MAT 0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2021
Agenda 01

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

O Cálculo Diferencial e Integral trata, a *grosso modo*, do estudo das mudanças e das variações de distribuições de grandezas, que por sua vez podem ser matematicamente representadas por funções. O Cálculo descreve como essas distribuições de grandezas (funções), sejam elas escalares ou vetoriais, variam através de certas dimensões, como o espaço de dimensões 1, 2, 3 e o tempo, e até mesmo em relação umas às outras.

Na Oceanografia, por exemplo, podemos aplicar o Cálculo ao estudo da variação de distribuições de grandezas grandezas escalares, como temperatura, pressão, densidade, concentração de nutrientes e a salinidade do oceano, e de grandezas vetoriais, como as velocidades de suas correntes.

Em Astronomia, podemos aplicar o Cálculo ao estudo das órbitas dos planetas e à previsão de inúmeros fenômenos. À guisa de exemplo, munidos das técnicas do Cálculo Diferencial e Integral, podemos deduzir a partir da lei de gravitação de Newton[1] que a órbita de qualquer corpo em torno de um astro (como o Sol, ou mesmo a Terra) é uma secção cônica[2].

*jeancb@ime.usp.br

[1] Atualmente representamos a lei de gravitação universal de Newton pela fórmula:

$$\vec{F} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{u}_R,$$

onde G é a constante de gravitação universal (cujo valor é, aproximadamente, $6.67 \cdot 10^{-11} \mathrm{N} \cdot \mathrm{m}^2/\mathrm{kg}^2$), M e m são as massas dos corpos (dadas em quilogramas), r é a distância entre seus centros de massa (medida em metros) e $\vec{u}_R$ é o vetor que os une. Coloquialmente, esta lei nos diz, entre outras coisas, que o vetor força gravitacional tem magnitude diretamente proporcional ao produto das massas dos corpos e inversamente proporcional ao quadrado da distância entre seus centros de massa.

[2] fato conhecido como "Primeira Lei de Kepler"

Ao longo deste curso estudaremos e construiremos as ferramentas necessárias para o estudo da "dinâmica" das distribuições de grandezas, como os limites, as derivadas e as integrais. Neste curso, para fins didáticos, lidaremos apenas com variações de uma grandeza escalar com respeito a uma única variável, como por exemplo, a variação da temperatura ou da pressão da coluna de água do oceano em um ponto em termos de sua profundidade, ou da salinidade da água do oceano em um ponto de determinada reta.

Antes de estudarmos as variações, no entanto, precisamos estudar o que está variando. Em nosso caso, as "distribuições" de grandezas escalares (como a distribuição da pressão ao longo de uma reta vertical unindo a superfície ao leito do oceano) serão codificadas pelo conceito matemático de "função": em nosso exemplo, a cada ponto da reta associamos um, e apenas um valor numérico para a pressão – o que traduz totalmente as informações necessárias ao estudo do problema em apreço em termos matemáticos.

Para o estudo rigoroso das funções, será necessário darmos um passo para trás, concentrando-nos primeiramente no conceito de relação plana, do qual o conceito de função é um caso particular. Veremos como representar graficamente tais relações, e descreveremos características como a totalidade e a univocidade – bem como critérios geométricos para verificá-las.

Nesta primeira semana do curso estudaremos os conceitos de relação plana, apresentando o contexto onde surgirá o conceito moderno (e rigoroso) de função. Estudaremos as propriedades das funções de uma variável real a valores reais (ou seja, a valores escalares), concernentes à preservação ou inversão da ordem natural que existe em $\mathbb{R}$, à sua paridade, à sua limitação e periodicidade, bem como à injetividade e sobrejetividade.

Encerraremos apresentando as "operações" que podemos fazer com funções de uma variável real a valores reais, como a soma, o produto e a composição de funções, apresentando a definição e as propriedades de funções invertíveis e suas inversas.

1 Relações Planas (Relações sobre $\mathbb{R}^2$)

Começamos o curso introduzindo a noção fundamental de par ordenado, e com base nesta, a definição de relações entre conjuntos, concentrando-nos nas relações de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, também denominadas "relações planas".

Partiremos, como na maioria das teorias matemáticas, da noção de conjunto e de pertencimento. A definição de par ordenado apresentada abaixo, no âmbito da Teoria dos Conjuntos, foi dada pela primeira vez pelo matemático polonês Kazimierz Kuratowski, em 1921:

Definição 1 (par ordenado). *Sejam A e B dois conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. O* ***par ordenado de primeiro elemento*** *a* ***e segundo elemento*** *b é o conjunto $\{\{a\}, \{a, b\}\}$, que denotamos por (a, b).*

Em Matemática, é importante definir, juntamente com qualquer "ente", sua noção de igualdade.[3]. No caso caso em apreço, sendo conjuntos, dois pares ordenados serão iguais se, e somente se, tiverem os mesmos elementos.

A proposição abaixo nos permite decidir quando dois pares ordenados são efetivamente iguais analisando somente suas coordenadas:

Proposição 2. *Sejam A e B conjuntos, $a_1, a_2 \in A$ e $b_1, b_2 \in B$. Tem-se:*

$$(a_1, b_1) = (a_2, b_2) \iff (a_1 = a_2)\&(b_1 = b_2).$$

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $(a_1, b_1) = (a_2, b_2)$. Tem-se:

$$\begin{aligned} (a_1, b_1) &= \{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\} \\ (a_2, b_2) &= \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} \end{aligned}$$

$$\{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\} = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} \Rightarrow (\{a_1\} = \{a_2\})\&(\{a_1, b_1\} = \{a_2, b_2\}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \{a_1\} = \{a_2\} \ \text{ e} \\ \{a_1\} = \{a_2\} \text{ e } \{b_1\} = \{b_2\} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} \{a_1\} = \{a_2\} \ \text{ e} \\ \{a_1\} = \{b_2\} \text{ e } \{b_1\} = \{a_2\} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a_1 = a_2)\&(b_1 = b_2).$$

Reciprocamente, suponhamos $a_1 = a_2$ e $b_1 = b_2$. Tem-se:

$$(a_1, b_1) = \{\{a_1\}, \{a_1, b_1\}\} = \{\{a_2\}, \{a_2, b_2\}\} = (a_2, b_2).$$

□

Como consequência imediata da proposição acima, segue a:

Observação 3. *Sejam A e B conjuntos, $a \in A$ e $b \in B$. Se $a \neq b$ então $(a, b) \neq (b, a)$.*

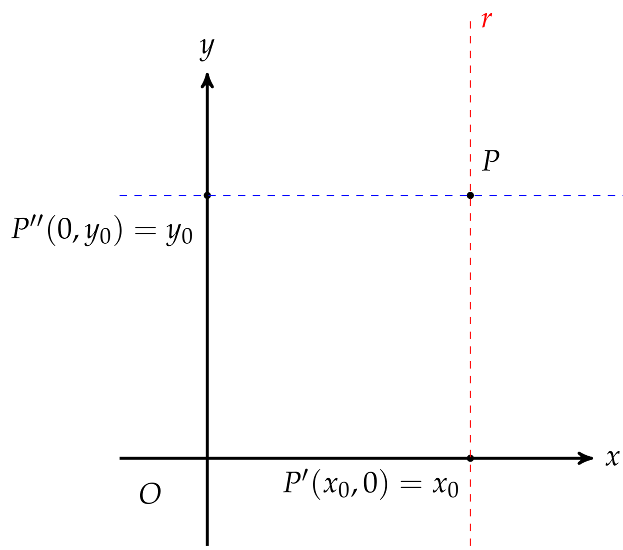
[3] "No entity without identity", diria Quine. Segundo sua filosofia, nenhum ente matemático realmente existe se não for declarado um critério de igualdade para tal.

1.1 Representação Geométrica

Nesta seção veremos como construir uma correspondência entre o conjunto de todos os pares ordenados de números reais e o plano geométrico. Para tanto, é necessário munir o plano de "eixos", como faremos em seguida.

