Cálculo no $\mathbb{R}^n$
Agenda 02

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Apresentação

Nesta agenda estenderemos a Regra da Cadeia vista em agendas anteriores, discutiremos o **Teorema da Função Implícita** e daremos a conceituação do vetor gradiente de uma função vetorial a valores reais, bem como suas aplicações.

2 Regra da Cadeia

Teorema 1 (Regra da Cadeia). *Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^2$ um conjunto aberto, $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função e:*

$$\begin{array}{rccl} \sigma : & I & \to & R \subseteq \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

Se σ é diferenciável em $t_0 \in \operatorname{int.}(I)$ e f é diferenciável em $\sigma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$, então a função composta $f \circ \sigma : I \to \mathbb{R}$ é diferenciável em t_0 e vale:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0) \tag{1}$$

$$\begin{tikzcd} I \subseteq \mathbb{R} \arrow[d, "\sigma"'] \arrow[dr, "f \circ \sigma"] & \\ R \subseteq \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

*jeancb@ime.usp.br

Demonstração. Como f, por hipótese, é diferenciável em (x_0, y_0), temos:

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) + r(x-x_0,y-y_0) \qquad (2)$$

onde:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{r(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|} = 0$$

Portanto, a função:

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r(x-x_0,y-y_0)}{\|(x-x_0,y-y_0)\|}, \ (x,y) \neq (x_0,y_0), \\ 0, \ (x,y) = (x_0,y_0) \end{cases}$$

é contínua em (x_0, y_0).

Assim, dividimos os dois termos de (2) por $t - t_0$, $t \neq t_0$, temos:

$$\frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t-t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0))\cdot\frac{x(t)-x(t_0)}{t-t_0} + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0))\cdot\frac{y(t)-y(t_0)}{t-t_0} + g(\sigma(t))\cdot\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0}$$

Note que podemos escrever:

$$\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0} = \left\|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right\|\cdot\frac{|t-t_0|}{t-t_0}$$

Uma vez que $\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t)) = 0$ e que a função $t \mapsto \frac{|t-t_0|}{t-t_0}$ é limitada, tem-se:

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\cdot\frac{|t-t_0|}{t-t_0} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{t\to t_0}\left\|\frac{\sigma(t)-\sigma(t_0)}{t-t_0}\right\| = \|\sigma'(t_0)\|.$$

Portanto,

$$\lim_{t\to t_0} g(\sigma(t))\cdot\frac{\|\sigma(t)-\sigma(t_0)\|}{t-t_0} = 0$$

Logo,

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t_0) = \lim_{t \to t_0} \frac{f(\sigma(t)) - f(\sigma(t_0))}{t - t_0} = \frac{\partial f}{\partial x}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(\sigma(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

$\square$

Exemplo 2. *A temperatura de um ponto de coordenadas (x, y) em uma chapa de metal não varia com o tempo e é dada por $T = T(x, y)$. Uma formiga atravessa a chapa percorrendo a curva:*

$$\begin{array}{rccc} \sigma : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (t^2 + 1, 3t) \end{array}$$

A temperatura tem as propriedades: $T(5, 6) = 40$, $\frac{\partial T}{\partial x}(5, 6) = 4$ e $\frac{\partial T}{\partial y}(5, 6) = -2$. Qual é a taxa de variação desta temperatura em relação ao tempo em $t = 2$?

Solução: A temperatura, em cada instante, é $z(t) = T(\sigma(t)) = T(x(t), y(t))$, onde $x(t) = t^2 + 1$ e $y(t) = 3t$.

Por (1),

$$\frac{dT}{dt}(2) = \frac{\partial T}{\partial x}(x(2), y(2)) \cdot \frac{dx}{dt}(2) + \frac{\partial T}{\partial y}(x(2), y(2)) \cdot 4 =$$

$$= \frac{\partial T}{\partial x}(x(2), y(2)) \cdot \frac{dx}{dt}(2) + \frac{\partial T}{\partial y}(x(2), y(2)) \cdot 3 = 16 - 6 = 10$$

A taxa de variação, portanto, será igual a 10.

Exemplo 3. *Sejam $R, S \subseteq \mathbb{R}^2$ conjuntos abertos, $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em R e $g, h : S \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ funções diferenciáveis em S tais que para todo $(u, v) \in S$ tem-se $(g(u, v), h(u, v)) \in R$. Tomando:*

$$F(u, v) = f(g(u, v), h(u, v)), \ (u, v) \in S$$

Exemplo 4. *Calcular a derivada da composição das funções $f(x, y) = x^3 \cdot y^2$, $\sigma(t) = (e^{-t}, t \cdot \sin(t))$.*

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \arrow[u, "\sigma"] \arrow[ur, "f \circ \sigma"'] & \end{tikzcd}$$

Solução: Temos, aqui $x(t) = e^{-t}$ e $y(t) = t \cdot \sin(t)$, de modo que $x'(t) = -e^{-t}$ e $y'(t) = \sin(t) + t \cdot \cos(t)$. Também:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2y^2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2x^3y$$

Pela equação (1), tem-se:

$$\frac{d}{dt}(f\circ\sigma)(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0))\cdot\frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0))\cdot\frac{dy}{dt}(t_0) =$$

$$= 3x(t_0)^2\cdot y(t_0)^2\cdot\frac{dx}{dt}(t_0) + 2\cdot x(t_0)^3\cdot y(t_0)\cdot\frac{dy}{dt}(t_0) =$$

$$= 3\cdot(e^{-t_0})^2\cdot(t_0\cdot\sin(t_0))\cdot(-e^{-t_0}) + 2\cdot(e^{-t_0})^3\cdot(t_0\cdot\sin(t_0))\cdot(\sin(t_0)+t_0\cdot\cos(t_0))$$

Observação 5. *Vale um teorema análogo para o caso de n variáveis, qual seja: se $R\subseteq\mathbb{R}^n$ for um subconjunto aberto, $f: R\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ for uma função diferenciável em $(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})\in R$ e :*

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & I & \to & \mathbb{R}^n \\ & t & \mapsto & (x_1(t),\cdots,x_n(t)) \end{array}$$

for uma função com $I\subseteq\mathbb{R}$, diferenciável em $t_0\in\operatorname{int}.(I)$ e $\sigma(t_0)=(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})$, então:

$$\frac{d}{dt}(f\circ\sigma)(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})\cdot\frac{dx_1}{dt}(t_0) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\bar{x_1},\cdots,\bar{x_n})\cdot\frac{dx_n}{dt}(t_0)$$

