MAT0121 - Cálculo Diferencial e Integral II
Agenda 07

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

Nesta agenda aprofundaremos o nosso estudo sobre funções de duas ou mais variáveis reais a valores reais, começando a estudar a variação – ou o "comportamento" – de uma função com respeito a cada uma de suas variáveis independentes. Introduziremos, para isto, o conceito de "derivada parcial".

Veremos como calcular as derivadas parciais (de qualquer ordem) de uma função de mais de uma variável real a valores reais, um teorema que relaciona derivadas parciais mistas de ordem dois e apresentaremos o conceito de diferenciabilidade, que nos permitirá definir, dentre outras coisas, o "plano tangente" ao gráfico de uma função em um ponto.

2 Derivadas Parciais

Se $y = f(x)$ é uma função real de uma variável real, sua derivada é definida por:

$$\frac{dy}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x},$$

e pode ser interpretada como a taxa de variação de y com respeito a x.

No caso de uma função, $z = f(x, y)$, de duas variáveis independentes, necessitamos de uma definção semelhante que determine a taxa com que z varia à medida que x e y variam.

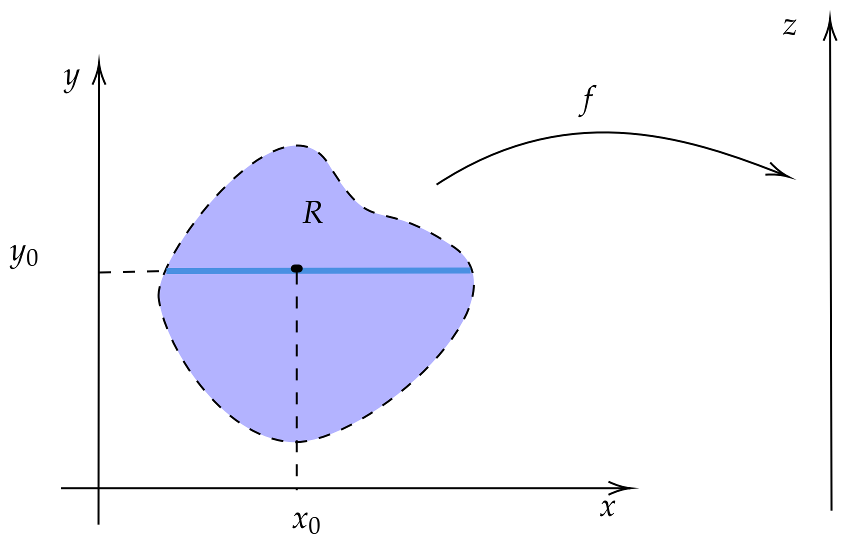
O procedimento consiste em fazer com que apenas uma variável varie de cada vez, enquanto a outra é mantida constante. Mais precisamente, para funções de mais de uma variável independente, derivamos com respeito a uma única variável, mantendo todo o resto constante ("*cœteris paribus*").

*jeancb@ime.usp.br

Definição 1 (derivada parcial com respeito a x). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e $(x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(R)$. A* ***derivada parcial de f com respeito a x no ponto*** *(x_0, y_0) é:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

se este limite existir. Lemos $\frac{\partial f}{\partial x}$ como "del f del x".



Analogamente, temos:

Definição 2 (derivada parcial com respeito a y). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais e $(x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(R)$. A* ***derivada parcial de f com respeito a y no ponto*** *(x_0, y_0) é:*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y},$$

se este limite existir. Lemos $\frac{\partial f}{\partial y}$ como "del f del y".

Observação 3. *No caso de uma função de três (ou mais) variáveis reais, definimos, analogamente:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y, z_0) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x_0, y_0, z_0 + \Delta z) - f(x_0, y_0, z_0)}{\Delta z}$$

sempre que estes limites existirem.

Na prática, para calcularmos as derivadas parciais de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em um dado ponto $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$ com respeito a uma variável $x_i \in \{x, y\}$, basta considerarmos constante $x_j \in \{x, y\} \setminus \{x_i\}$ como constante e derivar a função obtida como se fosse uma função cuja única variável seja x_i. Por exemplo, se queremos calcular a derivada parcial de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$ com respeito à variável x, basta derivarmos a função:

$$\begin{array}{rccc} f_{y_0} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array}$$

no ponto $x = x_0$. De fato, por definição, temos:

$$f'_{y_0}(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f_{y_0}(x_0 + \Delta x) - f_{y_0}(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Se desejamos calcular a derivada parcial de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$ com respeito à variável y, basta derivarmos a função:

$$\begin{array}{rccc} f_{x_0} : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

no ponto $x = x_0$. De fato, por definição, temos:

$$f'_{x_0}(y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f_{x_0}(y_0 + \Delta y) - f_{x_0}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} \overset{\text{def.}}{=} \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

O análogo é válido para funções de três ou mais variáveis, conforme ilustra o próximo:

Exemplo 4. *Considerando:*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y, z) & \mapsto & \dfrac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \end{array}$$

Para calcularmos $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)$*, basta derivarmos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f_{y_0, z_0} : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x^2 + y_0^2 + z_0^2} \end{array}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dx}(f_{y_0,z_0}(x))\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^2 + y_0^2 + z_0^2}\right)\Big|_{x=x_0} =$$

$$= -\frac{2x}{(x^2 + y_0^2 + z_0^2)^2}\Big|_{x=x_0} = \frac{-2x_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2}$$

Portanto:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) = \frac{-2x_0}{(x_0^2 + y_0^2 + z_0^2)^2}$$

Exemplo 5. *Sejam* $z = f(x, y) = \arctan(x^2 + y^2)$ *e* $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. *Vamos calcular as derivadas parciais desta função em* (x_0, y_0) *com respeito a cada uma de suas variáveis. Para calcularmos* $\partial f / \partial x(x_0, y_0)$, *derivamos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f_{y_0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \arctan(x^2 + y_0^2) \end{array}$$

em $x = x_0$. *Assim,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}\left(f_{y_0}(x)\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}\left(\arctan(x^2 + y_0^2)\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{2x}{(x^2 + y_0^2)^2 + 1}\Big|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2 + 1}$$

Para calcularmos $\partial f / \partial y(x_0, y_0)$, *derivamos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f_{x_0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \arctan(x_0^2 + y^2) \end{array}$$

em $y = y_0$.

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}\left(f_{x_0}(y)\right)\Big|_{y=y_0} = \frac{d}{dy}\left(\arctan(x_0^2 + y^2)\right)\Big|_{y=y_0} = \frac{2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2 + 1}$$

Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{2x_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2 + 1} \quad e \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{2y_0}{(x_0^2 + y_0^2)^2 + 1}$$

Exemplo 6. *Seja* $z = f(x, y) = x^2 \cdot y$. *Para calcularmos sua derivada parcial com respeito a* x *no ponto* (x_0, y_0), *derivamos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f_{y_0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \cdot y_0 \end{array}$$

em $x = x_0$*. Assim,*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{d}{dx}(f_{y_0}(x))\Big|_{x=x_0} = \frac{d}{dx}(x^2 \cdot y_0)\Big|_{x=x_0} = 2 \cdot x \cdot y_0\Big|_{x=x_0} = 2 \cdot x_0 \cdot y_0.$$

Para calcularmos a derivada parcial com respeito a y *no ponto* (x_0, y_0)*, derivamos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f_{x_0}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & x_0^2 \cdot y \end{array}$$

em $y = y_0$*. Assim,*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{d}{dy}(f_{x_0}(y))\Big|_{y=y_0} = \frac{d}{dy}(x_0^2 \cdot y)\Big|_{y=y_0} = x_0^2\Big|_{y=y_0} = x_0^2$$

Assim,

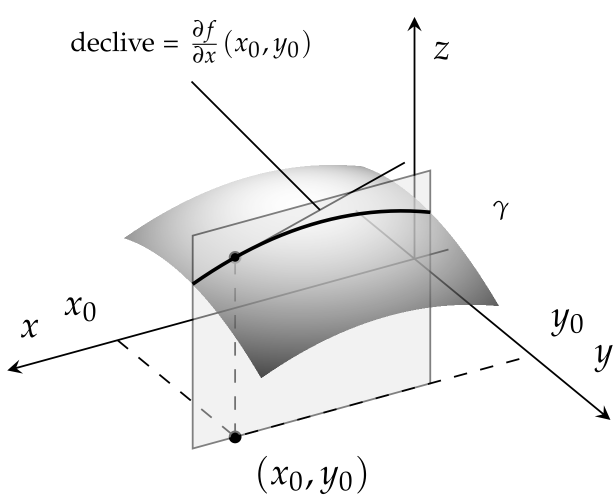
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 2x_0y_0 \;\; e \;\; \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = x_0^2$$

Podemos interpretar a derivada parcial de uma função de duas variáveis reais a valores reais, $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, geometricamente, como uma declividade.