Dado um plano qualquer, consideremos um eixo (ou seja, uma semirreta orientada, munida da escolha de um de seus pontos, denominado "origem", e denotado por O. Pode-se pensar nesta semirreta como sendo horizontal e orientada para a direita), que chamaremos de "eixo dos xx" e denotaremos por Ox. Efetuemos, em seguida, uma rotação de um ângulo de $\pi/2$ radianos desse eixo em torno de sua origem, O, no sentido anti-horário, de tal modo que o eixo sempre esteja contido no plano fixado. Ao novo eixo obtido desta forma chamaremos de "eixo dos yy" (que será uma semirreta orientada "para cima") e denotaremos por Oy. O par de eixos Ox e Oy, tendo por origem comum o ponto O, é denominado um **sistema de eixos cartesianos ortogonais** no plano xy com unidades iguais. Escreve-se: "sitema Oxy". Os eixos Ox e Oy, juntamente com o ponto O determinam o plano já referido, que denominamos por "plano xy". Estabeleceremos, agora, a relação que desejávamos.

Dado um par ordenado de números reais (x_0, y_0), sua primeira coordenada, x_0, pode ser representada sobre o eixo Ox por um ponto $P'(x_0, 0)$, situado a uma distância de $|x_0|$ unidades do ponto O sobre o eixo Ox, à direita de O, se $x_0 > 0$, e à esquerda de O, se $x_0 < 0$. A segunda coordenada, y_0, pode ser representada sobre o eixo dos yy pelo ponto $P''(0, y_0)$, situado a uma distância de $|y_0|$ unidades do ponto O, acima de O, se $y_0 > 0$, e abaixo de O, se $y_0 < 0$. Ao par $(0, 0)$ corresponderá o ponto O. Traçamos uma reta r, paralela ao eixo Oy passando pelo ponto $P'(x_0, 0)$, e uma reta s, paralela ao eixo Ox e passando por $P''(0, y_0)$. As retas r e s se interceptarão num ponto P, pertencente ao plano xy. Desta forma, a cada par ordenado de números reais, (a, b) fazemos corresponder um, e apenas um, ponto do plano geométrico (previamente munido de um sistema de coordenadas).



Por outro lado, dado um ponto P do plano xy, podemos traçar por este ponto uma paralela s ao eixo Ox, contendo o ponto P, e uma paralela r ao eixo Oy, também contendo o ponto P. A reta s interceptará o eixo Oy em um único ponto, P'', situado a uma distância $y_0 > 0$ de O, e a reta r interceptará o eixo Ox em um único ponto P', situado a uma distância $x_0 > 0$ de O. Temos quatro casos a considerar:

• Se r estiver à direita do eixo Oy e s acima do eixo Ox, diremos que P está no primeiro quadrante do plano xy e que suas coordenadas são (x_0, y_0).

• Se r estiver à esquerda do eixo Oy e s acima do eixo Ox, diremos que P está no segundo quadrante do plano xy e que suas coordenadas são $(-x_0, y_0)$.

• Se r estiver à esquerda do eixo Oy e s abaixo do eixo Ox, diremos que P está no terceiro quadrante do plano xy e que suas coordenadas são $(-x_0, -y_0)$.

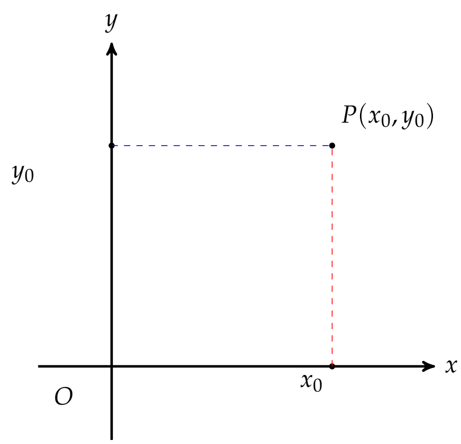
• Se r estiver à direita do eixo Oy e s abaixo do eixo Ox, diremos que P está no quarto quadrante do plano xy e que suas coordenadas são $(x_0, -y_0)$.

Desta forma, fazemos corresponder a cada ponto do plano (munido de um sistema de coordenadas) um, e apenas um, par ordenado.

Em virtude da correspondência descrita acima, temos para cada ponto P do plano xy um, e somente um par ordenado (x_0, y_0) de números reais, e a cada par ordenado de números reais, (x_0, y_0), um, e somente um ponto P do plano xy.

O ponto P, correspondente ao par ordenado (x_0, y_0) é denominado por **representação geométrica do par** (x_0, y_0).

Atenção: Para indicar que o ponto P corresponde ao par ordenada (x_0, y_0), escreveremos $P(x_0, y_0)$. Assim, $P(x_0, y_0)$ é um *predicado*, que significa "as coordenadas do ponto P são (x_0, y_0)".



1.2 Produto Cartesiano e Relações

A partir da noção de par ordenado podemos definir a noção de produto cartesiano, que será indispensável para definirmos relações e funções. Concentraremo-nos em produtos cartesianos de subconjuntos de $\mathbb{R}$, pois estes possuem uma representação geométrica facilmente apreensível.

Começamos com a seguinte:

Definição 4 (produto cartesiano). *Dados $A, B \subseteq \mathbb{R}$, o **produto cartesiano de A por B**, denotado por $A \times B$ (lê-se "A cartesiano B"), é o conjunto de todos os pares ordenados cuja primeira coordenada é um elemento de A e cuja segunda coordenada é um elemento de B. Simbolicamente:*

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A)\&(y \in B)\}$$

Exemplo 5. *Ao conjunto de todos os pares ordenados de números reais - ou seja, ao produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denominamos $\mathbb{R}^2$ (lê-se "$\mathbb{R}$-dois"). Assim,*

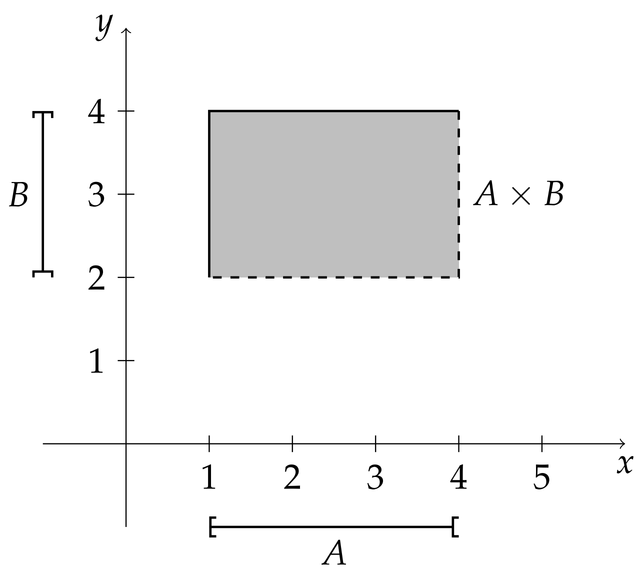
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{R})\&(y \in \mathbb{R})\}.$$

Ao longo do curso lidaremos com o produto cartesiano $\mathbb{R}^2$, que nos servirá de "contraparte algébrica do plano geométrico". Para visualizar este conceito, daremos alguns exemplos de produtos cartesianos de subconjuntos da reta real, $\mathbb{R}$, juntamente com suas representações geométricas.

Exemplo 6. *Sejam* $A = [1,4[$ *e* $B =]2,4]$. *Então:*

$$R = A \times B = [1,4[\times]2,4] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x < 4)\&(2 < y \leq 4)\}.$$

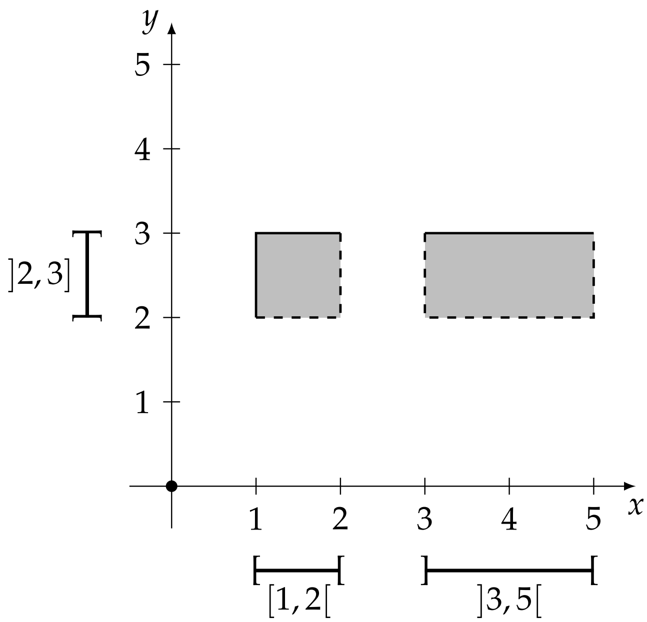
Sua representação gráfica é a região sombreada a seguir, incluindo pontos pertencentes às linhas "cheias" e excluindo pontos das linhas pontilhadas:



Exemplo 7. *Sejam* $A = [1,2[\cup]3,5[$ *e* $B =]2,3]$.

