado acima.

□

3 Continuidade

Definição 11. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $(x_0, y_0) \in R$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Dizemos que f **é contínua em** (x_0, y_0) se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$ tal que:*

$$\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < \delta \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| < \varepsilon$$

Em termos de limites, podemos dizer que uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em $(x_0, y_0) \in R' \cap R$ se, e somente se,

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

Se $(x_0, y_0) \in R$ for um **ponto isolado**, então f será automaticamente contínua em (x_0, y_0): de fato, por ser ponto isolado, existe $r > 0$ tal que $B((x_0, y_0), r) \cap R \setminus \{(x_0, y_0)\} = \varnothing$. Dado $\varepsilon > 0$ qualquer, bastará tomarmos $\delta = r$, e teremos:

$$\overbrace{((x,y) \in \operatorname{dom}(f))\&(\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < r)}^{(x,y)=(x_0,y_0)} \Rightarrow \underbrace{|f(x,y) - f(x_0,y_0)|}_{=0} < \varepsilon$$

Exemplo 12. *A função constante,*

$$\begin{array}{rccc} f: & R \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \mapsto & k \end{array}$$

onde $k \in \mathbb{R}$, é contínua em qualquer ponto (x_0, y_0).

Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = 1$ (por exemplo), e teremos:

$$((x,y) \in R)\&(\|(x,y) - (x_0,y_0)\| < 1) \Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |k - k| = 0 < \varepsilon.$$

Exemplo 13. *A função projeção na primeira coordenada:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_1: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua em qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, e teremos:

$$((x,y) \in \mathbb{R}^2)\&(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta = \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\pi_1(x,y) - \pi_1(x_0,y_0)| = |x - x_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \varepsilon$$

Exemplo 14. *A função projeção na segunda coordenada:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_2 : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

é contínua em qualquer ponto, $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$*.*

De fato, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$, e teremos:

$$((x,y) \in \mathbb{R}^2)\&(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \delta = \varepsilon) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\pi_1(x,y) - \pi_1(x_0,y_0)| = |y - y_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \varepsilon$$

Exemplo 15. *A função linear:*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a \cdot x + b \cdot y \end{array}$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$*, é contínua em qualquer ponto,* $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$*.*

Se $a = 0 = b$, f é a função constante, que sabemos ser contínua.

Se $b = 0$ e $a \neq 0$, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \dfrac{\varepsilon}{|a|} > 0$, e teremos:

$$((x,y) \in \mathbb{R}^2)\&\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{|a|}\right) \Rightarrow |x - x_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{|a|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |a \cdot x - a \cdot x_0| = |a| \cdot |x - x_0| < |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a|} = \varepsilon$$

de modo que f é contínua em (x_0,y_0).

Finalmente, se $a \neq 0 \neq b$, então dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \frac{\varepsilon}{|a|+|b|}$, teremos:

$$((x,y) \in \mathbb{R}^2)\&\left(\|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(|x - x_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|}\right) \& \left(|y - y_0| \leq \|(x,y)-(x_0,y_0)\| < \frac{\varepsilon}{|a|+|b|}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |f(x,y) - f(x_0,y_0)| = |a \cdot x + b \cdot y - a \cdot x_0 - b \cdot y_0| = |a| \cdot |x - x_0| + |b| \cdot |y - y_0| <$$

$$< |a| \cdot \frac{\varepsilon}{|a| + |b|} + |b| \cdot \frac{\varepsilon}{|a| + |b|} = \varepsilon$$

Assim, segue que f é contínua.

Em virtude das propriedades aritméticas dos limites, temos o seguinte:

Teorema 16. *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$, $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in R$ tais que f e g são, ambas, contínuas em (x_0, y_0). Então:*

(a) $\begin{array}{rccc} f+g: & R & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y)+g(x,y) \end{array}$ *é contínua em (x_0, y_0);*

(b) $\begin{array}{rccc} f-g: & R & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y)-g(x,y) \end{array}$ *é contínua em (x_0, y_0);*

(c) $\begin{array}{rccc} f\cdot g: & R & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & f(x,y)\cdot g(x,y) \end{array}$ *é contínua em (x_0, y_0);*

(d) Se $g(x_0, y_0) \neq 0$, então $\begin{array}{rccc} \frac{f}{g} & R & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{f(x,y)}{g(x,y)} \end{array}$ *é contínua em (x_0, y_0);*

Demonstração. Se (x_0, y_0) for um ponto isolado de R, nada há a se demonstrar, uma vez que toda função é (trivialmente) contínua em pontos isolados de seu domínio. Consideraremos, portanto, o caso em que (x_0, y_0) é ponto de acumulação de R.