Consideramos a interseção da superfície Graf (f) com o plano vertical $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid y = y_0\}$, que será uma curva dada por:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & \{x \in \mathbb{R} \mid (x, y_0) \in R\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & x & \mapsto & (x, y_0, f(x, y_0)) \end{array}$$

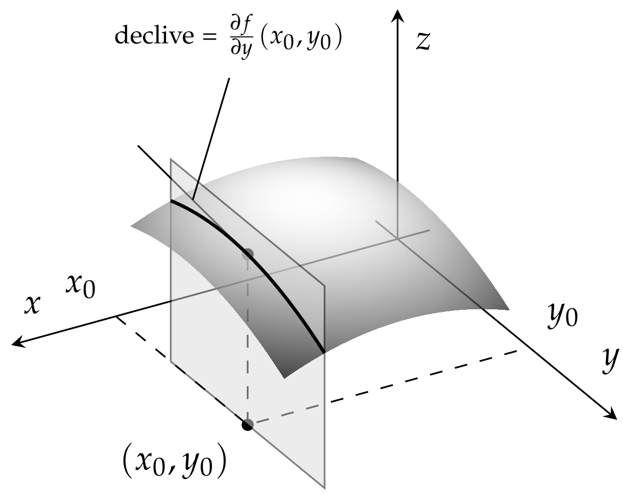
Esta curva tem, em x_0, uma tangente com declividade $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.



Considerando, por sua vez, a interseção da superfície Graf (f) com o plano vertical $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = x_0\}$, obtemos uma curva dada por:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \{y \in \mathbb{R} \mid (x_0, y) \in R\} & \to & \mathbb{R}^3 \\ & y & \mapsto & (x_0, y, f(x_0, y)) \end{array}$$

Esta curva tem, em y_0, uma tangente com declividade $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.



Você encontrará um *applet* para interagir com estes conceitos em https://www.geogebra.org/m/K3xnQRY8.

3 Função Derivada Parcial e Derivadas Parciais de Ordem Superior

Na seção anterior, vimos que para cada ponto (x_0, y_0) no interior do domínio da função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se existe o limite $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)$ (onde $x_i \in \{x, y\}$) podemos estabelecer uma correspondência:

$$(x_0, y_0) \mapsto \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0, y_0)$$

Na verdade, temos uma *função*, conforme enunciado na seguinte:

Definição 7 (função derivada parcial). *Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função que admite derivadas parciais com respeito a uma variável $x_i \in \{x, y\}$ (ou seja, tal que as derivadas parciais existam) em todos os pontos de um subconjunto, $U \subseteq R$. Neste caso, temos definida a seguinte* função:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x_i} : & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \end{array},$$

*denominada a **função derivada parcial de f com respeito a x_i**.*

Convencionamos que quando o domínio de uma tal função não estiver explicitamente declarado, ele ficará subentendido como o "maior" subconjunto de R onde $\partial f / \partial x_i$ existir.

Exemplo 8. *Consideremos a função $f(x, y) = e^{x^2+y^2}$. Temos:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial}{\partial x}(e^{x^2+y^2}) = \frac{d}{dx}(e^{x^2+\underline{y}^2}) = 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y^2},$$

que está definida para todos *os pontos de $\mathbb{R}^2$. Desta forma, a **função derivada parcial com respeito a** x é:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x} : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & 2 \cdot x \cdot e^{x^2+y^2} \end{array}$$

Exemplo 9. *Consideremos a função:*

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & se \ \ (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & se \ \ (x, y) = (0, 0) \end{cases} \end{array}$$

Vamos descrever as funções derivadas parciais.

Para obtermos a derivada parcial com respeito a x em um (x, y) qualquer, devemos proceder por casos: o caso em que $(x, y) \neq (0, 0)$ e o caso em que $(x, y) = (0, 0)$. Para o primeiro caso, deveremos calcular a derivada da função:

$$\begin{array}{rccc} f_{\underline{y}} : & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \cdot \underline{y} \cdot \dfrac{x^2 - \underline{y}^2}{x^2 + \underline{y}^2} \end{array}$$

onde sublinhamos a variável y para nos lembrarmos que devemos tratá-la como constante. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(x \cdot \underline{y} \cdot \frac{x^2 - \underline{y}^2}{x^2 + \underline{y}^2}\right) = x \cdot \underline{y} \cdot \frac{4x\underline{y}^2}{(x^2 + \underline{y}^2)^2} + \underline{y} \cdot \frac{x^2 - \underline{y}^2}{x^2 + \underline{y}^2}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = x \cdot y \cdot \frac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ se } x \neq 0$$

No segundo caso, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0 + \Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

Assim, a função derivada parcial com respeito a x é:

$$\begin{array}{rccl} \dfrac{\partial f}{\partial x}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{4xy^2}{(x^2 + y^2)^2} + y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Para obtermos a derivada parcial com respeito a y em um (x,y) qualquer, devemos proceder por casos: o caso em que $(x,y) \neq (0,0)$ e o caso em que $(x,y) = (0,0)$. Para o primeiro caso, deveremos calcular a derivada da função:

$$\begin{array}{rccc} f_{\underline{x}}: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \underline{x} \cdot y \cdot \dfrac{\underline{x}^2 - y^2}{\underline{x}^2 + y^2} \end{array}$$

onde sublinhamos a variável x para nos lembrarmos que devemos tratá-la como constante. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(\underline{x} \cdot y \cdot \frac{\underline{x}^2 - \underline{y}^2}{\underline{x}^2 + y^2}\right) = \underline{x} \cdot y \cdot \frac{-4y\underline{x}^2}{(\underline{x}^2 + y^2)^2} + \underline{x} \cdot \frac{\underline{x}^2 - y^2}{\underline{x}^2 + y^2}$$

$$\therefore \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x \cdot y \cdot \frac{-4yx^2}{(x^2 + y^2)^2} + x \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0)$$

No segundo caso, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

Assim, a função derivada parcial com respeito a x é:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial y}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} x \cdot y \cdot \dfrac{-4yx^2}{(x^2+y^2)^2} + x \cdot \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases} \end{array}$$

Em sendo $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ funções de duas variáveis reais a valores reais, é razoável nos perguntarmos acerca de suas derivadas parciais. Para estudar isto, apresentamos a seguinte:

Definição 10 (derivada parcial de ordem dois). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que $\frac{\partial f}{\partial x_i} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $x_i \in \{x, y\}$, seja derivável com respeito a $x_j \in \{x, y\}$. A função derivada parcial de $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ com respeito a x_j,*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right): & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial x_j}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)\right) \end{array}$$

é denominada uma ***derivada parcial de ordem dois*** *de f. Lemos $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ como "del dois f del x_j del x_i".*

No caso de uma função de duas variáveis reais a valores reais, $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *in thesi*, podemos formar *quatro* derivadas parciais de ordem dois, quais sejam:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}, \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \text{ e } \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

Para simplificar notações, escrevemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$$

e:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \doteq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}$$

Exemplo 11. *Dada a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 \cdot y^3 \end{array}$$

temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(x^2 \cdot \underline{y}^3\right) = 2 \cdot x \cdot y^3$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left(\underline{x}^2 \cdot y^3\right) = 3 \cdot x^2 \cdot y^2$$

ou seja, as funções:

$$\frac{\partial f}{\partial x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2xy^3 \end{array}$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 3x^2y^2 \end{array}$$

Temos, portanto:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2xy^3) = 6xy^2$$

e portanto a função:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 6xy^2 \end{array}$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2xy^3) = 2y^3$$

e portanto a função:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & 2y^3 \end{array}$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y^2) = 6xy^2$$

e portanto a função:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 6xy^2 \end{array}$$

Temos:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y^2) = 6x^2y$$

e portanto a função:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 6x^2y \end{array}$$

Exemplo 12. *Dada a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x+|y| \end{array}$$

temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}\left(x + |\underline{y}|\right) = 1$$

Para $y \neq 0$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}\left(\underline{x} + |y|\right) = \begin{cases} 1, \ se \ y > 0 \\ -1, \ se \ y < 0 \end{cases}$$

e para $y = 0$, temos:

$$\nexists \frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$$

Assim, não temos definida $\frac{\partial f}{\partial y}$ em pontos do conjunto $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\}$.