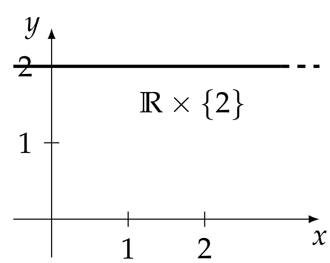
$$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [(1 \leq x < 2)\&(2 < y \leq 3)] \vee [(3 < x < 5)\&(2 < y \leq 3)]\}$$

Sua representação gráfica é a região sombreada a seguir, incluindo pontos pertencentes às linhas "cheias" e excluindo pontos das linhas pontilhadas:

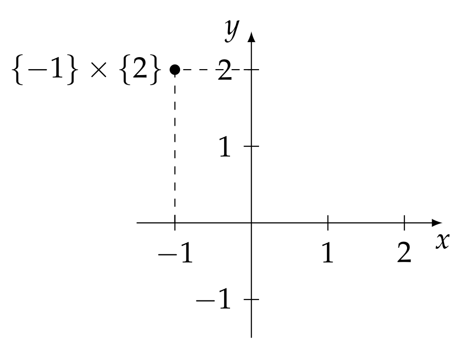


Exemplo 8. *Se* $A = \mathbb{R}$ *e* $B = \{2\}$*,* $A \times B = \mathbb{R} \times \{2\}$*.*

A representação gráfica de $A \times B$ *é a reta horizontal dada a seguir:*



Exemplo 9. $A = \{-1\}, B = \{2\}$*,* $A \times B = \{(-1, 2)\}$*. Sua representação gráfica é o ponto* $(-1, 2)$*, dado a seguir:*



A definição mais importante desta seção é a seguinte:

Definição 10 (relação). *Sejam A e B dois conjuntos quaisquer. Uma relação R de A em B é simplesmente um subconjunto de $A \times B$, ou seja, $R \subseteq A \times B$.*

Toda relação tem, no mínimo, dois "pedaços" característicos muito importantes: o domínio e o contradomínio, dados em seguida.

Definição 11 (domínio de definição). *Seja $R \subset A \times B$ uma relação qualquer. O **domínio de definição de** R é o conjunto:*

$$\text{dom}\,(R) = \{x \in A \mid (\exists y \in B)((x,y) \in R)\}.$$

Definição 12 (contradomínio). *Seja $R \subset A \times B$ uma relação qualquer. O **contradomínio de** R (ou **codomínio de** R) é o conjunto B. Escrevemos:*

$$\text{cod}\,(R) = B.$$

Dentro do contradomínio de qualquer relação, ainda temos o conjunto imagem, definido a seguir.

Definição 13 (conjunto imagem). *Seja $R \subset A \times B$ uma relação qualquer. O **conjunto imagem de** R é o conjunto:*

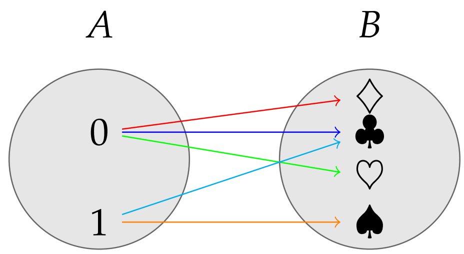
$$\text{im}\,(R) = \{y \in B \mid (\exists x \in A)((x,y) \in R)\}.$$

Exemplo 14. *Considere os conjuntos $A = \{0,1\}$ e $B = \{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$. O conjunto:*

$$R = \{(0,\diamondsuit), (0,\clubsuit), (0,\heartsuit), (1,\spadesuit), (1,\clubsuit)\} \subseteq \{0,1\} \times \{\diamondsuit, \clubsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$$

é uma relação de A em B, com $\text{dom}\,(R) = A$, $\text{cod}\,(R) = B$ *e* $\text{im}\,(R) = B$.

É conveniente representarmos relações entre conjuntos finitos por diagramas de conjuntos e flechas. Em um tal diagrama, o domínio de definição da relação e seu respectivo contradomínio são representados por "balões", e cada elemento (par ordenado) da relação é representado por uma seta. O primeiro elemento do par ordenado é representado pela "base" da seta, enquanto que o segundo elemento do par ordenado é representado pela "ponta" da seta. Assim, podemos representar a relação R, dada no **Exemplo 14**, pelo diagrama:



onde a seta de cada cor corresponde ao par ordenado de mesma coloração.

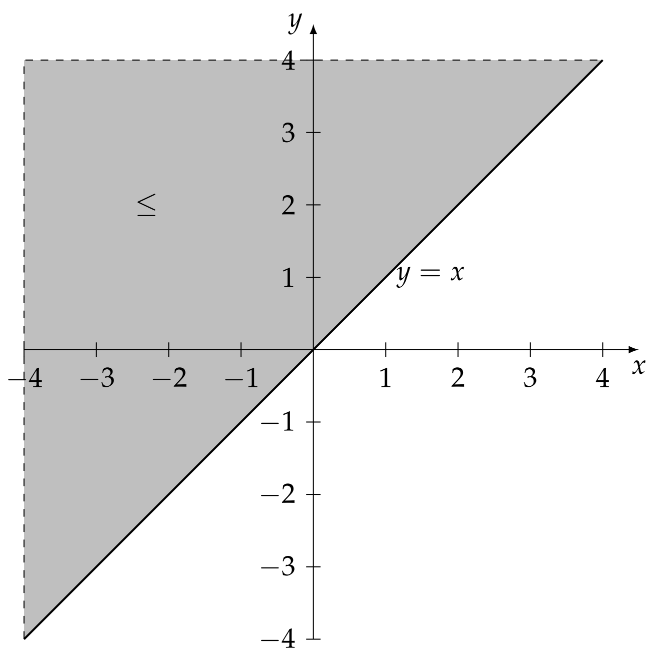
Ao longo deste curso será de particular importância o estudo de relações planas, ou seja, relações entre subconjuntos da reta real, conforme a seguinte:

Definição 15 (relação plana). *Uma **relação plana** R é um subconjunto* qualquer *de* $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Definição 16 (gráfico). *Dados conjuntos $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e uma relação plana $R \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, o **gráfico de** R é o conjunto:*

$$\mathrm{Graf}\,(R) = \{P(x,y) \in \textit{plano}\ xy \mid (x,y) \in R\} \subseteq \textit{plano}\ xy.$$

Exemplo 17. *O conjunto $\leq = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (\exists z \in \mathbb{R})(y - x = z^2)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma relação plana com* $\mathrm{dom}\,(\leq) = \mathbb{R} = \mathrm{cod}\,(\leq) = \mathrm{im}\,(\leq)$. *O gráfico de $\leq$ é a região sombreada representada abaixo:*



Certamente que o gráfico desta relação não se restringe apenas a esta diminuta região do plano: ao contrário, a região sombreada se estende para cima e para a esquerda indefinidamente. Como é impossível fazer um tal desenho, deixamos o gráfico subentendido ao pontilhar os segmentos de reta vertical e horizontal que delimitam nossa região sombreada.

Sempre que $(x, y) \in \leq$, escreveremos $x \leq y$. Assim, por exemplo, escrevemos $-1 \leq 1$ e $-2 \leq 1$ para denotar $(-1, 1) \in \leq$ e $(-2, 1) \in \leq$, respectivamente.