Proposição 6. *Sejam $U, V\subseteq\mathbb{R}^2$ abertos, $f: U\to\mathbb{R}$ diferenciável em U (ou seja, em todos os pontos de U) e $g, h: V\to\mathbb{R}$ diferenciáveis em V tais que para todo $(u,v)\in V$ tenhamos $(g(u,v), h(u,v))\in U$. Definindo a função:*

$$\begin{array}{rccc} F: & V\subseteq\mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \mapsto & f(g(u,v), h(u,v)) \end{array}$$

tem-se:

(a) $\dfrac{\partial F}{\partial u} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial u} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial u}$

(b) $\dfrac{\partial F}{\partial v} = \dfrac{\partial f}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial x}{\partial v} + \dfrac{\partial f}{\partial y}\cdot\dfrac{\partial y}{\partial v}$

Demonstração. Ad (a): Para calcular $\partial F/\partial u$, consideramos v constante, de modo que x e y dependem somente da variável u. Segue da equação (1) que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u,v),$$

onde $(x,y) = (g(u,v), h(u,v))$. $\square$

Exemplo 7. *Seja* $F(u,v,w) = f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$, *onde* $f(x,y,z) = x^2 + y^2 - z$, $x(u,v,w) = u^2v$, $y(u,v,w) = v^2$ *e* $z(u,v,w) = e^{-uw}$. *Calcular* $\frac{\partial F}{\partial u}$.

Demonstração. Pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u}$$

onde as derivadas parciais de f são calculadas em $(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$. Assim,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = 2 \cdot u^2 v$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = 2y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = 2 \cdot v^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = -1 \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)) = -1$$

Como:

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 2uv, \frac{\partial y}{\partial u} = 0 \text{ e } \frac{\partial z}{\partial u} = -w \cdot e^{-wu},$$

segue que:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v,w) = (2u^2v) \cdot (2uv) + (2v^2) \cdot 0 - w \cdot e^{-wu} \cdot (-1) = 4u^3v^2 + we^{-uw}$$

□

3 O Teorema da Função Implícita em Duas Variáveis

Na Geometria Analítica frequentemente encontramos curvas representadas sob a forma $F(x,y) = 0$ para alguma função $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$:

(a) $ax + by + c = 0$ (reta);

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ para certos $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0 \neq b$ (elipse);

Dada a curva definida por $F(x,y) = 0$, para se obter $y = f(x)$ devemos "resolver" $F(x,y) = 0$ em relação a y. Se desejarmos obter $x = g(y)$ devemos "resolver" $F(x,y) = 0$ em relação a x.

Em alguns casos a solução pode ser encontrada rapidamente, em termos de funções elementares, como nos exemplos 8 e 9 a seguir:

Exemplo 8.

$$F(x, y) = x^2 + y^2$$
$$x^2 + y^2 = 0 \to x = 0 = y$$

Exemplo 9.

$$F(x, y) = 2x + 3y - 9$$
$$2x + 3y - 9 = 0 \to y = -\frac{2}{3}x + 3 \text{ ou } x = -\frac{3}{2}y + \frac{9}{2}$$

Entretanto, nem sempre $F(x, y) = 0$ nos conduz a $y = f(x)$ ou $x = g(y)$, como nos exemplos a seguir:

Exemplo 10.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 + 1$$
$$x^2 + y^2 + 1 = 0$$

não é satisfeita para nenhum x e nenhum y reais.

Exemplo 11.

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$$
$$x^2 + y^2 - 1 = 0$$

não é função. O lugar geométrico dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $F(x, y) = 0$ é o círculo de raio um centrado na origem.

No **Exemplo 11**, é imediato que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ não define uma função $y = y(x)$ (nem mesmo $x = x(y)$). Colocamos, assim, a seguinte questão: "para quais valores de (x_0, y_0) a relação $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | F(x, y) = 0\}$ define y como função de x, $y = y(x)$, em uma vizinhança de (x_0, y_0)?"

Observe que é possível obter uma função $y = f(x)$ e uma função $x = g(y)$ em uma vizinhança suficientemente pequena do ponto $P_0 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$. De fato, tomando $\delta = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$ temos $y = \sqrt{1 - x^2} = f(x)$ para $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta\right[$ e $x = \sqrt{1 - y^2} = g(y)$ para $x \in \left]\frac{\sqrt{2}}{2} - \delta, \frac{\sqrt{2}}{2} + \delta\right[$. Em geral, é fato que se escolhermos um ponto $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ com $a \neq -1$ e $a \neq 1$, existem intervalos abertos $I \ni a$ e $J \ni b$ com a seguinte propriedade:

"para todo $x \in I$ existe um único $y \in J$ tal que $F(x, y) = 0$ "

Assim, podemos definir uma função:

$$\begin{array}{rccc} f: & I \subseteq \mathbb{R} & \to & J \subseteq \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

tal que $F(x, f(x)) = 0$. Se $b > 0$, definimos $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$. No entanto, para este mesmo a existe um outro número $b_1 \in \mathbb{R}$ tal que $F(a, b_1) = 0$. Também há um intervalo J' contendo b_1 e uma função $f' : I \to J'$ tal que $F(x, f'(x)) = 0$ para todo $x \in I$, bastando definir $f'(x) = -\sqrt{1 - x^2}$.

No entanto, note que não há vizinhança (da topologia usual de $\mathbb{R}^2$) de $(1, 0)$ ou de $(-1, 0)$ à qual possamos nos restringir a fim de que $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 - 1 = 0\}$ defina uma função $y = y(x)$, embora seja possível expressar $x = x(y)$ para vizinhanças adequadas.

Agora visamos estabelecer condições para responder quando uma equação $F(x, y) = 0$ nos conduz a $y = f(x)$ ou $x = g(y)$ e, nesta circunstância, estabelecer métodos para obter propriedades particulares destas funções. Mais precisamente, o teorema abaixo estabelece condições suficientes para garantir a existência de *funções implícitas* dando, ao mesmo tempo, regras para *derivá-la*.