Temos, para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(1) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(1) = 0$$

logo, temos as seguintes funções derivadas parciais de ordem dois:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}.$$

No entanto, como não existe $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$, a fortiori *não existem* $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,0)$ *nem* $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,0)$*, para quaisquer que sejam os valores de* $x \in \mathbb{R}$*. Temos, assim:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}: & \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = 0\} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}.$$

Definição 13 (derivada parcial de ordem três). *Sejam* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função tal que* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*,* $x_i, x_j \in \{x, y\}$*, seja derivável com respeito a* $x_k \in \{x, y\}$*. A função derivada parcial de* $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ *com respeito a* x_k*,*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i} \overset{def}{=} \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right): & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial x_k}\left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x,y)\right) \end{array}$$

é denominada uma ***derivada parcial de ordem três*** *de* f*. Lemos* $\frac{\partial^3 f}{\partial x_k \partial x_j \partial x_i}$ *como "del três* f *del* x_k*, del* x_j*, del* x_i*".*

Para uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ temos, *in thesi*, oito derivadas parciais de ordem 3, quais sejam:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}$$

Exemplo 14. *Retomando a função do* ***Exemplo 11****:*

$$f(x,y) = x^2 \cdot y^3$$

para a qual calculamos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2y^3$$

temos:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(2y^3) = 6y^2$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial x}(2y^3) = 0$$

Também, como:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 6xy^2$$

tem-se:

$$\frac{\partial^3 f}{\partial y \partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y)\right) = \frac{\partial}{\partial y}(6xy^2) = 12xy$$

Definimos, recursivamente, o que entendemos pela derivada parcial de ordem superior como segue:

Definição 15 (derivadas parciais de ordem $k \geq 3$). *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e $U \subseteq R$ tais que a função:*

$$\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_n}^{\alpha_n}} : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \ \text{com } \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = k, x_{i_j} \in \{x, y\}$$

tem derivada parcial com respeito a $x_{i_{n+1}} \in \{x, y\}$. A ***derivada parcial de ordem*** *$k+1$ é a função:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^{k+1} f}{\partial x_{i_{n+1}} \partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}} : & U & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{\partial}{\partial x_{i_{n+1}}}\left(\dfrac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}^{\alpha_1} \cdots \partial x_{i_k}^{\alpha_k}}(x,y)\right) \end{array}$$

Definição 16 (classe de diferenciabilidade). *Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função. Se para $k \in \mathbb{N}$ tivermos* todas *as funções derivadas parciais de ordem k contínuas em $U \subseteq R$, dizemos que f* ***é uma função de classe*** *$\mathcal{C}^k(U;\mathbb{R})$.*

Exemplo 17. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

é (pelo menos) de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$. De fato, as funções:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial y}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

são ambas contínuas em $\mathbb{R}^2$. Também temos:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 1 \end{array}$$

todas contínuas em $\mathbb{R}^2$. Desta forma, como todas as derivadas parciais de ordem dois são funções contínuas em $\mathbb{R}^2$, $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$.

Observe que:

$$\mathcal{C}^k(U;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^{k-1}(U;\mathbb{R}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{C}^2(U;\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{C}^1(U;\mathbb{R})$$

No caso de *todas* as derivadas parciais de todas as ordens de uma função forem contínuas em $U \subseteq \mathbb{R}^2$, dizemos que a função é de classe $\mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R})$, ou seja:

$$\mathcal{C}^\infty(U;\mathbb{R}) = \bigcap_{k\in\mathbb{N}} \mathcal{C}^k(U;\mathbb{R})$$

Nos termos desta formulação, a função dada no **Exemplo 17** é de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^2;\mathbb{R})$, uma vez que todas as derivadas de ordens superiores a 3 serão constantes e iguais a zero, logo contínuas.

4 O Teorema de Schwarz

Vimos, em diversos pontos da seção anterior, casos em que as derivadas parciais mistas de ordem dois coincidiram. Conforme veremos, isto não ocorre por mera coincidência, mas sempre que as derivadas parciais mistas de ordem dois da função em apreço manifestarem continuidade naquele ponto.

O resultado apresentado na sequência tem inúmeras aplicações em diversas áreas da Matemática, como a **Teoria das Distribuições**, na **Teoria dos Grupos de Lie** (colchetes de Lie) e para demonstrar que a derivada exterior segunda de toda forma diferencial $\omega \in \Omega^k(M)$, onde M é uma variedade de classe $\mathcal{C}^\infty$, $d^2\omega$ é zero, ou seja, que toda forma diferencial exata é fechada.

Antes de enunciarmos condições para que a igualdade:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

valha, vamos recordar o **Teorema do Valor Médio**, visto no curso de Cálculo I:

> **Teorema 18 (Teorema do Valor Médio).** *Seja f uma função definida e contínua em um intervalo fechado $[a,b]$, derivável em $]a,b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a,b[$ tal que:*
>
> $$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. Ver pp. 21-23 da Agenda 11 de MAT 0111. □

Geometricamente, o **Teorema do Valor Médio** garante que existe uma tangente ao gráfico de f em algum ponto, $(c, f(c))$, paralela ao segmento de reta que une os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$.

Teorema 19 (Teorema de Schwarz). *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função tal que:*

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} : \quad R \subseteq \mathbb{R}^2 &\to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} : \quad R \subseteq \mathbb{R}^2 &\to \quad \mathbb{R} \\ (x, y) \quad &\mapsto \quad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)\right) \end{aligned}$$

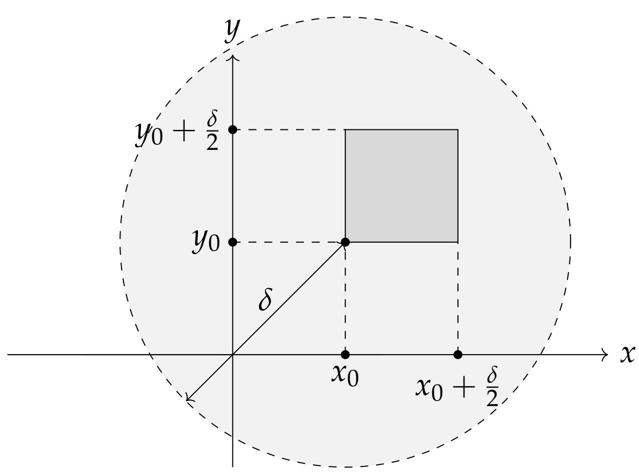
são contínuas em R. Então, para qualquer $(x, y) \in R$, tem-se:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Demonstração. Em sendo R um conjunto aberto, tem-se que $(x_0, y_0) \in R$ é ponto interior, de modo que existe algum $\delta > 0$ tal que:

$$B((x_0, y_0), \delta) \subseteq R$$

Desta forma, por exemplo, o retângulo $R = \left[x_0, x_0 + \frac{\delta}{2}\right] \times \left[y_0, y_0 + \frac{\delta}{2}\right]$ é um retângulo em $\mathbb{R}^2$. Fixemos $(x_0, y_0) \in R$ e consideremos os pontos $(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0), (x_0, y_0 + \Delta y), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$.



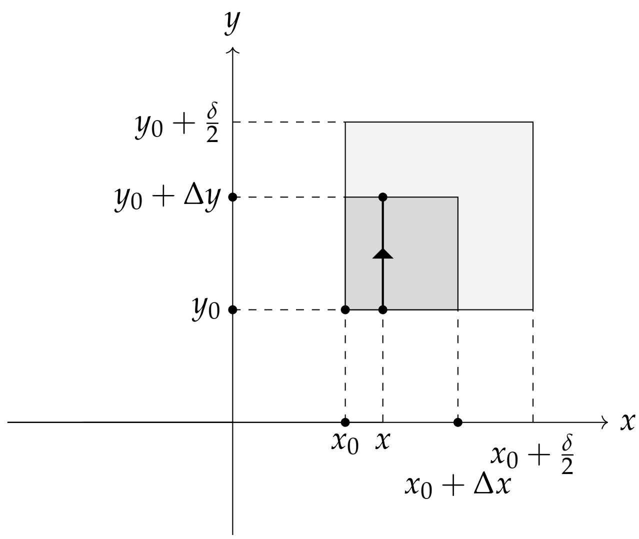
Seja:

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

Definimos a função:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & [x_0, x_0 + \Delta x] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0) \end{array},$$

que mede, para cada x entre x_0 e $x_0 + \Delta x$, qual foi a variação de f ao nos deslocarmos de $f(x, y_0)$ para $f(x, y_0 + \Delta y)$.