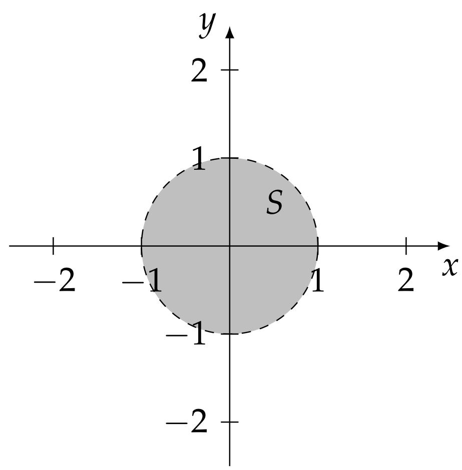
Exemplo 18. *Todos os conjuntos descritos nos* ***Exemplos 6, 7, 8*** *e* ***9*** *são relações planas.*

Exemplo 19. *O conjunto do qual nada é elemento, ou seja, o conjunto vazio, $\varnothing$ é uma relação plana, pois está contido em qualquer conjunto, e em particular satisfaz $\varnothing \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.*

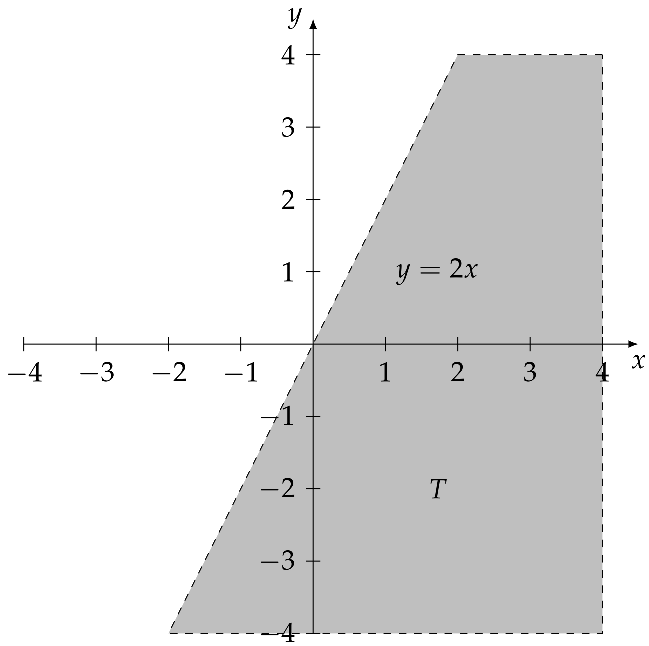
Conforme ilustrado no **Exemplo 17**, quando tratamos de relações, convém nos utilizarmos de uma notação ligeiramente diferente para indicar a pertinência de pares ordenados, como vemos na seguinte:

Observação 20. *Seja $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ uma relação plana. Escrevemos xRy para denotar $(x, y) \in R$, e dizemos "x está na relação R com y".*

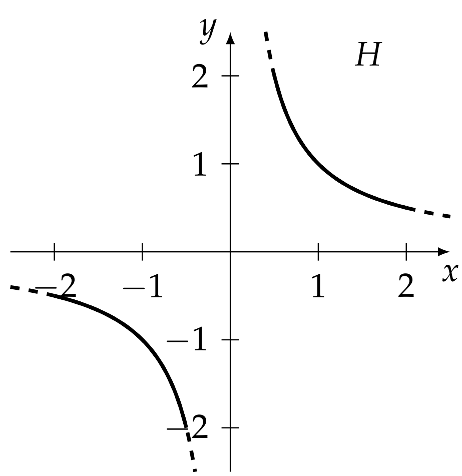
Exemplo 21. *O conjunto: $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma relação plana com* $\mathrm{dom}\,(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} =]-1, 1[$ *e* $\mathrm{im}\,(S) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1\} =]-1, 1[$. *O gráfico desta relação está dado na figura a seguir, pela região sombreada:*



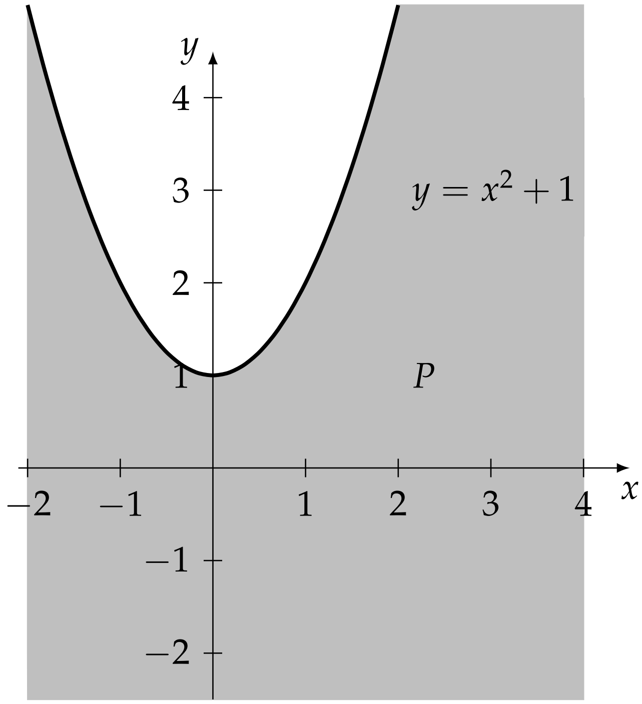
Exemplo 22. *O conjunto $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x > y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ é uma relação plana com* $\mathrm{dom}\,(T) = \mathbb{R}$ *e* $\mathrm{im}\,(T) = \mathbb{R}$. *Uma porção (finita) do gráfico de T está representada na figura abaixo, como a região sobreada:*



Exemplo 23. *O conjunto* $H = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* $\operatorname{dom}(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*,* $\operatorname{im}(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, cujo gráfico no plano (uma porção finita representativa dele) é dado abaixo:*



Exemplo 24. *O conjunto* $P = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x^2 + 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* $\operatorname{dom}(P) = \mathbb{R}$ *e* $\operatorname{im}(P) = \mathbb{R}$*, cujo gráfico (uma porção finita representativa dele) é representado pela região sombreada abaixo, incluindo a parábola* $y = x^2 + 1$*:*



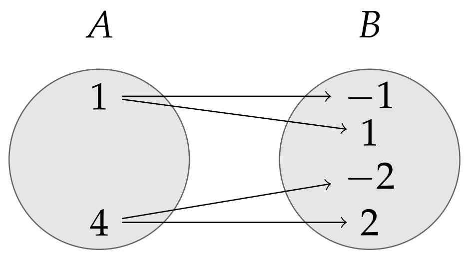
Definição 25 (relação total). *Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação $R \subseteq A \times B$ é **total** se para todo $a \in A$ existir $b \in B$ tal que aRb. Simbolicamente, R é total se, e somente se:*

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb).$$

Observação 26. *Ao longo deste curso usaremos certos símbolos que ocorrerão com certa frequência, de modo que convém fazermos certas elucidações sobre notação. O símbolo "$\forall$" (trata-se de uma letra A [a inicial da palavra inglesa "all"] de ponta-cabeça) é denominado o **"quantificador universal"**, e pode ser lido como "para qualquer que seja". Assim, lemos $(\forall a \in A)$ como "para qualquer que seja $a \in A$". Por sua vez, o símbolo "$\exists$" (trata-se de uma letra E [inicial da palavra inglesa "exists"] de ponta-cabeça) é denominado "**quantificador existencial**", e pode ser lido como "existe pelo menos um". Assim, lemos $(\exists b \in B)$ como "existe pelo menos um $b \in B$". Os "bloquinhos" de forma $(\forall a \in A)$ e $(\exists b \in B)$ serão denominados por nós como "expressões de quantificação". A fórmula φ, que colocamos depois das expressões de quantificação, deve ser lida de uma das seguintes formas: se φ for uma implicação [*i.e.*, uma fórmula do tipo $\alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, da forma "se ocorrer $\cdots$ então $\cdots$"], lê-se simplesmente a própria implicação. Se φ não for uma implicação, nós a lemos como se estivesse precedida da locução "tal que". Assim, na **Definição 25**, lemos $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$ como "para qualquer que seja $a \in A$, existe pelo menos um $b \in B$ tal que aRb".*

Exemplo 27. *Dados $A = \{1, 4\}$ e $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, a relação $R = \{(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$ é total.*

Neste caso, é mais fácil, em certos casos, determinar se uma relação é total analisando sua representação diagramática:



Note que na representação de R por setas e balões é tal que a todo elemento do domínio A corresponde pelo menos um elemento de B.

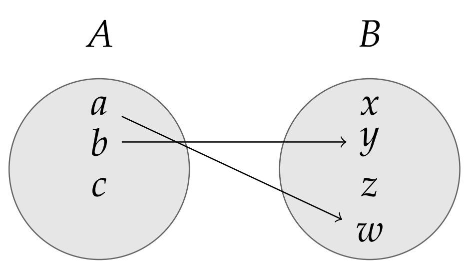
Nota-se que no diagrama acima, todos os elementos do domínio (A) são base de alguma seta da relação: ou seja, todos os elementos de A constam como primeira coordenada de algum par ordenado da relação.