Teorema 12 (Teorema da Função Implícita para Funções de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}$). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ e $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R})$ ($k \geq 1$) tais que:*

(1) $F(x_0, y_0) = 0$;

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \neq 0$.

Então existe uma vizinhança $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ de x_0 e uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to J \subseteq \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k(I)$ tais que:

(a) $f(x_0) = y_0$;

(b) $(\forall (x, y) \in I \times J)(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \neq 0)$

(c) $(\forall x \in I)(F(x, f(x)) = 0)$;

(d) $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é de classe* $\mathcal{C}^k(I)$ *e* $\dfrac{df}{dx}(x) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$

Em outras palavras, sob as hipóteses (1) e (2) existe um retângulo centrado em (x_0, y_0) restrito ao qual a curva $F(x, y) = 0$ é o gráfico de uma função $y = y(x)$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, suponhamos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$$

Como $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ é **contínua** em $P_0 = (x_0, y_0)$, dado $\varepsilon = \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) > 0$, existe uma vizinhança $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ de (x_0, y_0) tal que:

$$(\forall (x,y) \in \Omega) \left(\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) - \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right| < \varepsilon \right)$$

$$(\forall (x,y) \in \Omega) \left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) - \varepsilon < \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) < \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) + \varepsilon \right)$$

Em particular,

$$(\forall (x,y) \in \Omega) \left(0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right) \tag{3}$$

Se consideramos a função:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{x_0}: & \{y \in \mathbb{R} | (0,y) \in \Omega\} \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & F(x_0, y) \end{array}$$

da equação (3), segue que Φ_{x_0} é <u>estritamente</u> crescente em uma vizinhança J de y_0, digamos, $J = [y_1, y_2] \subseteq \{y \in \mathbb{R} | (0,y) \in \Omega\}$. Como pela hipótese (1), $\Phi_{x_0}(y_0) = F(x_0, y_0) = 0$, tem-se que:

$$\Phi_{x_0}(y_1) = F(x_0, y_1) < \Phi_{x_0}(y_0) = 0 < \Phi_{x_0}(y_2) = F(x_0, y_2)$$

Considere, agora, as funções:

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{y_1}: & \{x \in \mathbb{R} | (x,0) \in \Omega\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x, \underline{y_1}) \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rccc} \Psi_{y_2}: & \{x \in \mathbb{R} | (x,0) \in \Omega\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x, \underline{y_2}) \end{array}$$

Como F é contínua em (x_0, y_1) e (x_0, y_2) tem-se que Ψ_{y_1} e Ψ_{y_2} são contínuas em x_0, de modo que como $\Psi_{y_1}(x_0) < 0$ e $\Psi_{y_2}(x_0) > 0$, existem (pela conservação do sinal) $\delta_1, \delta_2 > 0$ tais que:

$$(\forall x \in]x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1[)(\Psi_{y_1}(x) = F(x, y_1) < 0)$$

e

$$(\forall x \in]x_0 - \delta_2, x_0 + \delta_2[)(0 < \Psi_{y_2}(x) = F(x, y_2))$$

Fazendo $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, temos:

$$(\forall x \in I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)(F(x, y_1) < 0 < F(x, y_2))$$

Para cada $x \in I$, considere:

$$\begin{array}{rccc} \Phi_x : & [y_1, y_2] \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & F(\underline{x}, y) \end{array}$$

Como $\Phi_x(y_1) = F(\underline{x}, y_1) < 0 < F(\underline{x}, y_2) = \Phi_x(y_2)$, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, para cada x existe um único $y \in]y_1, y_2[$ tal que $\Phi_x(y) = F(\underline{x}, y) = 0$. Isto define uma função $y = f(x)$.

Afirmação: A função $f : I = [x_0 - \delta, x_0 + \delta] \to J = [y_1, y_2]$ é contínua.

De fato, mostremos que a pré-imagem de subconjuntos fechados de J é subconjunto fechado de I: Seja $K \subseteq [y_1, y_2]$ fechado e considere $(x_k)_{k \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ tal que:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(x_k \in f^{\dashv}[K]) \text{ e } \lim_{k \to \infty} x_k = \overline{x} \in I.$$

Mostremos que $\overline{x} \in f^{\dashv}[K]$.

Como K é subconjunto fechado de um compacto, K é compacto, de modo que a sequência limitada $(f(x_k))_{k \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$ tem subsequência convergente, digamos $(f(x_{k'}))_{k' \in \mathbb{N}} \in K^{\mathbb{N}}$ com $\lim f(x_{k'}) = a \in K$. Assim, como F é contínua, $\lim F(x_{k'}, f(x_{k'})) = F(\lim x_{k'}, \lim f(x_{k'})) = F(\overline{x}, a) = 0$. Pela unicidade de $f(\overline{x})$, tem-se $f(\overline{x}) = a \in K$, donde $\overline{x} \in f^{\dashv}[K]$.

Note que como $I \times J \subseteq \Omega$, tem-se

Mostremos, agora, que f é continuamente diferenciável em I e que vale:

$$\frac{df}{dx}(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Com a notação $y = f(x)$, temos, como F é diferenciável em $(x, y) \in I \times J$:

$$F(x+s, y+t) - F(x, y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \cdot s + \frac{\partial F}{\partial y}(x, y) \cdot t + \varepsilon(s, t) \cdot \sqrt{s^2 + t^2} \text{ com } \lim_{(s,t) \to (0,0)} \varepsilon(s, t) = 0 \tag{4}$$

Tomando $t = f(x+s) - f(x)$ para s tal que $|s| < \delta$, temos:

$$F(x+s, y+t) = F(x+s, f(x) + f(x+s) - f(x)) = F(x+s, f(x+s)) = 0$$

ou seja, o membro esquerdo de (4) se anula. Assim, segue que:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\cdot t = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)\cdot s - \varepsilon(s,t)\cdot\sqrt{s^2+t^2} \tag{5}$$

Rearranjando a equação (5), temos:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\cdot\frac{t}{s} = -\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) - \varepsilon(s,t)\cdot\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s}$$

$$\frac{t}{s}\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = -\varepsilon(s,t)\cdot\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s}$$