Podemos escrever:

$$\Delta = \overbrace{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)}^{=\Phi(x_0 + \Delta x)} - \overbrace{[f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]}^{=\Phi(x_0)} = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0).$$

Aplicando o **Teorema do Valor Médio** à função Φ, segue que existe $\xi \in]x_0, x_0 + \Delta x[$ tal que:

$$\Delta = \Phi(x_0 + \Delta x) - \Phi(x_0) = \Phi'(\xi) \cdot \Delta x = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0)\right] \cdot \Delta x$$

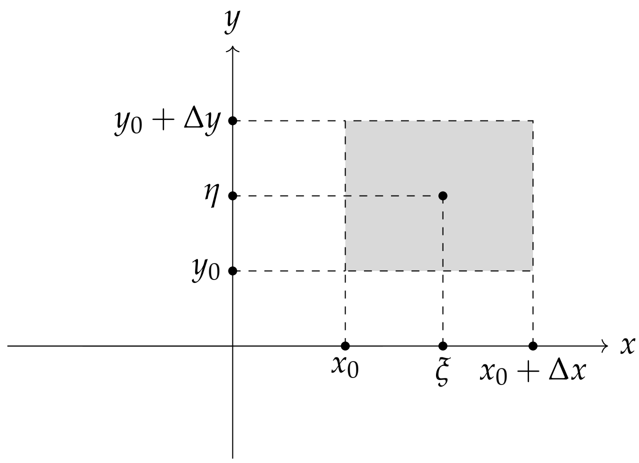
Como admitimos que a segunda derivada $\partial^2 f / \partial x \partial y$ existe, podemos aplicar novamente o **Teorema do Valor Médio** a:

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, -): & [y_0, y_0 + \Delta y] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(\xi, y) \end{array}$$

de modo a garantir a existência de um $\eta \in]y_0, y_0 + \Delta y[$ tal que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\xi, y_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot \Delta y$$

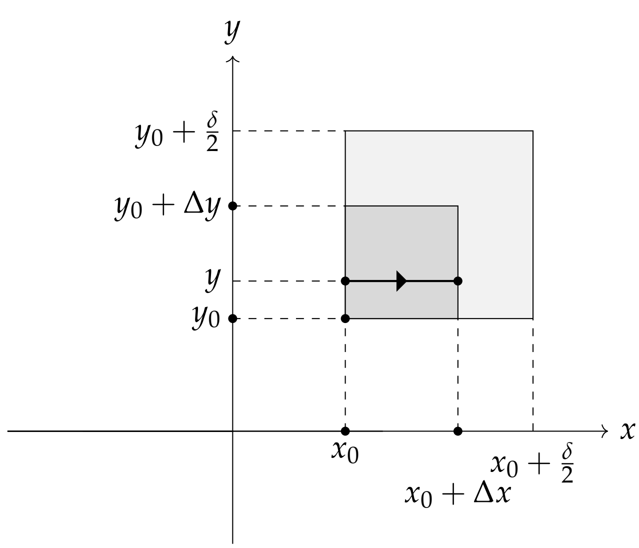
Assim, segue que $\Delta = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) \cdot \Delta y\right] \cdot \Delta x$.



Exatamente da mesma forma, podemos a partir da função:

$$\begin{array}{rccc} \Psi: & [y_0, y_0 + \Delta y] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y) \end{array}$$

que mede, para cada y entre y_0 e $y_0 + \Delta y$, qual foi a variação de f ao nos deslocarmos de $f(x_0, y)$ para $f(x_0 + \Delta x, y)$.



representar Δ por:

$$\Delta = \Psi(y_0 + \Delta y) - \Psi(y_0)$$

Aplicando o **Teorema do Valor Médio** duas vezes obtemos $\gamma \in]x_0, x_0 + \Delta x[, \theta \in]y_0, y_0 + \Delta y[$ tais que:

$$\Delta = \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\gamma, \theta) \cdot \Delta x\right] \cdot \Delta y$$

Igualando as duas expressões obtidas para Δ, temos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\gamma, \theta)$$

Observando que[1]:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} (\xi, \eta) = (x_0, y_0) \text{ e } \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} (\gamma, \theta) = (x_0, y_0)$$

da continuidade das derivadas mistas de ordem 2 (hipótese) segue que:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\xi, \eta) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(\gamma, \theta) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)$$

Como $(x_0, y_0) \in R$ é completamente arbitrário, o raciocínio exposto acima pode ser replicado para um $(x, y) \in R$ *qualquer*, de modo que:

$$(\forall (x, y) \in R) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)\right).$$

$\square$

[1]Para justificar este passo de forma precisa, construímos uma função, $\xi :]0, \delta/2[\to \mathbb{R}$ que, a cada $\Delta x \in]0, \delta/2[$ associa um único elemento $\xi(\Delta x) \in]x_0, x_0 + \Delta x[$ tal que $\Delta = \Phi'(\xi(\Delta x)) \cdot \Delta x$ (o que pode ser feito mediante o **Axioma da Escolha**), e em seguida observamos que como tem-se $x_0 < \xi(\Delta x) < x_0 + \Delta x$ para todo Δx, vale pelo **Teorema do Confronto**, $\lim_{\Delta x \to 0} \xi = x_0$. Aplica-se o mesmo raciocínio para construir uma função $\eta : [0, \delta/2] \to \mathbb{R}$ que associa, para cada $\Delta y \in]0, \delta/2[$ um único elemento $\eta(\Delta y)$ tal que $y_0 < \eta(\Delta y) < y_0 + \Delta y$ e $\Delta = \Psi(\eta(\Delta y)) \cdot \Delta y$. Novamente, pelo **Teorema do Confronto**, como para qualquer que seja Δy temos $y_0 < \eta(\Delta y) < y_0 + \Delta y$, tem-se $\lim_{\Delta y \to 0} \eta = 0$. Construímos, deste modo, uma função:

$$\begin{array}{rccc} (\xi, \eta) : & [0, \delta/2] \times [0, \delta/2] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (\Delta x, \Delta y) & \mapsto & (\xi(\Delta x), \eta(\Delta y)) \end{array}$$

tal que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} (\xi(\Delta x), \eta(\Delta y)) = (x_0, y_0)$$

Repete-se o argumento para γ e θ.

Pequeno Comentário Histórico: O **Teorema de Clairaut-Schwarz** tem uma longa história. Nicolau Bernoulli já assumia o resultado como verdadeiro por volta de 1721, mas Euler foi o primeiro a fornecer uma prova. Outras demonstrações foram dadas por Clairaut (1740), Lagrange (1797), Cauchy (1823) e muitos outros no século XIX. Nenhuma destas provas, no entanto, estava inteiramente correta (por exemplo, Clairaut assumia (falsamente) que todas as integrais definidas podiam ser derivadas sob o sinal de integração). Em 1867, Ernst Lindelöf publicou um artigo criticando detalhadamente todas as demonstrações que ele havia visto até então. Finalmente, seis anos depois, Hermann Schwarz (em 1873) deu a primeira demonstração satisfatória. A isto seguiram-se sucessivos refinamentos, enfraquecendo as hipóteses do teorema em diversos sentidos, feitos por Dini, Jordan, Peano entre outros.

5 Diferenciabilidade de Funções de Duas Variáveis Reais a Valores Reais

Motivação: Seja $f :]a,b[\to \mathbb{R}$ uma função e $x_o \in]a,b[$. Dizemos que f **é diferenciável em** x_0 se o limite:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

existe, isto é, se existe $c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = c,$$

ou, equivalentemente,

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h}{h} = 0,$$

Outra formulação muito comum é dizer que f é diferenciável em x_0 se, e somente se, definindo:

$$r(h) = f(x_0 + h) - f(x_0) - c \cdot h$$

tivermos:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + c \cdot h + r(h) \text{ com } \lim_{h \to 0} \frac{r(h)}{h} = 0,$$

e dizemos que c é **a derivada de** f **em** x_0, a qual denotamos por $f'(x_0)$. Isto quer dizer que, em uma vizinhança de x_0, digamos $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ para algum $\delta > 0$, a função:

$$\begin{array}{rccc} \Delta f: &]-\delta,\delta[& \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f(x_0+h)-f(x_0) \end{array}$$

possui "**uma boa aproximação linear**", dada por:

$$\begin{array}{rccc} df(x_0): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f'(x_0)\cdot h \end{array}$$

Observe que $df(x_0)$ (função) fica completamente determinada pelo valor de $f'(x_0)$, motivo pelo qual, em Cálculo I, identificamos a diferencial (função linear) com a derivada da função no ponto (um número real).

Nosso propósito, daqui em diante, será estender estes conceitos para funções:

$$f: R \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, n \geq 2$$

Veremos, dentre outras coisas, que para funções com duas ou mais variáveis, os conceitos de "ter derivada" (com respeito a alguma variável) e de "ser diferenciável" em um ponto são distintos.

6 Diferenciabilidade

Grosso modo, pode-se dizer que a "diferenciabilidade" é a propriedade que a função incremento de uma certa função manifesta em um ponto de "poder ser bem aproximada" por uma função linear ($\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$). Convém, portanto, apresentar alguns conceitos básicos sobre funções lineares.