Definição 28 (relação unívoca). *Sejam A e B dois conjuntos e $R \subseteq A \times B$ uma relação. Dizemos que S é uma **relação unívoca** se para todo $a \in A$ existe no máximo um elemento $b \in B$ tal que aSb. Simbolicamente, S é unívoca se, e somente se:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall b' \in B)(((aSb)\&(aSb')) \Rightarrow (b = b'))$$

Observação 29. *Lemos $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall b' \in B)(((aSb)\&(aSb')) \Rightarrow (b = b'))$ como: "para qualquer que seja $a \in A$, para qualquer que seja $b \in B$ e para qualquer que seja $b' \in B$, se aSb e aSb' então $b = b'$". O que isto significa é simplesmente que, para qualquer que seja o elemento $a \in A$, se a estiver relacionado com elementos $b, b' \in B$, então obrigatoriamente $b = b'$ - ou seja, todos os elementos do domínio estão relacionados a apenas um elemento do contradomínio, B.*

Exemplo 30. *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z, w\}$. A relação $S = \{(a, w), (b, y)\}$ é uma relação unívoca, uma vez que a cada elemento de A corresponde, no máximo, um elemento de B. É mais fácil, em certos casos, determinar se uma relação é unívoca analisando sua representação diagramática:*



Nota-se que no diagrama acima, que de cada elemento do domínio (A) é base de no máximo uma seta da relação: ou seja, a qualquer elemento de A corresponde, no máximo, um elemento de B.

Pergunta: A relação dada no **Exemplo 27** é unívoca? A relação do **Exemplo 30** é total? Justifique.

Resposta: A relação R dada no **Exemplo 27** não é unívoca. Para nos convencermos disto, basta observarmos que há elementos no domínio aos quais correspondem mais do que um elemento do contradomínio: como $(1, -1), (1, 1)$ estão ambos na relação, segue que ao elemento 1 correspondem dois elementos do contradomínio, e portanto não é unívoca.

Por sua vez, a relação S dada no **Exemplo 30** não é total, uma vez que há elemento do domínio que não corresponde a nenhum elemento do contradomínio: não há nenhum par na relação cuja primeira coordenada seja c.

2 Funções

O Cálculo Diferencial e Integral pode ser visto, a *grosso modo*, como o ramo da Matemática que estuda funções. O conceito de função, embora usado pela primeira vez em Matemática por Leibniz em 1673, é relativamente novo na Matemática. Em 1718, Bernoulli publicou um artigo contendo a definição dele de "função de uma variável", que era "uma quantidade composta, de algum modo, por constantes e por aquela variável". Euler, posteriormente, adicionou o termo "expressão analítica" no lugar do termo "quantidade", usado por Bernoulli. Deste modo, durante muito tempo, a noção de função esteve atrelada à noção de uma "expressão analítica" que a definisse. Uma função era entendida como uma correspondência entre variáveis *sempre* dada por fórmulas, como por exemplo:

$$y = 3x^2 - 7x + 1 \text{ ou } y = x\sqrt{x^2 + 1}.$$

Colocada desta forma, a noção de função passou a manifestar diversas incoerências: por exemplo, duas fórmulas analíticas que resultassem no mesmo resultado seriam correspondentes a uma mesma função? (pense, por exemplo, nas expressões $y = |x|$ e $y = \sqrt{x^2}$). Aquela noção antiga de função também estava impregnada de muitas limitações: por exemplo, para Euler, toda função teria que ser o que hoje conhecemos como função contínua, o que excluía muitas funções definidas por partes.

Pode-se dizer que o problema em se definir claramente o que é uma função surgiu como uma necessidade de se responder a questões importantes acerca de certas séries trigonométricas. Foi somente em 1837 que Dirichlet separou o conceito de "função" de sua "expressão analítica". A partir de então, uma função passa a ser uma correspondência entre duas variáveis que, a qualquer valor da variável independente fazia corresponder um, e apenas um valor da variável dependente. Estudaremos isto em detalhes nesta seção.

Definição 31 (função). *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação $f \subseteq A \times B$ denomina-se* ***função*** *se, e somente se:*

(F1) *f é uma relação* total *(sem exceções):*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x,y) \in f);$$

(F2) *f é uma relação* unívoca *(sem ambiguidades):*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in B)((((x,y) \in f)\&((x,z) \in f)) \Rightarrow (y = z)).$$

Utilizamos as notações $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ para expressar que $f \subseteq A \times B$ é uma função.

Em se tratando de funções, ao invés de escrevermos $(x,y) \in f$, escrevemos $f(x) = y$. Dizemos ainda que x é a **variável independente** da função e que y é a **variável dependente**. Assim, as condições da **Definição 31** se escrevem:

(F1) f é uma relação *total* (sem exceções):

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(y = f(x));$$

Coloquialmente: a todo valor atribuído à variável independente (x) corresponde pelo menos um valor da variável dependente (y).

(F2) f é uma relação *unívoca* (sem ambiguidades):

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in B)(((f(x) = y)\&(f(x) = z)) \Rightarrow (y = z)).$$

Coloquialmente: a todo valor atribuído à variável independente, x, corresponde no máximo um valor da variável dependente (y).

Exemplo 32. *Seja A um conjunto. A* ***relação identidade de*** *A é a função com domínio e contradomínio iguais a A e que, a cada elemento $a \in A$ faz corresponder $a \in A$. Nos a denotamos por* id_A.

Exemplo 33. *Note que a relação dada no* ***Exemplo 14*** *não é uma função. De fato, apesar de satisfazer a cláusula (F1) (trata-se de uma relação total, ou seja, "sem exceções"), R não satisfaz a cláusula (F2). Isto pode ser verificado facilmente, observando que $(0,\diamondsuit),(0,\clubsuit),(0,\heartsuit) \in R$ – ou seja, a um mesmo elemento do domínio (neste caso, 0) corresponde mais do que um elemento do contradomínio: neste caso, os elementos $\diamondsuit, \clubsuit$ e $\heartsuit$.*

Pergunta: O domínio de uma função pode ser o conjunto vazio? E o contradomínio? Justifique.

Resposta: O domínio de uma função pode ser o conjunto vazio, uma vez que as cláusulas (F1) e (F2) que uma relação deve satisfazer para ser função nos exigem que todos os valores do domínio satisfaçam certa propriedade. Se o domínio da relação é vazio, não há nenhum elemento do domínio que infrinja a cláusula (F1) ou a cláusula (F2). Como não há nenhuma "testemunha" de que a relação em apreço não é função, dizemos que as cláusulas (F1) e (F2) valem por vacuidade.

Por outro lado, o contradomínio de uma função não pode ser o conjunto vazio. Se uma relação tem contradomínio vazio, ela não pode ser total, pois não corresponderá a nenhum elemento do domínio qualquer elemento do contradomínio.

Ainda com as notações da **Definição 31**, sendo f uma relação, segue-se que seu domínio de definição é:

$$\operatorname{dom}(f) = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(y = f(x))\}$$

e sua imagem é:

$$\operatorname{im}(f) = f[A] = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\},$$

ou seja, é o conjunto de todos os valores do contradomínio que "são oriundos" de algum elemento do domínio.

Definição 34. *Sejam A e B conjuntos, e $f : A \to B$ uma função. Dado qualquer subconjunto $C \subseteq B$, a **pré-imagem de** C **por** f (ou **a imagem inversa de** C **por** f) é o conjunto:*

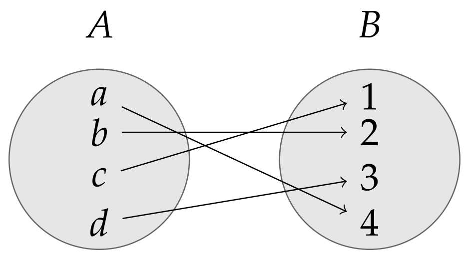
$$f^{\dashv}[C] = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \subseteq A.$$

Em linguagem coloquial, a pré-imagem (ou imagem inversa) de $C \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são "levados" por f em algum elemento de C.

Exemplo 35. *Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, e considere a relação:*

$$f = \{(a, 4), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\},$$

que pode ser esquematizada pelo diagrama:



f é uma função. Com efeito, a todo elemento de A corresponde pelo menos um elemento de B (ao elemento a corresponde o elemento 4, ao elemento b corresponde o elemento 2, ao elemento c corresponde o elemento 1 e ao elemento d corresponde o elemento 3), de modo que f cumpre a cláusula (F1). Ademais, a todo elemento de A corresponde um único elemento de B (ao elemento a corresponde somente o elemento 4, ao elemento b corresponde somente o elemento 2, ao elemento c corresponde somente o elemento 1 e ao elemento d corresponde somente o elemento 3), de modo que f também cumpre a cláusula (F2) e, portanto, é função.