Como para todo $(x,y)\in I\times J$, $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) > 0$

$$\frac{t}{s} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)} = -\frac{\varepsilon(s,t)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\cdot\frac{\sqrt{s^2+t^2}}{s}$$

$$\left|\frac{t}{s} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right| = \left|\frac{\varepsilon(s,t)\cdot\sqrt{s^2+t^2}}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\cdot s}\right|$$

e assim,

$$\left|\frac{t}{s} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right| \leq \frac{|\varepsilon(s,t)|\cdot|\sqrt{s^2+t^2}|}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|\cdot|s|}$$

Como para $s>0$, $\dfrac{\sqrt{s^2+t^2}}{s} = \sqrt{\dfrac{s^2+t^2}{s^2}} = \sqrt{1+\dfrac{t^2}{s^2}} \leq 1+\dfrac{|t|}{|s|}$, segue que:

$$\left|\frac{t}{s} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right| \leq \frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|}\cdot\left(1+\frac{|t|}{|s|}\right)$$

Assim, se mostrarmos que $\frac{|t|}{|s|}$ é limitado numa vizinhança de $s=0$, como $s\to 0 \Rightarrow t = f(x+s)-f(x)\to 0$, pois f é contínua, segue-se que:

$$\lim_{s\to 0}\frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left|\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)\right|}\cdot\left(1+\frac{|t|}{|s|}\right) = 0$$

e portanto,

$$\lim_{s\to 0}\left|\frac{t}{s} + \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}\right| = 0$$

donde, como $\frac{t}{s} = \frac{f(x+s) - f(x)}{s}$, segue que:

$$f'(x) = \lim_{s \to 0} \frac{f(x+s) - f(x)}{s} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)}$$

para todo $(x,y) \in I \times J$. A expressão acima mostra que se $F \in \mathcal{C}^k(U)$ então $f' \in \mathcal{C}^{k-1}(I)$, e portanto $f \in \mathcal{C}^k(I)$.

Note que, como para todo $x \in I$, $y = f(x)$, temos:

$$(\forall x \in I) \left(\frac{df}{dx}(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))} \right)$$

Finalmente, resta mostrarmos que $\frac{|t|}{|s|}$ é limitada numa vizinhança de $s = 0$.

Tem-se:

$$\frac{t}{s} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} - \frac{\varepsilon(s,t)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \cdot \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s}$$

e

$$\frac{|t|}{|s|} = \left| \frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y)}{\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y)} \right| + \frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left| \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) \right|} \cdot \left| \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s} \right|$$

Mas,

$$\frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left| \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right|} \cdot \left| \frac{\sqrt{s^2 + t^2}}{s} \right| \leq \frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left| \dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right|} \cdot \left(1 + \frac{|t|}{|s|} \right)$$

Como vale, para todo $(x,y) \in I \times J$, $0 < \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) < \frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$, tem-se:

$$\frac{1}{\left| \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right|} \leq \frac{1}{\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right|}$$

donde

$$\frac{|t|}{|s|} \leq \left| \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)} \right| + \frac{|\varepsilon(s,t)|}{\left| \frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0) \right|} \cdot \left(1 + \frac{|t|}{|s|} \right)$$

Como $\lim_{s\to 0} \varepsilon(s,t) = 0$, existe $\eta > 0$ tal que se $|s| < \eta$ vale $|\varepsilon(s,t)| < \overbrace{\frac{1}{2} \cdot \left|\frac{1}{2} \cdot \frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)\right|}^{\text{“}\varepsilon\text{”}}$, e portanto, para s com $|s| < \eta$ vale:

$$\frac{|t|}{|s|} \leq \left|\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right| + \frac{1}{2} \cdot \left(1 + \frac{|t|}{|s|}\right)$$

e portanto:

$$\frac{|t|}{|s|} \leq 2 \cdot \left(\left|\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)}\right| + \frac{1}{2}\right) = \text{cte}$$

□

Exemplo 13. *Como aplicação do **Teorema da Função Implícita**, mostremos que existe $a > 0$ suficientemente pequeno e $g \in \mathcal{C}^1(]-a,a[,\mathbb{R})$ tal que $g(0) = 0$ e:*

$$g(x)^2 \cdot x + 2x^2 e^{g(x)} = g(x)$$

Definimos:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & y^2 x + 2x^2 e^y - y \end{array}$$

*e observamos que $F(0,0) = 0$ $\dfrac{\partial F}{\partial y}(0,0) = -1$, de modo que pelo **Teorema da Função Implícita** existem $a > 0$ e $g \in \mathcal{C}^1(]-a,a[,\mathbb{R})$ tal que:*

$$(\forall x \in]-a,a[)(F(x,g(x)) = 0)$$

ou seja,

$$(\forall x \in]-a,a[)(g(x)^2 \cdot x + 2x^2 e^{g(x)} = g(x))$$

Embora não seja possível exibir explicitamente a função g, o teorema garante sua existência.

Evidentemente, não há nada de especial quanto à última coordenada, de modo que podemos enunciar também o:

Teorema 14 (Teorema da Função Implícita 2). *Sejam* $U \subseteq \mathbb{R}^2$, $P_0 = (x_0, y_0) \in U$ *e* $F : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^k(U)$ *(*$k \geq 1$*) tais que:*

(1) $F(x_0, y_0) = 0$*;*

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0) \neq 0.$

Então existe uma vizinhança J *de* y_0 *e uma função* $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^k(J)$ *tais que:*

(a) $g(y_0) = x_0$*;*

(b) $(\forall (x, y) \in I \times J)(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y) \neq 0)$

(c) $(\forall x \in I)(F(g(y), y) = 0)$*;*

(d) $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é de classe* $\mathcal{C}^k(J)$ *e* $\dfrac{dg}{dy}(y) = -\dfrac{\frac{\partial F}{\partial y}(g(y), y)}{\frac{\partial F}{\partial x}(g(y), y)}$

Teorema 15 (Teorema da Função Implícita para funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$). *Sejam* $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ *e* $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R})$ *(*$k \geq 1$*) tais que:*

(1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$*;*

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0.$

Então existem um $\delta > 0$ *e uma função* $f : B((x_0, y_0), \delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *de classe* $\mathcal{C}^k(B((x_0, y_0), \delta); \mathbb{R})$ *tais que:*

(a) $f(x_0, y_0) = z_0$*;*

(b) $(\forall (x, y, z) \in B((x_0, y_0, z_0), \delta))(\frac{\partial F}{\partial z}(x, y, z) \neq 0)$