Antes de prosseguirmos, recordemos, da Álgebra Linear, a seguinte:

Definição 20 (funcional linear). *Seja V um $\mathbb{R}-$espaço vetorial. Um* ***funcional linear*** *sobre V é uma função:*

$$f: V \to \mathbb{R}$$

tal que:

(a) $(\forall \vec{u} \in V)(\forall \vec{v} \in V)(f(\vec{u}+\vec{v}) = f(\vec{u}) + f(\vec{v}))$

(b) $(\forall \alpha \in \mathbb{R})(\forall \vec{v} \in V)(f(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot f(\vec{v}))$

Funcionais lineares têm um comportamento muito mais simples do que funções não lineares, em geral. A diferencial de uma função de duas (ou três) variáveis a valores reais é um funcional linear que aproxima, do melhor modo possível, a função incremento, que definimos na sequência.

Recorde que uma função $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é linear se, e somente se, existirem números reais $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2)(\varphi(x,y) = a \cdot x + b \cdot y)$$

De fato, se tais constantes existirem, temos, para quaisquer $(x,y),(z,w) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi((x,y) + (z,w)) = \varphi(x+z, y+w) = a \cdot (x+z) + b \cdot (y+w) =$$

$$= a \cdot x + b \cdot y + a \cdot z + b \cdot w = \varphi(x,y) + \varphi(z,w),$$

e para qualquer $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(\alpha \cdot (x,y)) = \varphi(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = a \cdot (\alpha \cdot x) + b \cdot (\alpha \cdot y) =$$

$$= \alpha \cdot (a \cdot x) + \alpha \cdot (b \cdot y) = \alpha \cdot (a \cdot x + b \cdot y) = \alpha \cdot \varphi(x,y),$$

de modo que φ é um funcional linear. Reciprocamente, se $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ for um funcional linear, temos as constantes:

$$a = \varphi(1,0) \ \text{ e } \ b = \varphi(0,1)$$

que são tais que para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\varphi(x,y) = \varphi(x \cdot (1,0) + y \cdot (0,1)) \overset{\overset{\text{linearidade}}{\uparrow}}{=} x \cdot \varphi(1,0) + y \cdot \varphi(0,1) = a \cdot x + b \cdot y$$

Analogamente, no caso de três variáveis reais, conclui-se que uma função $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é um funcional linear se, e somente se, existirem $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que para todo $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tenha-se:

$$\varphi(x,y,z) = a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z$$

Definição 21 (função de duas variáveis reais a valores reais diferenciável em um ponto). *Sejam* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis reais a valores reais e* $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$. *Dizemos que* f ***é diferenciável em*** $(x_0, y_0) \in R$ *se, e somente se, existir um* $\delta > 0$ *tal que a função incremento:*

$$\begin{array}{rccc} \Delta f(x_0, y_0): & B((0,0), \delta) \subseteq \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (\Delta x, \Delta y) & \mapsto & f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \end{array}$$

onde $\delta > 0$ *é tal que* $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq R$ *(um tal* $\delta > 0$ *sempre existe, uma vez que* (x_0, y_0) *é ponto interior de* R*), possuir uma boa aproximação por um funcional linear em uma vizinhança de* (x_0, y_0). *Mais precisamente, dizemos que* f *é diferenciável em* $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$ *quando existir um funcional linear,* $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que, para todo* $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\|(\Delta x, \Delta y)\| < \delta$ *tivermos:*

$$\Delta f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = \varphi(\Delta x, \Delta y) + r(\Delta x, \Delta y) \qquad (1)$$

com

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Uma vez que todo funcional linear de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$ tem a forma $\varphi(\Delta x, \Delta y) = a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y$, a **Definição 21** é equivalente à seguinte formulação:

Definição 22. *Sejam* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de duas variáveis reais a valores reais e* $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$. *Dizemos que* f ***é diferenciável em*** $(x_0, y_0) \in R$ *se, e somente se, existirem um* $\delta > 0$ *e constantes* $a, b \in \mathbb{R}$ *tais que para qualquer* $(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2$ *tal que* $\|(\Delta x, \Delta y)\| < \delta$, *vale:*

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) = f(x_0, y_0) + a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y + r(\Delta x, \Delta y)$$

com:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Teorema 23. *Se* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$, *então* f *possui derivadas parciais em* (x_0, y_0).

Demonstração. Como f é diferenciável, existem constantes a e b tais que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0 \tag{2}$$

onde $r(\Delta x,\Delta y) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - a\cdot\Delta x - b\cdot\Delta y$.

Segue de (2) que vale, em particular:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{r(\Delta x,0)}{\|(\Delta x,0)\|} = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0) - a\cdot\Delta x}{|\Delta x|} = 0$$

Daí,

$$\lim_{\Delta x\to 0_+} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0) - a\cdot\Delta x}{|\Delta x|} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} - a = 0,$$

e:

$$\lim_{\Delta x\to 0_-} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0) - a\cdot\Delta x}{|\Delta x|} = \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{-\Delta x} + a = 0,$$

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x\to 0_-} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = a$$

Tem-se, assim:

$$\therefore \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(x_0+\Delta x,y_0) - f(x_0,y_0)}{\Delta x} = a$$

ou seja:

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0).$$

Também segue de (2) que vale, em particular:

$$\lim_{\Delta y\to 0} \frac{r(0,\Delta y)}{\|(0,\Delta y)\|} = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x_0,y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - b\cdot\Delta y}{|\Delta y|} = 0$$

Daí, de modo análogo, concluímos que:

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0).$$

$\square$

Desta forma, se $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$, então vale:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

e as constantes a e b serão, necessariamente, as derivadas parciais em (x_0, y_0).

Observação 24. *O **Teorema 23**, em sua forma contrapositiva, nos garante que se alguma das derivadas parciais de uma função não existir em um ponto, então a função não será diferenciável neste ponto.*

Em virtude da **Definição 21** e da observação feita acima, para provar que uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$, é suficiente provar que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ e que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0.$$

Exemplo 25. *A função constante igual a $k \in \mathbb{R}$:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & k \end{array}$$

é diferenciável em qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(k) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(k) = 0$$

e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0) - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{k - k}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0.$$

Exemplo 26. *A função linear:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a \cdot x + b \cdot y \end{array}$$

é diferenciável em qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. De fato, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(a \cdot x + b \cdot y) = a$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(a \cdot x + b \cdot y) = b$$

e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta x) - f(x_0, y_0) - a \cdot \Delta x - b \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$
$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{a \cdot (x_0 + \Delta x) + b \cdot (y_0 + \Delta y) - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 - a \cdot \Delta x - b \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$
$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{a \cdot x_0 + \cancel{a \cdot \Delta x} + b \cdot y_0 + \cancel{b \cdot \Delta y} - a \cdot x_0 - b \cdot y_0 - \cancel{a \cdot \Delta x} - \cancel{b \cdot \Delta y}}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Exemplo 27. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

é diferenciável em qualquer ponto, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$*. De fato, temos:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot y)\Big|_{(x,y)=(x_0,y_0)} = y_0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot y) = x_0$$

e:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - a \cdot \Delta x - b \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$
$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{(x_0 + \Delta x) \cdot (y_0 + \Delta y) - x_0 \cdot y_0 - y_0 \cdot \Delta x - x_0 \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$
$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\cancel{x_0 \cdot y_0} + \cancel{x_0 \cdot \Delta y} + \cancel{y_0 \cdot \Delta x} + \Delta x \cdot \Delta y - \cancel{x_0 \cdot y_0} - \cancel{y_0 \cdot \Delta x} - \cancel{x_0 \cdot \Delta y}}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$
$$= \lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

Uma vez que, para qualquer $(\Delta x, \Delta y) \neq (0, 0)$ *temos:*

$$|\Delta x| = \sqrt{\Delta x^2} \leq \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = \|(\Delta x, \Delta y)\|,$$

vale:

$$(\forall(\Delta x, \Delta y) \neq (0,0))\left(\left|\frac{\Delta x}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}\right| \leq 1\right)$$

Como $\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \Delta y = 0$*, tem-se:*

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{\Delta x \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0,$$

ou seja, f *é diferenciável em qualquer ponto* (x_0, y_0)*.*

Teorema 28. *Sejam* $f, g : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *duas funções diferenciáveis em* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$*. Então:*

(a) $f + g$ *é diferenciável em* (x_0, y_0)*;*

(b) $f - g$ *é diferenciável em* (x_0, y_0)*;*

(c) $f \cdot g$ *é diferenciável em* (x_0, y_0)*;*

(d) Se $g(x_0, y_0) \neq 0$*, então* $\frac{1}{f}$ *é diferenciável em* (x_0, y_0)*;*

Corolário 29. *Qualquer função polinomial de duas (ou mais) variáveis é diferenciável em qualquer ponto de seu domínio.*

Teorema 30. *Se* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$*, então* f *é contínua em* (x_0, y_0)*.*

Demonstração. Sabemos que se f é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$, então existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - (a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Como

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - (a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y) =$$

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y)\to(0,0)} \|(\Delta x, \Delta y)\| \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) - (a \cdot \Delta x + b \cdot \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

e:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} a\cdot\Delta x + b\cdot\Delta y = 0,$$

conclui-se que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) =$$

$$= \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} [f(x_0,y_0) + a\cdot\Delta x + b\cdot\Delta y + r(\Delta x,\Delta y)] = f(x_0,y_0),$$

e portanto que f é contínua em (x_0,y_0).