Neste exemplo, tem-se:

$$\operatorname{dom}(f) = \{a, b, c, d\} = A \ \ e \ \ \operatorname{cod}(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

O conjunto-imagem de f é o conjunto de todos os elementos do contradomínio que são oriundos de algum elemento do domínio. Assim, $1 \in f[A]$, pois 1 é oriundo, por f, de c (isto é, $f(c) = 1$), $2 \in f[A]$, pois 2 é oriundo, por f, de b (isto é, $f(b) = 2$), $3 \in f[A]$, pois 3 é oriundo, por f, de d (isto é, $f(d) = 3$) e $4 \in f[A]$, pois 4 é oriundo, por f, de a (isto é, $f(a) = 4$). Assim,

$$f[A] = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Vamos determinar a pré-imagem dos seguntes subconjuntos de B: $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$.

A pré-imagem de $\{1\} \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, em algum elemento de $\{1\}$ - neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, no elemento 1. Assim,$a \notin f^{\dashv}[\{1\}]$, pois $f(a) = 4 \neq 1$, $b \notin f^{\dashv}[\{1\}]$, pois $f(b) = 2 \neq 1$, $c \in f^{\dashv}[\{1\}]$, pois $f(c) = 1$ e $d \notin f^{\dashv}[\{1\}]$, pois $f(d) = 3 \neq 1$. Logo, $f^{\dashv}[\{1\}] = \{c\}$.

A pré-imagem de $\{1, 2\} \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, em algum elemento de $\{1, 2\}$ - neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, no elemento 1 ou no elemento 2. Assim,$a \notin f^{\dashv}[\{1, 2\}]$, pois $f(a) = 4 \neq 1$ e $f(a) = 4 \neq 2$, $b \in f^{\dashv}[\{1, 2\}]$, pois $f(b) = 2 \in \{1, 2\}$, $c \in f^{\dashv}[\{1, 2\}]$, pois $f(c) = 1 \in \{1, 2\}$ e $d \notin f^{\dashv}[\{1, 2\}]$, pois $f(d) = 3 \neq 1$ e $f(d) = 3 \neq 2$. Logo, $f^{\dashv}[\{1, 2\}] = \{b, c\}$.

A pré-imagem de $\{2, 4\} \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, em algum elemento de $\{2, 4\}$ - neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, no elemento 2 ou no elemento 4. Assim,$a \in f^{\dashv}[\{1, 2\}]$, pois

$f(a) = 4 \in \{2,4\}$, $b \in f^{\dashv}[\{1,2\}]$, pois $f(b) = 2 \in \{2,4\}$, $c \notin f^{\dashv}[\{2,4\}]$, pois $f(c) = 1 \notin \{2,4\}$ e $d \notin f^{\dashv}[\{2,4\}]$, pois $f(d) = 3 \notin \{2,4\}$. Logo, $f^{\dashv}[\{2,4\}] = \{a,b\}$.

Finalmente, a pré-imagem de $\{2,3,4\} \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, em algum elemento de $\{2,3,4\}$ - neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por f, no elemento 2, no elemento 3 ou no elemento 4. Assim,$a \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$, pois $f(a) = 4 \in \{2,3,4\}$, $b \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$, pois $f(b) = 2 \in \{2,3,4\}$, $c \notin f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$, pois $f(c) = 1 \notin \{2,3,4\}$ e $d \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$, pois $f(d) = 3 \in \{2,3,4\}$. Logo, $f^{\dashv}[\{2,4\}] = \{a,b,d\}$.

Funções, portanto, subentendem <u>três</u> dados: um **domínio de definição** (conjunto de saída), um **contradomínio** (conjunto de chegada) e uma **regra**, que a cada elemento do domínio de definição associa um, e somente um elemento do contradomínio. Esta regra não precisa ser uma fórmula matemática fechada. Considere, por exemplo, a função $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ que é tal que $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7, f(5) = 11, f(6) = 13, \cdots, f(n) = n-$ésimo número primo. Esta função não admite uma "fórmula analítica fechada", ou seja, uma fórmula $\varphi(n)$ que nos permita calcular, para qualquer n, o $n-$ésimo número primo simplesmente por substituição de n em φ, $\varphi(n)$. No entanto, f é função, pois a cada número natural corresponde um, e somente um número primo.

Em virtude de ser uma "amálgama" de três informações (um conjunto denominado "domínio", um conjunto denominado "contradomínio" e uma "lei" que associe a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio), usamos uma notação especial para denotar uma função cujo domínio de definição é A, cujo contradomínio é B e cuja "lei" é $x \mapsto f(x)$, a saber:

$$f: \begin{array}{ccc} \overbrace{A}^{\text{dom }(f)} & \to & \overbrace{B}^{\text{cod }(f)} \\ x & \mapsto & \underbrace{y = f(x)}_{\text{regra}} \end{array}$$

que traz <u>todas</u> as informações que individuam a função.

Em posse de todos os dados que determinam uma função, podemos dizer quando duas funções são iguais:

Definição 36. *Duas funções são iguais se, e somente se, tiverem a mesma lei, o mesmo domínio e o mesmo contradomínio.*

Exemplo 37. *Respondendo ao questionamento feito na introdução desta seção, temos que as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

são iguais, uma vez que $\mathrm{dom}\,(f) = \mathbb{R} = \mathrm{dom}\,(g)$, $\mathrm{cod}\,(f) = \mathbb{R} = \mathrm{cod}\,(g)$ *e:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)).$$

Exemplo 38. *As funções:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

e:

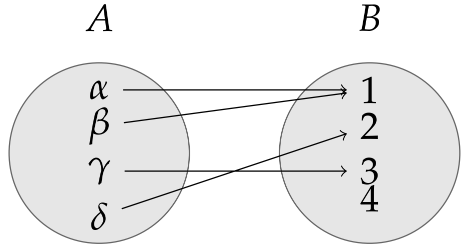
$$\begin{array}{rccc} \ell: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

são <u>diferentes</u>, uma vez que embora tenhamos $\mathrm{dom}\,(h) = \mathbb{R} = \mathrm{dom}\,(\ell)$ *e* $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) = |x| = \sqrt{x^2} = \ell(x))$*, temos* $\mathrm{cod}\,(h) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R} = \mathrm{cod}\,(\ell)$.

Exemplo 39. *Sejam* $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$*. A função de* A *em* B *dada por* $f = \{(\alpha, 1), (\beta, 1), (\gamma, 3), (\delta, 2)\}$ *é denotada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & \alpha & \mapsto & 1 \\ & \beta & \mapsto & 1 \\ & \gamma & \mapsto & 3 \\ & \delta & \mapsto & 2 \end{array}$$

e diagramaticamente representada por:



Note que: $f^{\dashv}[\{1\}] = \{\alpha, \beta\}$, *uma vez que* $f(\alpha) = 1 \in \{1\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \in \{1\}$ *(logo* $\beta \in f^{\dashv}[\{1\}]$*), mas* $f(\gamma) = 3 \notin \{1\}, f(\delta) = 2 \notin \{1\}$ *(logo* $\gamma, \delta \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*);*

Também, $f^{\dashv}[\{2\}] = \{\delta\}$, *pois* $f(\alpha) = 1 \notin \{2\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \notin \{2\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \notin \{2\}$ *(logo* $\gamma \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \in \{2\}$ *(logo* $\delta \in f^{\dashv}[\{2\}]$*);*

Vale que $f^{\dashv}[\{3\}] = \{\gamma\}$, *pois* $f(\alpha) = 1 \notin \{3\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \notin \{3\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \in \{3\}$ *(logo* $\gamma \in f^{\dashv}[\{3\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \notin \{3\}$ *(logo* $\delta \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*);*

Temos $f^{\dashv}[\{4\}] = \varnothing$, *uma vez que* $f(\alpha) = 1 \notin \{4\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*),* $f(\beta) = 1 \notin \{4\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \notin \{4\}$ *(logo* $\gamma \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \notin \{4\}$ *(portanto* $\delta \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*).*

Também tem-se $\operatorname{im}(f) = f[A] = \{1, 2, 3\}$, *pois* $1 = f(\alpha) = f(\beta)$, $2 = f(\delta)$, $3 = f(\gamma)$ *e* 4 *<u>não</u> é oriundo de nenhum dos elementos do domínio.*

Observação 40. *Com nossas notações atuais, a função identidade de um conjunto* A*, dada no* ***Exemplo 32*** *é denotada por:*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_A: & A & \to & A \\ & a & \mapsto & a \end{array}$$

Trata-se, de fato, de uma função, uma vez que a <u>todo</u> elemento $a \in A$ *corresponde um único elemento do contradomínio, a saber,* $a \in A$.