(c) $(\forall (x, y) \in B((x_0, y_0), \delta))(F(x, y, f(x, y)) = 0)$*;*

Teorema 16 (Teorema da Função Implícita para funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ e $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R})$ ($k \geq 1$) tais que:*

(1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Então existem um $\delta > 0$ e uma função $g : B((x_0, z_0), \delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k(B((x_0, z_0), \delta); \mathbb{R})$ tais que:

(a) $f(x_0, z_0) = y_0$;

(b) $(\forall (x, y, z) \in B((x_0, y_0, z_0), \delta))(\frac{\partial F}{\partial y}(x, y, z) \neq 0)$

(c) $(\forall (x, z) \in B((x_0, z_0), \delta))(F(x, g(x, z), z) = 0)$;

Teorema 17 (Teorema da Função Implícita para funções de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}$). *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^3$, $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in U$ e $F : U \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^k(U; \mathbb{R})$ ($k \geq 1$) tais que:*

(1) $F(x_0, y_0, z_0) = 0$;

(2) $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

Então existem um $\delta > 0$ e uma função $h : B((y_0, z_0), \delta) \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^k(B((y_0, z_0), \delta); \mathbb{R})$ tais que:

(a) $h(y_0, z_0) = x_0$;

(b) $(\forall (x, y, z) \in B((x_0, y_0, z_0), \delta))(\frac{\partial F}{\partial x}(x, y, z) \neq 0)$

(c) $(\forall (y, z) \in B((y_0, z_0), \delta))(F(h(y, z), y, z) = 0)$;

4 O vetor gradiente

Definição 18 (vetor gradiente). *Seja* $f : R \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *uma função que possui derivadas parciais em* $(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}) \in \operatorname{int.}(R)$. *O* ***vetor gradiente de*** f ***em*** $(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}) \in \operatorname{int.}(R)$, *denotado por* $\nabla f(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n})$, *é o vetor:*

$$\nabla f(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(\underline{x_1}, \underline{x_2}, \cdots, \underline{x_n}) \right)$$

Usando a definição de vetor gradiente, a equação (1) pode ser escrita como:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t),$$

onde $\nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$ é o produto escalar dos vetores $\nabla f(\sigma(t))$ e $\sigma'(t)$.

Se soubermos os gradientes de duas funções f e g, automaticamente saberemos os gradientes de sua soma e diferença, de seu produto e quociente e da multiplicação por uma constante.

Proposição 19. *Sejam* $U \subseteq \mathbb{R}^n$ *um aberto e* $f, g : U \to \mathbb{R}$ *funções que admitem derivadas parciais de ordem 1 em* U *e* $k \in \mathbb{R}$. *Tem-se*

(a) $\nabla(k \cdot f) = k \cdot \nabla f$

(b) $\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g$

(c) $\nabla(f - g) = \nabla f - \nabla g$

(d) $\nabla(f \cdot g) = f \cdot \nabla g + g \cdot \nabla f$;

(e) $\nabla\left(\frac{f}{g}\right) = \dfrac{g \cdot \nabla f - f \cdot \nabla g}{g^2}$

Demonstração. Seja $(x_1, \cdots, x_n) \in U$ qualquer.

Ad (a): Temos:

$$\nabla(k \cdot f)(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(k \cdot f)(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(k \cdot f)(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$= \left(k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, k \cdot \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$= k \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) = k \cdot \nabla f(x_1, \cdots, x_n)$$

Ad (b): Temos:

$$\nabla(f+g)(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f+g)(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f+g)(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$
$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n) + \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) + \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$= \nabla f(x_1, \cdots, x_n) + \nabla g(x_1, \cdots, x_n)$$

Ad (d): Temos:

$$\nabla(f \cdot g)(x_1, \cdots, x_n) = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}(f \cdot g)(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial}{\partial x_n}(f \cdot g)(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n) \cdot g(x_1, \cdots, x_n) + f(x_1, \cdots, x_n) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \right.$$
$$\left. \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \cdot g(x_1, \cdots, x_n) + f(x_1, \cdots, x_n) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) \cdot g(x_1, \cdots, x_n) +$$

$$+ f(x_1, \cdots, x_n) \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \cdots, x_n), \cdots, \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \cdots, x_n) \right) =$$

$$= \nabla f(x_1, \cdots, x_n) \cdot g(x_1, \cdots, x_n) + f(x_1, \cdots, x_n) \cdot \nabla g(x_1, \cdots, x_n) =$$

$$= [\nabla f \cdot g + f \cdot \nabla g](x_1, \cdots, x_n)$$

$\square$

Vimos, na agenda anterior, que dados um aberto, $U \subseteq \mathbb{R}^2$, um ponto $(x_0, y_0) \in U$ e uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diferenciável em (x_0, y_0), existia um plano que tangenciava $\text{Graf}\,(f)$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ – o **plano tangente em** $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, dado por:

$$T_{(x_0, y_0, f(x_0, y_0))}\,\text{Graf}\,(f) =$$

$$= \left\{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0) \right\}$$

Na definição a seguir, daremos o significado de um vetor ser "tangente a $\operatorname{Graf}(f)$ em $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$".

Definição 20. *Sejam $U \subseteq \mathbb{R}^2$ um aberto, $(x_0,y_0) \in U$ e $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em (x_0,y_0). Dizemos que um vetor, $\vec{v}$ é* ***tangente a*** $\operatorname{Graf}(f)$ ***em*** $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ *se, e somente se, a soma do vetor $\vec{v}$ com o ponto $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$:*

$$\vec{v} + (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = (x,y,z)$$

pertencer a $T_{(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}\operatorname{Graf}(f)$.