$\square$

O **Teorema 30** é particularmente útil em sua forma contrapositiva:

> Se $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é descontínua em $(x_0,y_0) \in \operatorname{int}.(R)$, então f não é diferenciável em (x_0,y_0).

Exemplo 31. *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, & se\ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & se\ (x,y)=(0,0) \end{cases} \end{array}$$

*Procederemos de modo análogo ao que fizemos no **Exemplo 93** da* Agenda 5*. Consideremos os conjuntos:*

$$S_1 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y = x^2\}$$

$$S_2 = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x = 0\}$$

Temos:

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_1}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2\cdot x^2}{x^4+(x^2)^2} = \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in S_2}} \frac{x^2y}{x^4+y^2} = \lim_{y\to 0}\frac{x^2\cdot 0}{x^4+(0)^2} = \lim_{y\to 0} 0 = 0$$

de modo que que:

$$\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^4+y^2}$$

de modo que f não é contínua – e, a fortiori *– não é diferenciável em $(0,0)$.*

Atenção: Embora diferenciabilidade em um ponto implique continuidade nesse, a recíproca é falsa, ou seja, existem funções que, apesar de contínuas em um certo ponto, não são diferenciáveis ali. Veja o seguinte:

Exemplo 32. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & |x|+|y| \end{array}$$

é contínua em $(0,0)$, mas não é diferenciável em $(0,0)$.

Justificativa: De fato, temos:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x|+|y| = \lim_{(x,y)\to(0,0)} |x| + \lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = |0|+|0| = f(0,0),$$

de modo que f é contínua em $(0,0)$. No entanto, se considerarmos o conjunto:

$$S = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y=0\}$$

teremos:

$$f\restriction_S (x,y) = |x|,$$

de modo que não existe $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$.

Atenção: A mera existência das derivadas parciais de uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em um ponto $(x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(R)$, por sua vez, não garante a diferenciabilidade de f em (x_0, y_0). Vimos, no **Exemplo 31**, que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^2}, \text{ se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, \text{ se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$ (porque não é, sequer, contínua neste ponto). No entanto, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} 0 = 0$$

Assim, apesar de existirem as derivadas parciais em $(0,0)$, a função não é diferenciável no ponto $(0,0)$.

Damos, na sequência, uma definição precisa da diferencial de uma função em um ponto.

Definição 33. *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis reais a valores reais com $R \subseteq \mathbb{R}^2$, diferenciável em $(x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(R)$. O funcional linear:*

$$\begin{array}{rccc} df(x_0,y_0): & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (\Delta x, \Delta y) & \mapsto & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \cdot \Delta x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \cdot \Delta y \end{array}$$

*é a **diferencial de f em** (x_0, y_0).*

Observação 34. *O conjunto de todos os funcionais lineares de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$, denotado por $(\mathbb{R}^2)^*$ ou por $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, tem uma estrutura natural de espaço vetorial. Podemos definir a "soma" de dois funcionais lineares, $f, g \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$:*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & f(u,v) + g(u,v) \end{array}$$

e o produto de um funcional linear por um número real, α:

$$\begin{array}{rccc} \alpha \cdot f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & \alpha \cdot f(u,v) \end{array}$$

O espaço vetorial $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tem dimensão dois, de modo que admite uma base com exatamente dois elementos. Costumamos denotar os elementos desta base por:

$$\begin{array}{rccc} dx: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} dy: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y \end{array}$$

Assim, temos uma base $\{dx, dy\}$ para $\mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$.

Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$. Uma vez que $df(x_0, y_0) \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$, podemos expressar $df(x_0, y_0)$ como uma combinação linear de dx e dy, ou seja, existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que:

$$df(x_0, y_0) = a \cdot dx + b \cdot dy$$

Calculando $df(x_0, y_0)$ em $(1, 0)$, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 0 = df(x_0, y_0) \cdot (1, 0) = a \cdot dx(1, 0) + b \cdot dy(1, 0) = a + 0 = a$$

ou seja,

$$a = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Calculando $df(x_0, y_0)$ em $(0, 1)$, obtemos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot 0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot 1 = df(x_0, y_0) \cdot (0, 1) = a \cdot dx(0, 1) + b \cdot dy(0, 1) = 0 + b = b$$

ou seja,

$$b = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Assim, pode-se representar a diferencial de f em (x_0, y_0) como:

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$$

Vimos que $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $(x_0, y_0) \in \text{int}.(R)$ se, e somente se:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)} \frac{\Delta f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) - df(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

ou seja, se dado qualquer $\varepsilon > 0$ for possível exibir $\delta > 0$ tal que:

$$0 < \|(\Delta x, \Delta y)\| < \delta \Rightarrow |\Delta f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y) - df(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)| < \varepsilon \cdot \|(\Delta x, \Delta y)\|$$

Podemos interpretar o limite acima da seguinte forma: para valores "pequenos" de $\|(\Delta x, \Delta y)\|$, $df(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$ constitui uma boa aproximação para $\Delta f(x_0, y_0) \cdot (\Delta x, \Delta y)$. Neste sentido, escrevemos $\Delta f(x_0, y_0) \approx df(x_0, y_0)$.

Teorema 35 (Teorema do Incremento). *Seja $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função cujas derivadas parciais de primeira ordem, $\partial f/\partial x$ e $\partial f/\partial y$ estejam definidas em uma região aberta, $U \subseteq R$, que contenha o ponto (x_0, y_0), e sejam ambas contínuas em (x_0, y_0). Então a variação:*

$$\Delta z = \Delta f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

no valor de f que resulta do movimento de (x_0, y_0) para $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) \in U$ satisfaz uma equação da forma:

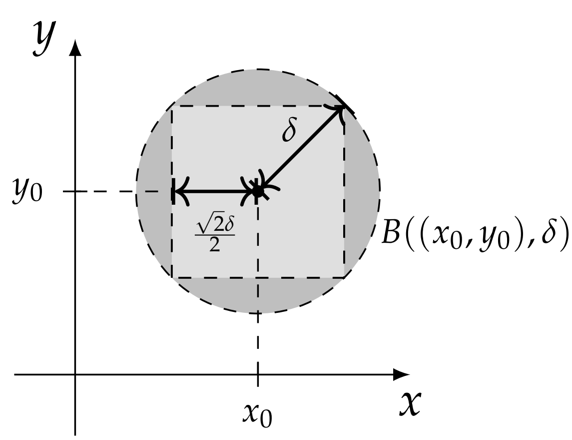
$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

na qual:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0 \;\; e \;\; \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

Demonstração. Como $(x_0, y_0) \in U$ e U é aberto, existe $\delta > 0$ tal que $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq U$. Podemos considerar, dentro de $B((x_0, y_0), \delta) \subseteq U$, o interior do quadrado:

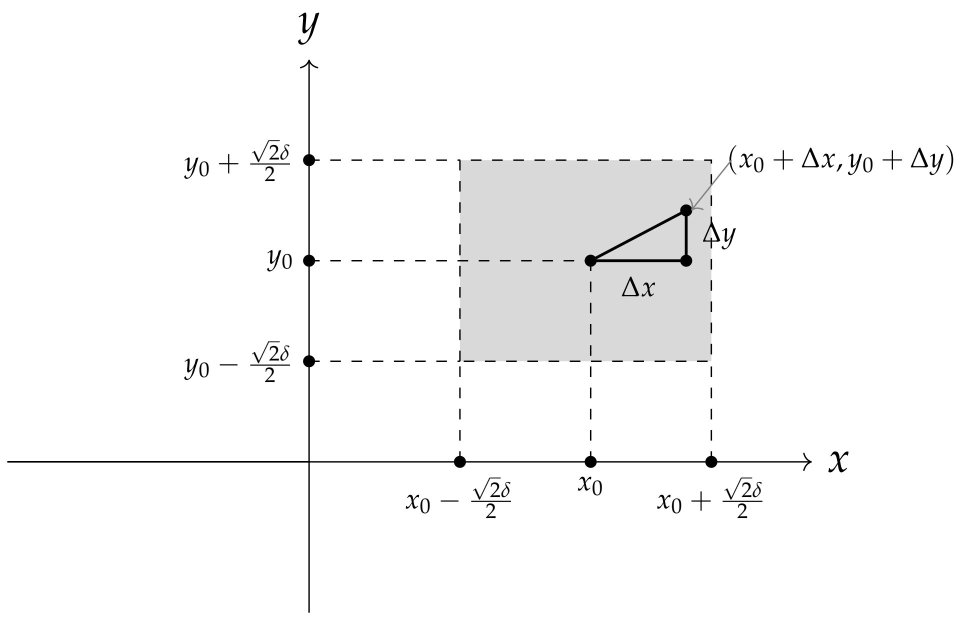
$$Q = \left]x_0 - \frac{\sqrt{2} \cdot \delta}{2}, x_0 + \frac{\sqrt{2} \cdot \delta}{2}\right[\times \left]y_0 - \frac{\sqrt{2} \cdot \delta}{2}, y_0 + \frac{\sqrt{2} \cdot \delta}{2}\right[$$



Se tomarmos Δx e Δy tais que $|\Delta x|, |\Delta y| < \frac{\sqrt{2}\delta}{2}$, o segmento de reta que une (x_0, y_0) a $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, que denotamos por $[(x_0, y_0), (x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)]$, estará inteiramente dentro da região Q.

Definimos:

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) \text{ e } \Delta z_2 = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$



e consideramos a função:

$$\begin{array}{rccc} F: & [x_0, x_0 + \Delta x] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x, y_0) \end{array}$$

que é uma função diferenciável – e portanto contínua – de x, cuja derivada é dada por:

$$F'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0)$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe um valor $c \in]x_0, x_0 + \Delta x[$ tal que:

$$F(x_0 + \Delta x) - F(x_0) = F'(c) \cdot \Delta x,$$

ou seja,

$$\Delta z_1 = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = F'(c) \cdot \Delta x = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) \cdot \Delta x$$

Similarmente,

$$\begin{array}{rccc} G: & [y_0, y_0+\Delta y] & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x_0+\Delta x, y) \end{array}$$

é uma função diferenciável – e portanto contínua – de y, cuja derivada é dada por:

$$G'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y)$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe um valor $d \in]y_0, y_0+\Delta y[$ tal que:

$$G(y_0+\Delta y) - G(y_0) = G'(d)\cdot\Delta y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, d)\cdot\Delta y$$

Como $c \in]x_0, x_0+\Delta x[$ e $d \in]y_0, y_0+\Delta y[$, segue que:

$$\lim_{\Delta x\to 0} c = x_0 \text{ e } \lim_{\Delta y\to 0} d = y_0$$

ou seja,

$$\Delta z_2 = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0+\Delta x, y_0) = G'(d)\cdot\Delta y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, d)\cdot\Delta y$$

Como, por hipótese, as derivadas parciais de primeira ordem de f são contínuas em (x_0, y_0), se definimos:

$$\varepsilon_1(c) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

$$\varepsilon_2(d) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, d) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

teremos:

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon_1 = 0 \text{ e } \lim_{\Delta y\to 0} \varepsilon_2 = 0$$

Por fim,

$$\begin{aligned}\Delta z = \Delta z_1 + \Delta z_2 &= \frac{\partial f}{\partial x}(c, y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, d)\cdot\Delta y = \\ &\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + \varepsilon_1\right]\cdot\Delta x + \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon_2\right]\cdot\Delta y = \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot\Delta y + \varepsilon_1\cdot\Delta x + \varepsilon_2\cdot\Delta y\end{aligned}$$

com:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0 \text{ e } \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

□

6.1 Linearização do Incremento de uma Função Diferenciável

Suponha que queiramos substituir $z = f(x, y)$ por uma função que seja mais simples de se trabalhar.

Queremos fazer esta substituição no entorno de um ponto (x_0, y_0), no qual f é diferenciável e no qual conhecemos $f(x_0, y_0)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$.

Se tivermos continuidade das derivadas de primeira ordem em (x_0, y_0), então pelo **Teorema do Incremento** teremos a seguinte igualdade:

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y + \varepsilon_1 \cdot \Delta x + \varepsilon_2 \cdot \Delta y,$$

na qual:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \varepsilon_1 = 0 \text{e} \lim_{\Delta y \to 0} \varepsilon_2 = 0$$

Se os valores de Δx e de Δy forem "pequenos", poderemos escrever:

$$\Delta f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y = df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

Nestes termos, a função:

$$df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

é a **linearização do incremento de f em** (x_0, y_0). Assim, para valores "pequenos" de Δx e de Δy, temos:

$$\Delta f(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \approx df(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y),$$

sendo a aproximação tanto melhor quanto menores forem $|\Delta x|$ e $|\Delta y|$.

Exemplo 36. *Se $z = f(x, y) = 3x^2 - xy$, estimar a variação do valor de f conforme (x, y) varia de $(1, 2)$ para $(1.01, 1.98)$.*

Solução: Neste caso, temos $\Delta x = 1.01 - 1 = 0.01$ e $\Delta y = 1.98 - 2 = -0.02$, ou seja, valores "pequenos" de Δx e de Δy.

A função f, por ser polinomial, é diferenciável em $\mathbb{R}^2$, e em particular em $(1,2)$, de modo que podemos linearizar a função incremento.

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - xy) = 6x - y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - xy) = -x,$$

de modo que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 6 \cdot 1 - 2 = 4 \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = -1$$

Assim,

$$df(1,2)(\Delta x, \Delta y) = 4 \cdot \Delta x - 1 \cdot \Delta y$$

e portanto:

$$df(1,2)(0.01, -0.02) = 4 \cdot 0.01 - 1 \cdot (-0.02) = 0.06$$

Assim, temos:

$$\Delta f(1,2)(0.01, -0.02) \approx 0.06$$

Vamos comparar a estimativa com a variação verdadeira: temos $f(1,2) = 3 \cdot 1^2 - 1 \cdot 2 = 1$ e $f(1.01, 1.98) = 1.0605$, e portanto o erro cometido nesta aproximação foi:

$$|\Delta f(1,2)(0.01, -0.02) - df(1,2) \cdot (0.01, -0.02)| = 0.0605 - 0.06 = 0.0005.$$

7 Condição Suficiente para Diferenciabilidade

Teorema 37. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $(x_0, y_0) \in U$ e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tais que existe $\delta > 0$ tal que as funções:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} : B((x_0, y_0), \delta) \to \mathbb{R}$$

são contínuas em (x_0, y_0). Sob tais condições, f é diferenciável em (x_0, y_0).

Demonstração. Devemos mostrar que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)} \frac{f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = 0$$

Sejam Δx e Δy tais que $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) \in B((x_0,y_0),\delta)$. Temos:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)$$

Definimos a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} G: & [x_0, x_0+\delta[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x, y_0+\Delta y) \end{array}$$

Observe que G é contínua em $[x_0, x_0+\delta[$, e que:

$$G'(x) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+\Delta y)$$

também é contínua, por hipótese.

Podemos, portanto, aplicar o **Teorema do Valor Médio** a G, de modo que existirá algum $\bar{x}$ entre x_0 e $x_0+\Delta x$ tal que:

$$G(x_0+\Delta x) - G(x_0) = G'(\bar{x})\cdot \Delta x$$

isto é:

$$f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\Delta y)\cdot \Delta x$$

Analogamente, definimos a função:

$$\begin{array}{rccc} F: & [y_0, y_0+\delta[& \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f(x_0, y) \end{array}$$

Observe que F é contínua em $[y_0, y_0+\delta[$, e que:

$$F'(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y)$$

também é contínua, por hipótese.