Uma vez que tanto f quanto g são contínuas em $(x_0, y_0) \in R' \cap R$, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \quad \text{e} \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = g(x_0,y_0)$$

Pelo **Teorema 10**, item (a), vale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f+g)(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + g(x,y) \overset{\substack{\textbf{Teo. 10}\\ \uparrow}}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) + \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \overset{\text{hip}}{=} f(x_0,y_0) + g(x_0,y_0) \overset{\text{def}}{=} (f+g)(x_0,y_0)$$

Pelo **Teorema 10**, item (b), vale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f-g)(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - g(x,y) \overset{\overset{\textbf{Teo. 10}}{\uparrow}}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) - \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \overset{\text{hip}}{=} f(x_0,y_0) - g(x_0,y_0) \overset{\text{def}}{=} (f-g)(x_0,y_0)$$

Pelo **Teorema 10**, item (c), vale:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} (f\cdot g)(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)\cdot g(x,y) \overset{\overset{\textbf{Teo. 10}}{\uparrow}}{=}$$

$$= \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) \overset{\text{hip}}{=} f(x_0,y_0)\cdot g(x_0,y_0) \overset{\text{def}}{=} (f\cdot g)(x_0,y_0)$$

Como $g(x_0,y_0) \neq 0$, do **Teorema 10**, item (d), decorre que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(\frac{f}{g}\right)(x,y) \overset{\text{def}}{=} \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)}{g(x,y)} \overset{\overset{\textbf{Teo. 10}}{\uparrow}}{=}$$
$$= \frac{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)}{\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y)} \overset{\text{hip}}{=} \frac{f(x_0,y_0)}{g(x_0,y_0)} \overset{\text{def}}{=} \left(\frac{f}{g}\right)(x_0,y_0)$$

□

Definição 17 (função contínua em um conjunto). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $S \subseteq R$. Dizemos que f* ***é contínua no conjunto*** *S se, e somente se, f for contínua em* todos *os pontos de S.*

Exemplo 18. *Toda* ***função polinomial*** *é contínua em todo o seu domínio. De fato, considere:*

$$\begin{array}{rccc} p: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \sum_{i+j\leq n} a_{ij}x^i \cdot y^j \end{array}$$

e $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ qualquer. *Pelo que vimos no* ***Exemplo 12****, para quaisquer $i,j \in \mathbb{N}$ tais que $i+j \leq n$, a função:*

$$\begin{array}{rccc} k_{ij}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$$

é contínua em (x_0, y_0).

Também, conforme visto nos **Exemplos 13** *e* **14**, *as funções* π_1 *e* π_2 *são contínuas em* (x_0, y_0). *Pelo* **Teorema 10**, *item (c), segue que, para quaisquer* $i, j \in \mathbb{N}$ *tais que* $i + j \leq n$, *a função:*

$$\begin{array}{rccc} p_{ij}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j \end{array}$$

é contínua ($p_{ij}(x,y) = k_{ij}(x,y) \cdot [\pi_1(x,y)]^i \cdot [\pi_2(x,y)]^j = a_{ij} \cdot x^i \cdot y^j$).

Pelo item (a) do **Teorema 10**, *a soma destas funções, ou seja, a função* p, *também é contínua no ponto* (x_0, y_0). *Como o ponto* (x_0, y_0) *é arbitrário, concluímos que a argumentação acima pode ser replicada para* todos *os pontos de* $\mathbb{R}^2$, *de modo que* p *é contínua em todos os pontos de* $\mathbb{R}^2$. *Segue, portanto, que* p *é contínua em todo o seu domínio.*

Exemplo 19. *Toda* ***função racional*** *é contínua em todo seu domínio. Mais especificamente, sejam* $p, q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *funções polinomiais, de modo que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \setminus q^{\dashv}[\{0\}] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{p(x,y)}{q(x,y)} \end{array}$$

é uma função racional. Pelo **Exemplo 18**, *tanto* p *quanto* q *são funções contínuas. Decorre do item (d) do* **Teorema 16** *que* f *é contínua em todos os pontos onde* $q(x,y) \neq 0$ *– ou seja, em* $\mathbb{R}^2 \setminus q^{\dashv}[\{0\}]$.