O lema a seguir *caracteriza* os vetores tangentes ao gráfico de uma função diferenciável em um ponto como vetores-velocidade de curvas contidas nele:

Lema 21. *Sejam $f : R \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função diferenciável em $(x_0,y_0) \in \operatorname{int.}(R)$ e $\operatorname{Graf.}(f)$. Se $\vec{T}$ for um vetor não-nulo tangente a $\operatorname{Graf.}(f)$ em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, então existe uma curva parametrizada, $(C, \sigma : I \to \mathbb{R}^3)$, com $C \subseteq \operatorname{Graf}(f)$ e tal que $\sigma(t_0) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, diferenciável em $t_0 \in I$ tal que $\sigma'(t_0) = \vec{T}$.*

Demonstração. A curva de interseção de $\operatorname{Graf.}(f)$ com o plano $\pi = \{(x,y_0,z) \mid (x \in \mathbb{R})\&(z \in \mathbb{R})\}$ pode ser parametrizada por:

$$\begin{array}{rccl} \gamma : & I & \to & \operatorname{Graf.}(f) \cap \pi \\ & t & \mapsto & (t, y_0, f(t,y_0)) \end{array}$$

de modo que $\gamma'(t_0) = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$ é um vetor tangente a $\operatorname{Graf}.(f)$ em (x_0,y_0,z_0).

De fato, verificamos que o ponto:

$$(x,y,z) = (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + \gamma'(t)_0 = (x_0,y_0,f(x_0,y_0)) + \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right) =$$

$$= \left(x_0 + 1, y_0, f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)$$

é tal que:

$$z - f(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y - y_0)$$

uma vez que:

$$f(x_0,y_0)+\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)-f(x_0,y_0)=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x_0+1-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y_0-y_0),$$

o que, por definição, significa que $\gamma'(t_0)\in T_{(x_0,y_0,f(x_0,y_0))}\,\mathrm{Graf}\,(f)$.

Por outro lado, a curva de interseção de Graf $.(f)$ com o plano $\mu=\{(x_0,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid (y\in\mathbb{R})\&(z\in\mathbb{R})\}$ pode ser parametrizada por:

$$\begin{array}{rccc}\eta: & I & \to & \mathrm{Graf}.(f)\cap\mu \\ & t & \mapsto & (x_0,t,f(x_0,t))\end{array}$$

de modo que $\eta'(t_0)=\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$ é também um vetor tangente a Graf $.(f)$ em (x_0,y_0,z_0) (a verificação é análoga à que fizemos para $\gamma'(t_0)$).

Como os vetores $\gamma'(t_0)$ e $\mu'(t_0)$ são linearmente independentes (verifique, por exemplo, calculando seu produto vetorial), eles geram o plano tangente a Graf $.(f)$ em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$. Portanto, se $\vec{T}$ é um vetor não-nulo tangente a Graf$.(f)$ em $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$, então:

$$\vec{T}=a\cdot\gamma'(t_0)+b\cdot\eta'(t_0),$$

onde a e b são constantes não simultaneamente nulas – quais sejam, as coordenadas de $\vec{T}$ junto à base $\{\gamma'(t_0),\eta'(t_0)\}$.

Tomando:

$$\sigma(t)=(x_0+a\cdot(t-t_0),y_0+b\cdot(t-t_0),f(x_0+a\cdot(t-t_0),y_0+b\cdot(t-t_0)))$$

temos:

$$\sigma'(t)=\left(a,b,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot a+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot b\right)=a\cdot\left(1,0,\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right)+b\cdot\left(0,1,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)$$

temos que $\sigma(t_0)=(x_0,y_0,z_0)$, com σ diferenciável em t_0 e $\vec{T}=\sigma'(t_0)$.

□

O teorema a seguir nos dá uma interpretação geométrica para o vetor gradiente de uma função de três variáveis.

Teorema 22. *Sejam $R\subseteq\mathbb{R}^3$ aberto, $(x_0,y_0,z_0)\in R$ e $f\in\mathcal{C}^1(R,\mathbb{R})$ tais que $\nabla f(x_0,y_0,z_0)\neq\vec{0}$. Se S é a superfície de nível k, $S=f^{\dashv}[\{k\}]=\{(x,y,z)\in R \mid f(x,y,z)=k\}$ e $(x_0,y_0,z_0)\in S$, então $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ é perpendicular a qualquer vetor tangente a S em (x_0,y_0,z_0).*

Demonstração. Uma vez que $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \vec{0}$, podemos supor que $\dfrac{\partial f}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Pelo **Teorema da Função Implícita**, numa vizinhança do ponto $(x_0, y_0, z_0) \in S$ é o gráfico de uma função de classe $\mathcal{C}^1$, digamos $z = h : B((x_0, y_0), \delta) \to \mathbb{R}$ com $z_0 = h(x_0, y_0)$.

Dado um vetor tangente não-nulo a $\operatorname{Graf.}(h)$ em $(x_0, y_0, h(x_0, y_0))$, $\vec{T}$, segue do **Lema 21** que existe uma curva parametrizada, $(C, \sigma : I \to \mathbb{R}^3)$ contida em S tal que $\sigma(t_0) = (x_0, y_0, z_0)$ e $\vec{T} = \sigma'(t_0)$.

Visto que $C \subseteq \operatorname{Graf.}(h) \subseteq f^{\dashv}[\{k\}]$, tem-se:

$$f(\sigma(t)) = k$$

Derivando os dois membros da equação acima com respeito a t, obtemos:

$$\frac{d}{dt}(f \circ \sigma)(t) = 0$$

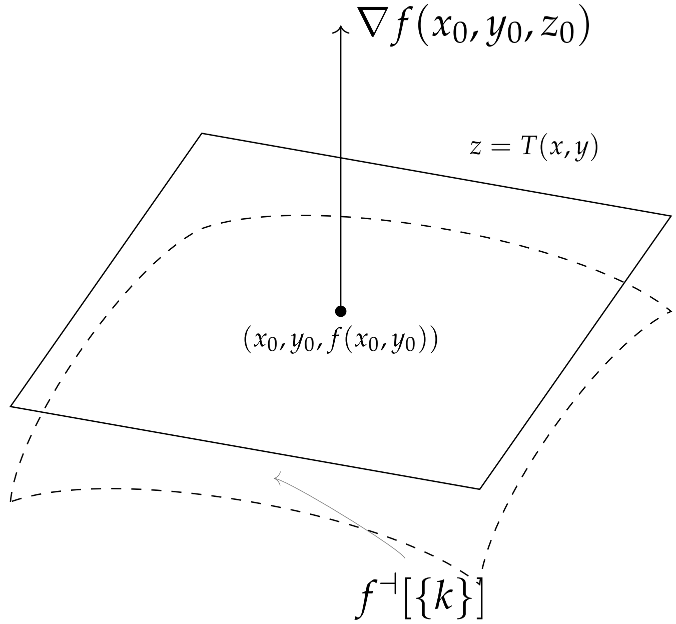
Pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$\frac{d}{dt}(f(\sigma(t)))\bigg|_{t=t_0} = \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \sigma'(t_0),$$

isto é,

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot \vec{T} = 0$$

$\square$



Definição 23. *Sejam S uma superfície de nível de equação $f(x, y, z) = k$, com k constante, e $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in S$. Se f for uma função de classe $\mathcal{C}^1$ em um conjunto aberto, $U \subseteq \mathbb{R}^3$, tal que $P_0 \in U$ e $\nabla f(P_0) \neq \vec{0}$, definimos o* ***plano tangente a** S **em** P_0 como sendo o plano de equação:*