Podemos, portanto, aplicar o **Teorema do Valor Médio** a F, de modo que existirá algum $\bar{y}$ entre y_0 e $y_0+\Delta y$ tal que:

$$F(y_0 + \Delta y) - F(y_0) = F'(\bar{y}) \cdot \Delta y$$

isto é:

$$f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = F'(\bar{y}) \cdot \Delta y = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) \cdot \Delta y$$

Assim,

$$r(\Delta x, \Delta y) =$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) \cdot \Delta y - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \Delta x - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \Delta y$$

o que fornece:

$$\frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right) \cdot \frac{\Delta x}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} +$$

$$+ \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right) \cdot \frac{\Delta y}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Portanto:

$$\left| \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} \right| \leq$$

$$\leq \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} +$$

$$+ \left| \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, \bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right| \cdot \frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}}$$

Como $\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1$ e $\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} \leq 1$, obtemos:

$$\left|\frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}\right| \leq$$

$$= \overbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right|}^{(*)} +$$

$$+ \underbrace{\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right|}_{(**)}$$

Como, por hipótese, $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y_0+\Delta y)$ é contínua em (x_0, y_0), tem-se:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\Delta y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$$

e portanto:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right| = 0$$

e como, por hipótese, $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0+\Delta x, y)$ é contínua em (x_0, y_0), tem-se:

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$$

e portanto:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,\bar{y}) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right| = 0$$

Segue, portanto, que:

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\left|\frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}\right| = 0,$$

e portanto:

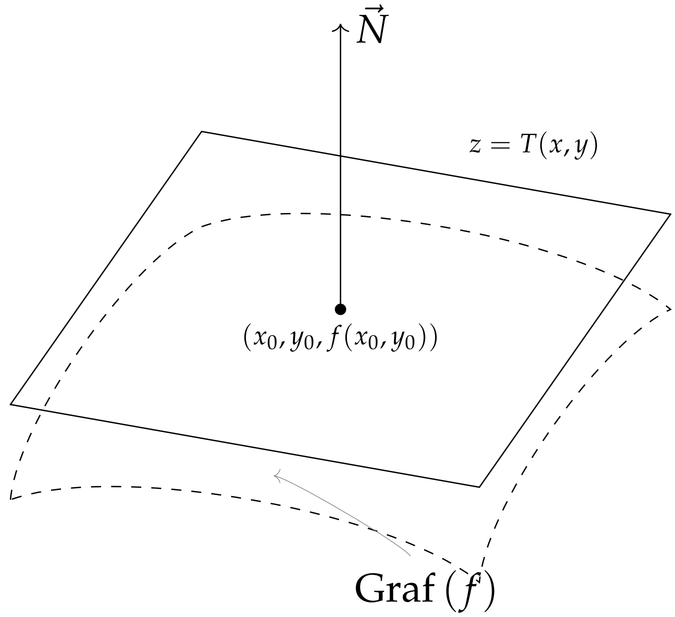
$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{r(\Delta x,\Delta y)}{\|(\Delta x,\Delta y)\|} = 0,$$

de modo que f é diferenciável em (x_0, y_0). $\square$

Definição 38 (plano tangente). *Seja* $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função diferenciável no ponto* $(x_0, y_0) \in \operatorname{int}.(R)$*. O plano de equação:*

$$z = T(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \tag{3}$$

é chamado ***plano tangente*** *ao gráfico da função* f *no ponto* $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$*.*



A equação (3) pode ser escrita, em notação de produto escalar, da seguinte forma:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)\cdot(x-x_0, y-y_0, z-f(x_0,y_0)) = 0$$

Segue daí que o plano tangente ao gráfico de f em $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$ é perpendicular à direção do vetor:

$$\vec{N}(x_0,y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0), -1\right)$$

Exemplo 39. *Determinar a equação do plano tangente e da reta normal ao gráfico da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & 1-x^2-y^2 \end{array}$$

no ponto $(1, 1, -1)$.

Solução: Por ser uma função polinomial, f é diferenciável em qualquer ponto de seu domínio, e portanto em $(1,1,-1)$.

Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial}{\partial x}(1-x^2-y^2)\Big|_{(1,1)} = -2x\Big|_{(1,1)} = -2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial}{\partial y}(1-x^2-y^2)\Big|_{(1,1)} = -2y\Big|_{(1,1)} = -2$$

$$f(1,1) = 1-1^2-1^1 = -1$$

de modo que a equação do plano tangente ao gráfico no ponto $(1,1,-1)$ é:

$$z = -1-2\cdot(x-1)-2\cdot(y-1)$$

$$z = -2x-2y+3$$

O vetor normal à superfície em $(1,1,-1)$ é:

$$\vec{N}(1,1) = (-2,-2,-1)$$

A reta normal será aquela paralela a $\vec{N}(1,1)$ que contém o ponto $(-2,-2,-1)$:

$$(x,y,z) = (1,1,-1)+t\cdot(-2,-2,-1)$$

Observe que só definimos plano tangente ao gráfico de uma função f em um ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ no caso em que f é diferenciável em (x_0,y_0). Se f não é diferenciável em (x_0,y_0), mas admite derivadas parciais neste ponto, então o plano de equação (3) existe, mas não é, necessariamente, tangente ao gráfico, conforme ilustra o seguinte:

Exemplo 40. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^{\frac{1}{3}}\cdot y^{\frac{1}{3}} \end{array}$$

admite derivadas parciais em $(0,0)$, mas não é diferenciável neste ponto.

Justificativa: De fato, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x} = 0$$

e:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, 0 + \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0$$

No entanto:

$$r(\Delta x, \Delta y) = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0) - 0 \cdot \Delta x - 0 \cdot \Delta y = (\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\Delta y)^{\frac{1}{3}}$$

de modo que:

$$\frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \frac{(\Delta x)^{\frac{1}{3}} \cdot (\Delta y)^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}}$$

Note que, pelo conjunto $S = \{(\Delta x, \Delta y) \in \mathbb{R}^2 \mid \Delta x = \Delta y\}$

$$\lim_{\substack{(\Delta x, \Delta y) \to (0,0) \\ (\Delta x, \Delta y) \in S}} \frac{r(\Delta x, \Delta y)}{\|(\Delta x, \Delta y)\|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{r(\Delta x, \Delta x)}{\|(\Delta x, \Delta x)\|} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\Delta x)^{\frac{2}{3}}}{(2 \cdot (\Delta x)^2)^{\frac{1}{2}}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\sqrt{2} \cdot |\Delta x|^{\frac{1}{3}}} = \infty$$

segue que f não é diferenciável em $(0,0)$.

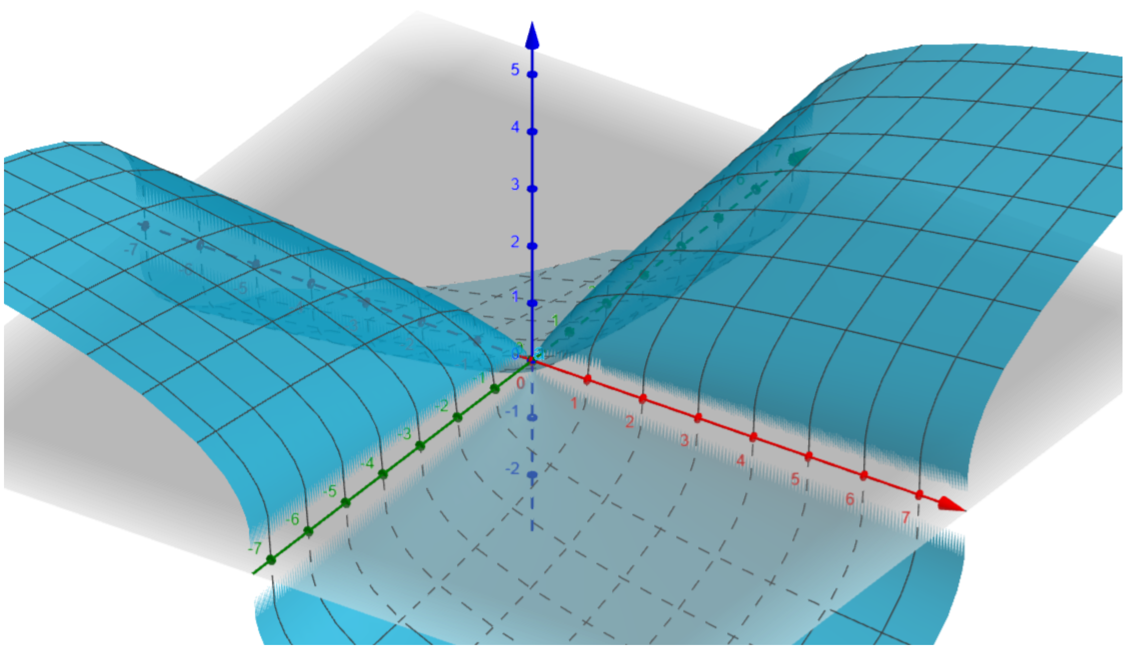


Figura 1: Gráfico da função $f(x, y) = x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}$, disponível em https://www.geogebra.org/3d/x89fbjfc

Referências

[1] Pinto, D., Morgado, M.C.F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, 2014.

[2] Mendes, C. M., Cálculo III - Notas de Aula, São Carlos, 1988. Cópia digital disponível em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/claudio.pdf.

[3] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.