2.1 Funções de Uma Variável Real a Valores Reais

Nesta seção começamos a estudar o conceito que protagoniza o curso de Cálculo Diferencial e Integral, a saber, o de função de uma variável real a valores reais.

Em virtude da "robustez estrutural" de $\mathbb{R}^2$, pode-se estudar inúmeros aspectos destas funções, bem como interpretá-los de um modo geométrico, e portanto mais "palatável".

Começamos apresentando sua definição e expressando um modo de interpretá-las geometricamente mediante seus gráficos. Veremos como identificar se certas regiões planas são ou não gráficos de funções.

Definição 41 (função de uma variável real a valores reais). *Uma função* $f : A \to B$ *é uma* ***função de uma variável real a valores reais*** *se, e somente se* $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ *e* f *é uma função.*

Como exemplo de uma função de uma variável real a valores reais, temos a relação H, dada no **Exemplo 23**. Nos demais exemplos não temos funções de uma variável real a valores reais, pois a cada valor de x correspondem infinitos valores pelas respectivas relações.

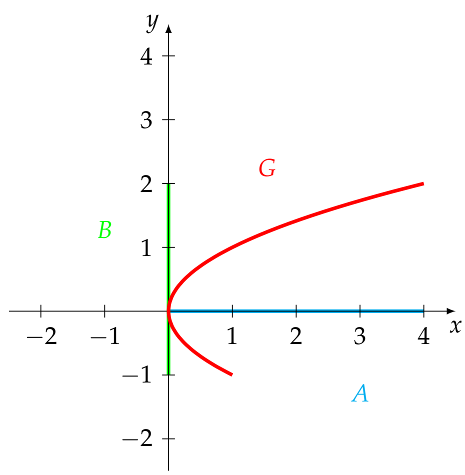
Como um teste para verificar se certa região do plano é ou não gráfico de função, temos a seguinte:

Proposição 42 (Critério Geométrico para Gráfico de Função). *Seja $R \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano. R é gráfico de uma função com domínio A e contradomínio B se, e somente se, toda reta vertical (paralela ao eixo Oy) contendo o ponto $(a, 0)$, para todo $a \in A$, intercepta R em exatamente um ponto;*

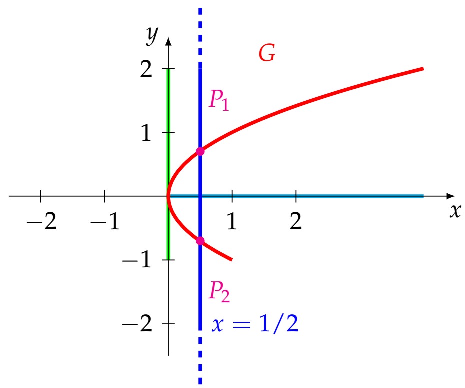
Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $R \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ seja gráfico de função. Dado qualquer $a \in A$, sendo R gráfico de função, existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Logo, a interseção de qualquer reta vertical de equação $x = a$ intercepta R em exatamente um ponto de R.

Reciprocamente, suponhamos que toda reta vertical (paralela ao eixo Oy) contendo o ponto $(a, 0)$, para todo $a \in A$, intercepte R em exatamente um ponto. Dado qualquer $a \in R$, a reta de equação $x = a$ intercepta R em (por hipótese) exatamente um ponto, obrigatoriamente da forma (a, b) para algum $b \in B$. Como a cada ponto de a corresponde um único ponto de b por R, segue que R é, de fato, gráfico de uma função de uma variável real a valores reais. $\square$

Consideremos os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 2\}$, e a região G do plano esboçada abaixo:

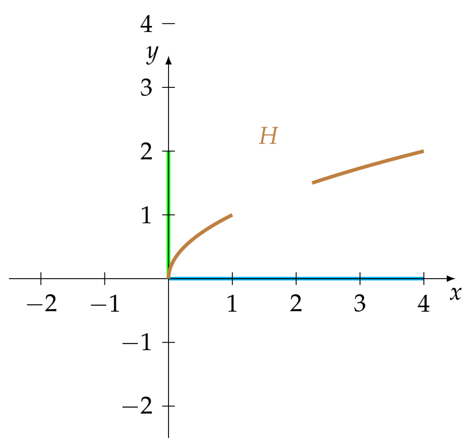


A região G acima, esboçada em vermelho, não é gráfico de nenhuma função de domínio A e contradomínio B, uma vez que não satisfaz o critério estabelecido na **Proposição 42**. De fato, tem-se $\frac{1}{2} \in A$ mas a reta de equação $x = 1/2$ intercepta G em dois pontos, P_1 e P_2, de modo que G não cumpre a cláusula (F2):

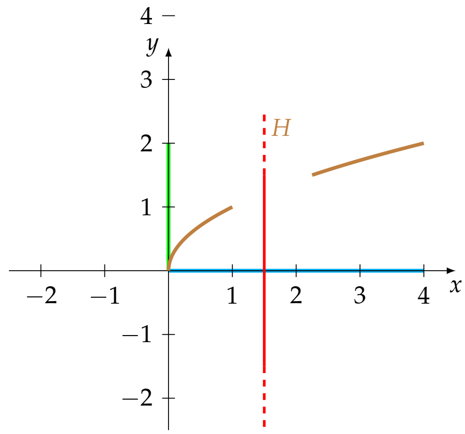


Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ os pontos $(y_1 \neq y_2)$ tais que $P_1(1/2, y_1)$ e $P_2(1/2, y_2)$. De fato, pelo exposto acima, como $(1/2, y_1), (1/2, y_2) \in G$ e $y_1 \neq y_2$, segue que G não representa nenhuma função de domínio A e contradomínio B.

Consideremos agora a seguinte região H do plano xy:



e consideremos os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$. Vamos aplicar o **Critério Geométrico para Gráfico de Função** a fim de decidir se H é gráfico de alguma função de domínio A e contradomínio B.



Aqui notamos que existe $a \in A$ - a saber, $a = \frac{3}{2}$, tal que a reta vertical $x = \frac{3}{2}$ não intercepta H em nenhum ponto. H não representa uma função de A em B porque não representa uma relação total: ao ponto $\frac{3}{2} \in A$ não corresponde nenhum elemento de B, logo não se cumpre a cláusula (F1).

Como já mencionado, ao longo deste curso trabalharemos apenas com funções de uma variável real a valores reais. Será comum nos depararmos com "expressões" que subentendem funções, como por exemplo $y = \sqrt{x}$ ou $y = \frac{1}{x}$, sem que o domínio ou o contradomínio estejam devidamente explicitados. Nestes casos, recorremos à seguinte:

Observação 43. *Quando o domínio de uma função não é dado explicitamente, convencionamos que este seja o* maior *subconjunto de* $\mathbb{R}$ *no qual a função* f *pode ser definida. Quanto ao contradomínio, se não for explicitado, convencionaremos ser* $\mathbb{R}$.

Exemplo 44. (1) *O domínio da função dada por* $f(x) = x^2$ *é* $\mathbb{R}$, *pois para qualquer* $x \in \mathbb{R}$ *tem-se* $x^2 \in \mathbb{R}$;

(2) *O domínio da função dada por* $f(x) = \sqrt{x}$ *é* $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$, *pois tem-se* $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $x \in \mathbb{R}$;

(3) *O domínio da função dada por* $f(x) = \dfrac{1}{x}$ *é* $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, *pois tem-se* $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ *se, e somente se,* $x \neq 0$;

Exemplo 45. *Determine o domínio de definição das funções dadas pelas seguintes leis:*

(a) $f(x) = x/(x-1)$;

(b) $y = 2/(x^2 + x)$;

(c) $f(x) = \sqrt{x-3}$;

(d) $y = \sqrt{6-2x}$.