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0 \tag{6}$$

Além disso, a reta de equação:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot \nabla f(P_0), \lambda \in \mathbb{R} \tag{7}$$

denomina-se ***reta normal a** S **em** P_0.*

Note que a definição acima é uma extensão da definição de plano tangente e reta normal a uma superfície que é gráfico de uma função de duas variáveis.

O **Teorema 22** se aplica às funções de duas variáveis.

Teorema 24. *Se $U \subseteq \mathbb{R}^2$ é aberto tal que $(x_0, y_0) \in U$ e $f \in \mathcal{C}^1(U; \mathbb{R})$ são tais que $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, e se C é a curva de nível k que contém (x_0, y_0), então o vetor $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal à curva C em (x_0, y_0).*

Demonstração. Podemos parametrizar a curva de nível k no plano Oxy por uma função:

$$\begin{array}{rccc} \gamma: &]t_0 - \delta, t_0 + \delta[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (x(t), y(t)) \end{array}$$

com $\gamma(t_0) = (x(t_0), y(t_0)) = (x_0, y_0)$.

Um vetor será normal à curva em (x_0, y_0) se, e somente se, for normal a um vetor tangente a esta curva no ponto (x_0, y_0) – portanto, basta provarmos que $\nabla f(x_0, y_0)$ é normal ao vetor tangente à curva de nível k no ponto (x_0, y_0). Vimos que o vetor:

$$\gamma'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$$

é tangente à curva C no ponto (x_0, y_0), de modo que basta provar que $\gamma'(t_0) \perp \nabla f(x_0, y_0)$.

Como $(\forall t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[)(f(\gamma(t)) = f(x(t), y(t)) = c)$, segue que:

$$\frac{d}{dt}(f(\gamma(t))) = \frac{d}{dt}(f(x(t), y(t))) = 0$$

Da **Regra da Cadeia** decorre que para todo $t \in]t_0 - \delta, t_0 + \delta[$ vale:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), y(t)) \cdot y'(t) = 0$$

Em particular, tem-se:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot x'(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot y'(t_0) = 0$$

ou seja,

$$\nabla f(x_0, y_0) \cdot \gamma'(t_0) = 0$$

$\square$

Exemplo 25. *Encontrar uma equação para a reta tangente da elipse:*

$$\frac{x^2}{4} + y^2 = 2$$

no ponto $(-2, 1)$.

Solução: A elipse é uma curva de nível da função $f(x, y) = \frac{x^2}{4} + y^2$. O gradiente de f em $(-2, 1)$ é:

$$\nabla f(-2, 1) = \left(\frac{x}{2}, 2y\right)\Bigg|_{(x,y)=(-2,1)} = (-1, 2)$$

A tangente é a reta:

$$(-1) \cdot (x + 2) + (2) \cdot (y - 1) = 0$$

$$x - 2y = -4$$

5 Derivada Direcional

Agora vamos generalizar o conceito de derivada parcial para obter a taxa de variação de uma função em determinada direção.

Sejam $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de duas variáveis, $P_0 = (x_0, y_0) \in \operatorname{int.}(U)$ e $\vec{u}$ um vetor não nulo no plano Oxy. O conjunto dos pontos $P_0 + t \cdot \vec{u}$, $t \in \mathbb{R}$, é a reta L que contém P_0 e é paralela ao vetor $\vec{u}$.

A derivada direcional de f em P_0 na direção de $\vec{u}$, denotada por $\dfrac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$, é a taxa de variação de f em P_0 na direção de L. Geometricamente, $\dfrac{\partial f}{\partial u}(P_0)$ representa a inclinação da reta tangente à curva C, parametrizada por $t \mapsto f(P_0 + t \cdot \vec{u})$ no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.

Definição 26 (derivada direcional). *A **derivada direcional** de uma função $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ em P_0 na direção do vetor $\vec{u}$ é definida por:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{u}) - f(P_0)}{t \cdot \|\vec{u}\|}$$

se este limite existir. (Veja https://www.geogebra.org/m/Bx8nFMNc)

Segue da **Definição 26** que as derivadas parciais de f em relação a x e a y em P_0 são as derivadas direcionais nas direções dos vetores $\vec{u} = (1, 0)$ e $\vec{v} = (0, 1)$, respectivamente.

Teorema 27. *Se $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é diferenciável em $P_0 = (x_0, y_0)$, então:*

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \tag{8}$$

Demonstração. A diferenciabilidade de f em P_0 implica que:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{u}) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (t \cdot \vec{u})}{\|t \cdot \vec{u}\|} = 0,$$

o que, por sua vez, equivale a :

$$\lim_{t \to 0} \left| \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{u}) - f(P_0) - \nabla f(P_0) \cdot (t \cdot \vec{u})}{\|t \cdot \vec{u}\|} \right| = 0,$$

que equivale a:

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(P_0 + t \cdot \vec{u}) - f(P_0)}{\|t \cdot \vec{u}\|} = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

ou seja,

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

□

O teorema acima afirma que se f é diferenciável em um ponto P_0, então f tem todas as derivadas direcionais em P_0. E a recíproca, é verdadeira?