Definição 20 (composição). *Sejam* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis reais a valores reais e* $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de uma variável real a valores reais tais que* $f[R] \subseteq A$. *A* ***composição de*** φ ***com*** f *é a função dada por:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi \circ f: & R \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \varphi(f(x,y)) \end{array}$$

Em termos diagramáticos, $\varphi \circ f$ *é a única função tal que o diagrama abaixo comuta:*

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "f"] \arrow[dr, bend right, "\varphi\circ f"'] & A \arrow[d, "\varphi"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Temos o seguinte:

Teorema 21 (continuidade da função composta). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais, $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais tal que $f[R] \subseteq A$ e $(x_0, y_0) \in R$ tal que f é contínua em (x_0, y_0). Se $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função contínua em $f(x_0, y_0) \in A$, então $\varphi \circ f$ será contínua em (x_0, y_0).*

Demonstração. Uma vez que $\varphi : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $f(x_0, y_0) \in A$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$(z \in A)\&(|z - f(x_0, y_0)| < \eta) \Rightarrow |\varphi(z) - \varphi(f(x_0, y_0))| = |\varphi(z) - (\varphi \circ f)(x_0, y_0)| < \varepsilon$$

Por sua vez, dado este $\eta > 0$, como $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é contínua em (x_0, y_0), existe $\delta > 0$ tal que:

$$((x, y) \in R)\&(\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta$$

Portanto, tem-se:

$$((x, y) \in R)\&(\|(x, y) - (x_0, y_0)\| < \delta) \Rightarrow |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \eta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow |\varphi(f(x, y)) - \varphi(f(x_0, y_0))| = |(\varphi \circ f)(x, y) - (\varphi \circ f)(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

de modo que $\varphi \circ f$ é contínua em (x_0, y_0). $\square$

Exemplo 22. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \sin(x^2 + y^2) \end{array}$$

é contínua em todo seu domínio. Com efeito, podemos escrever f como a composição:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & x^2 + y^2 & \mapsto & \sin(x^2 + y^2) \end{array}$$

A função g, por ser polinomial, é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Do Cálculo I, sabemos que $\varphi(z) = \sin(z)$ é contínua. Deste modo, por ser composição de funções contínuas, f é uma função contínua.

Exemplo 23. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \end{array}$$

é contínua em todo seu domínio. Com efeito, podemos escrever f como a recíproca da composição:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & x^2+y^2 & \mapsto & \sqrt{x^2+y^2} \end{array}$$

A função g, por ser polinomial, é contínua em todo $\mathbb{R}^2$. Do Cálculo I, sabemos que $\varphi(z) = \sqrt{z}, z > 0$ é contínua em todo seu domínio. Deste modo, por ser composição de funções contínuas, $(x,y) \mapsto \sqrt{x^2+y^2}$ é uma função contínua. Pelo item (d) do ***Teorema 16****, segue que por ser recíproca de uma função contínua, f é contínua.*

Definição 24 (função descontínua em um ponto). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(x_0, y_0) \in R \cap R'$. Dizemos que f* ***é descontínua em*** *(x_0, y_0) se, e somente se, não for contínua em (x_0, y_0), ou seja, se, e somente se, existir $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ exista algum $(\bar{x}, \bar{y}) \in R \cap B((x_0, y_0), \delta)$ tal que $|f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x_0, y_0)| \geq \varepsilon_0$.*

Exemplo 25. *Consideremos a função dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} 0, & se\ (x,y) \in \mathbb{Q}^2 \\ 1, & se\ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \end{cases} \end{array}$$

Afirmamos que f é descontínua em qualquer ponto $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Com efeito, dado qualquer $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ tem-se ou $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}^2$ ou $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$. Se tivermos $(x_0, y_0) \in \mathbb{Q}^2$, basta tomarmos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, e teremos (pela densidade de $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) que, para qualquer $\delta > 0$:

$$B((x_0, y_0), \delta) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$$

de modo que existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, ou seja, tal que:

$$\|(\bar{x}, \bar{y}) - (x_0, y_0)\| < \delta \ \text{ e } \ |f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x_0, y_0)| = |1 - 0| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Se tivermos $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Q}^2$, basta tomarmos $\varepsilon_0 = \frac{1}{2} > 0$, e teremos (pela densidade de $\mathbb{Q}^2$ em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) que, para qualquer $\delta > 0$:

$$B((x_0, y_0), \delta) \cap \mathbb{Q}^2 \neq \varnothing$$

de modo que existirá $(\bar{x}, \bar{y}) \in B((x_0, y_0), \delta) \cap \mathbb{Q}^2$, ou seja, tal que:

$$\|(\bar{x}, \bar{y}) - (x_0, y_0)\| < \delta \ \text{ e } \ |f(\bar{x}, \bar{y}) - f(x_0, y_0)| = |0 - 1| = 1 \geq \frac{1}{2} = \varepsilon_0$$

Referências

[1] Mendes, C. M., CÁLCULO III - NOTAS DE AULA, São Carlos, 1988. Cópia digital disponível em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/claudio.pdf.

[2] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.