Vejamos um exemplo em que f tem todas as derivadas direcionais em P_0 mas não é diferenciável em P_0. Considere:

$$
\begin{array}{rccc}
f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\
& (x,y) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{x\cdot|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}, \ (x,y)\neq(0,0) \\ 0, \ (x,y)=(0,0) \end{cases}
\end{array}
$$

Seja $\vec{v}=(v_1,v_2)$ com $\|\vec{v}\|=1$. Temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{t\cdot v_1\cdot|t\cdot v_2|}{\sqrt{t^2\cdot(v_1^2+v_2^2)}}=\frac{v_1\cdot|v_2|}{\sqrt{v_1^2+v_2^2}}=v_1\cdot|v_2|$$

No entanto,

$$r(\Delta x,\Delta y)=f(0+\Delta x,0+\Delta y)-f(0,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\cdot\Delta x-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\cdot\Delta y=$$

$$=\frac{\Delta x\cdot|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}$$

de modo que como:

$$\nexists \lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\dfrac{\Delta x|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}}{\|(\Delta x,\Delta y)\|}=\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta x\cdot|\Delta y|}{\Delta x^2+\Delta y^2}$$

a função não é diferenciável em $(0,0)$.

A **Definição 26** pode ser estendida às funções f de três variáveis reais a valores reais, assim como o **Teorema 27**

Exemplo 28. *Determinar a taxa de variação de $f(x,y,z)=xyz+e^{2x+y}$ no ponto $P_0=(-1,2,1)$ na direção do vetor $\vec{u}=(1,1,\sqrt{2})$.*

Solução: as derivadas parciais de f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z)=yz+2e^{2x+y},\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z)=xz+e^{2x+y}\ \text{ e }\ \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z)=xy$$

Como f é diferenciável em P_0, segue de (8) que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(-1,2,1)=\nabla f(-1,2,1)\cdot\frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}=(4,0,-2)\cdot\frac{(1,1,\sqrt{2})}{2}=2-\sqrt{2}$$

Teorema 29. *Se $f:U\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é uma função diferenciável em $P_0\in\operatorname{int.}(U)$ onde $\nabla f(P_0)\neq\vec{0}$, então o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ ocorre quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, sendo $\|\nabla f(P_0)\|$ este valor máximo.*

Demonstração. Segue de (8) que:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0) = \nabla f(P_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \left\| \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \right\| \cdot \cos(\theta) = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \cos(\theta)$$

onde θ é o ângulo entre $\nabla f(P_0)$ e $\vec{u}$.

Sendo assim, $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P_0)$ terá valor máximo quando $\theta = 0$, ou seja, quando $\vec{u}$ tem a direção e o sentido do vetor $\nabla f(P_0)$, e seu valor máximo é $\|\nabla f(P_0)\|$.

□

Exemplo 30. *Considere:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y,z) & \mapsto & \dfrac{xz}{x^2+y^2+1} \end{array}$$

Determinar:

(a) A direção de maior variação de f e a respectiva taxa no ponto $(1,0,-1)$;

(b) A taxa de variação de f no ponto $P = (1,0,-1)$ na direção do vetor $\vec{u} = \sigma'(t)$, onde $\sigma(t) = (t, 1+2t, -1+t)$

Solução: As derivadas parciais da função f são:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) = \frac{z \cdot (-x^2+y^2+1)}{(x^2+y^2+1)^2}, \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) = \frac{-2xyz}{(x^2+y^2+1)^2} \text{ e}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2+1}$$

Ad (a): Como f é diferenciável em $P = (1,0,-1)$ e $\nabla f(P) = \left(0,0,\frac{1}{2}\right) \neq \vec{0}$, o **Teorema 29** garante que a direção de maior variação de f em P é a do vetor $\vec{u} = \left(0,0,\frac{1}{2}\right)$ e a taxa de maior variação de f em P é $\|\nabla f(P)\| = \frac{1}{2}$.

Ad (b): Temos $\vec{u} = \sigma'(t) = (1,2,1)$, e usando (7), temos:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(P) = \nabla f(P) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(0,0,\frac{1}{2}\right) \cdot \frac{(1,2,1)}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{12}$$

Exemplo 31. *Seja $f(x,y) = x^2y$.*

(a) Determinar $\vec{u}$, unitário, de modo que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ seja máximo;

(b) Qual é o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$?

(c) Estando-se em $(1,1)$, que direção e sentido deve-se tomar para que f cresça mais rapidamente?

Solução: Temos:

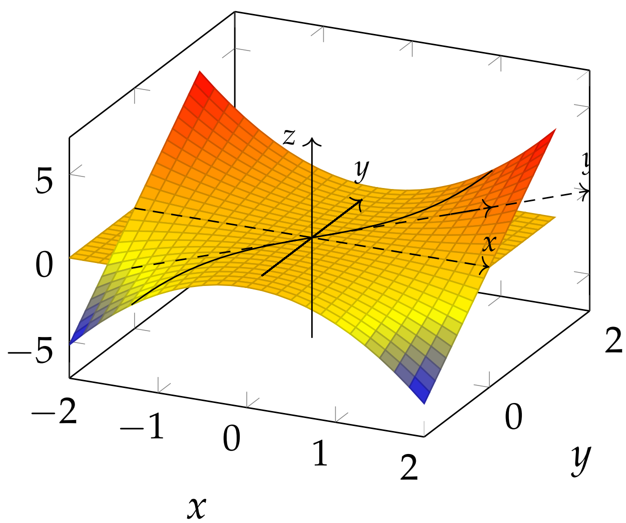
$$\nabla f(1,1) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(1,1), \frac{\partial f}{\partial y}(1,1)\right) = (2,1)$$

Ad (a): Como f, por ser polinomial, é diferenciável em $(1,1)$ e $\nabla f(1,1) \neq \vec{0}$, segue que $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ é máximo para $\vec{u} = \dfrac{\nabla f(1,1)}{\|\nabla f(1,1)\|}$, ou seja, $\vec{u} = \left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{\sqrt{5}}{5}\right)$.

Ad (b): O valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(1,1)$ é $\|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{5}$.

Ad (c): $\nabla f(1,1) = (2,1)$ aponta a direção e o sentido nos quais f cresce mais rapidamente em $(1,1)$.

$$z = x^2 y$$



Referências

[1] Pinto, D., Morgado, M.C.F. *Cálculo Diferencial e Integral de Funções de Várias Variáveis*, Editora UFRJ, 2014.

[2] Mendes, C. M., CÁLCULO III - NOTAS DE AULA, São Carlos, 1988. Cópia digital disponível em https://sites.icmc.usp.br/andcarva/sma332/claudio.pdf.

[3] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.