Solução:

Ad (a): para determinarmos o domínio de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x, nos fornecerão um número real. No caso em apreço há somente uma obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 1 = 0$ (afinal, não existe divisão por zero). O único óbice, portanto, é $x = 1$. Assim, dom $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ad (b): para determinarmos o domínio de $y = \frac{2}{x^2+x}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x, nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + x = 0$ (afinal, não existe divisão por zero). Mas $x^2 + x = x(x+1)$, de modo que $x^2 + x = x(x+1) = 0$ ocorre se, e somente se $x = 0$ ou $x = -1$. Assim, dom $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \neq 0) \& (x \neq -1)\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Ad (c): para determinarmos o domínio de $f(x) = \sqrt{x-3}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x, nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 3 < 0$ (afinal, a raiz quadrada de um número estritamente menor do que zero não é um número real). Logo, o domínio de f consistirá de todos os valores "atribuíveis" a x tais que $x - 3 \geq 0$, o que ocorre se, e somente se $x \geq 3$. Assim, dom $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq 3)\} = [3, \infty[$.

Ad (d): para determinarmos o domínio de $y = \sqrt{6-2x}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x, nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $6 - 2x < 0$ (afinal, a raiz quadrada de um número estritamente menor do que zero não é um número real). Logo, o domínio de y consistirá de todos os valores "atribuíveis" a x tais que $6 - 2x \geq 0$, o que ocorre se, e somente se $x \leq 3$. Assim, dom $(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq 3)\} =]-\infty, 3]$.

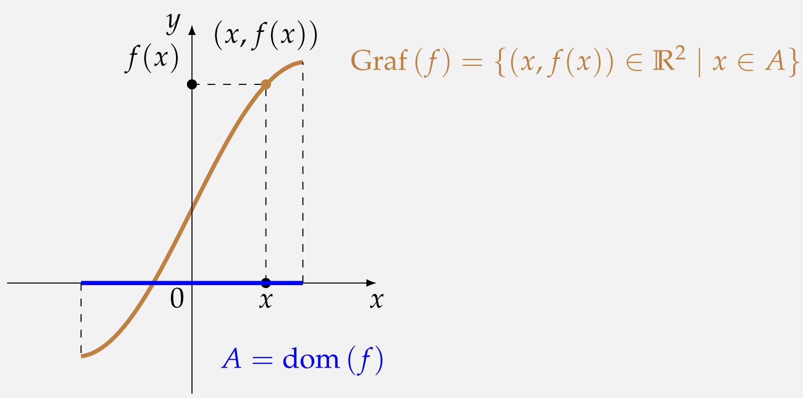
Um objeto geométrico que protagoniza o estudo das funções, permitindo-nos deduzir diversas de suas propriedades, é o dado na seguinte:

Definição 46 (gráfico de uma função de uma variável real a valores reais). *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. O **gráfico de** f é o seguinte subconjunto do plano xy:*

$$\operatorname{Graf}(f) = \{P(x,y) \in \textit{plano } xy \mid y = f(x)\} \subseteq \textit{plano } xy$$

Uma vez que o plano xy é identificado com $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, que doravante passaremos a denotar simplesmente por $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\operatorname{Graf}(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \operatorname{dom}(f) = A\}.$$



2.1.1 Preservação e Inversão da Ordem.

Sabemos que em $\mathbb{R}$ está naturalmente munido de uma relação de ordem dada por:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(0 \leq x \iff (\exists y \in \mathbb{R})(x = y^2))$$

Outrossim, escrevemos $x \leq y$ para denotar o fato de termos $0 \leq y - x$. Também, $x < y$ significa que se tem, simultaneamente $x \leq y$ e $x \neq y$.

Classificamos, a seguir, funções com domínio e contradomínio em subconjuntos de $\mathbb{R}$ de acordo com a propriedade de preservarem ou inverterem a ordem dos elementos de seu domínio.

Definição 47. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $f : A \to B$ uma função.*

(1) *f é **não decrescente** se, e somente se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \leq a_2 \Rightarrow f(a_1) \leq f(a_2)$;*

(2) *f é **não crescente** se, e somente se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \leq a_2 \Rightarrow f(a_2) \leq f(a_1)$;*

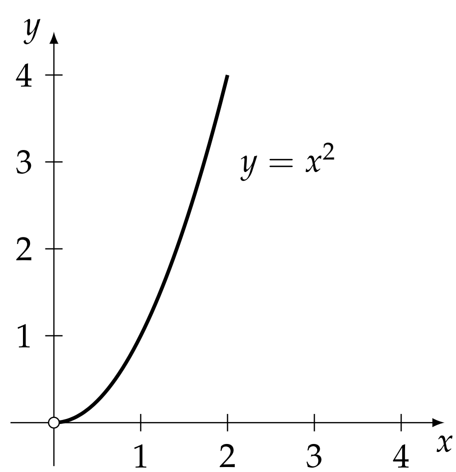
(3) *f é **estritamente crescente** se, e somente se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_1) < f(a_2)$;*

(4) *f é **estritamente decrescente** se, e somente se para quaisquer $a_1, a_2 \in A$, $a_1 < a_2 \Rightarrow f(a_2) < f(a_1)$;*

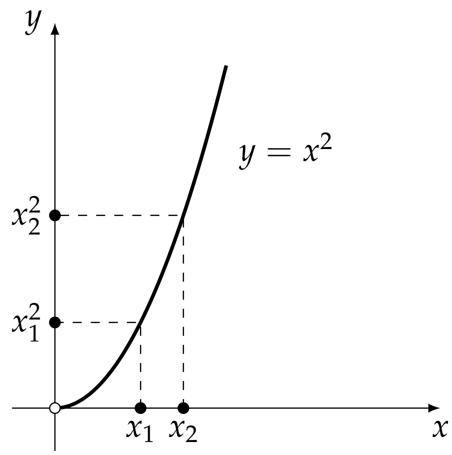
Exemplo 48. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

é estritamente crescente. Esta função tem o seguinte gráfico:



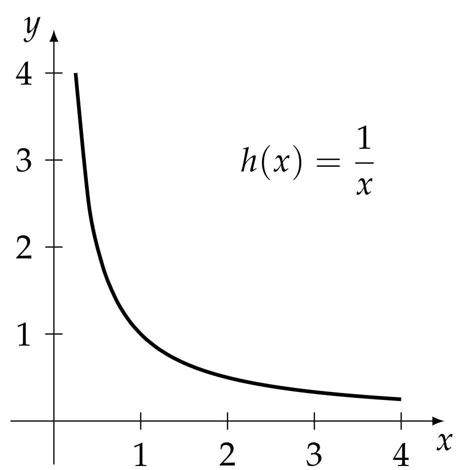
Nota-se que ao escolhermos dois pontos $x_1, x_2 \in \mathrm{dom}(f)$ tais que $x_1 < x_2$ (isto é, tais que x_2 está à direita de x_1), a imagem de x_1 por f, x_1^2, é <u>menor</u> do que a imagem de x_2 por f, x_2^2, ou seja, x_2^2 está <u>acima</u> de x_1^2 sempre que x_2 estiver <u>à direita de</u> x_1.



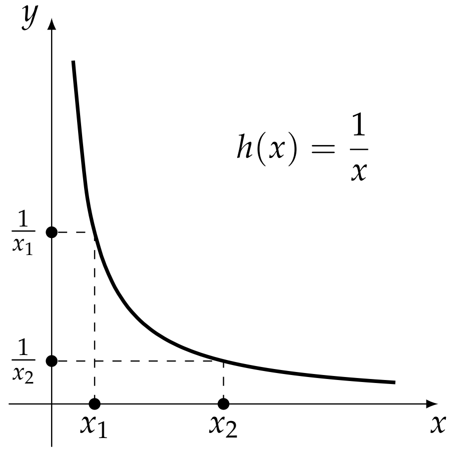
Exemplo 49. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

é estritamente decrescente. Seu gráfico tem o seguinte aspecto:



Nota-se que ao escolhermos dois pontos $x_1, x_2 \in \operatorname{dom}(h)$ *tais que* $x_1 < x_2$ *(isto é, tais que* x_2 *está à direita de* x_1*), a imagem de* x_2 *por* h*,* $1/x_2$*, é* *<u>menor</u>* *do que a imagem de* x_1 *por* h*,* $1/x_1$*, ou seja,* $1/x_1$*, está* *<u>acima</u>* *de* $1/x_2$*, sempre que* x_2 *estiver* *<u>à direita de</u>* x_1*.*



2.1.2 Funções Pares e Funções Ímpares

Definição 50. *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto tal que $(\forall x \in A)(-x \in A)$ e $f : A \to \mathbb{R}$ uma função.*

(P) *Dizemos que f **é uma função par** se, e somente se:*

$$(\forall x \in A)(f(-x) = f(x).)$$

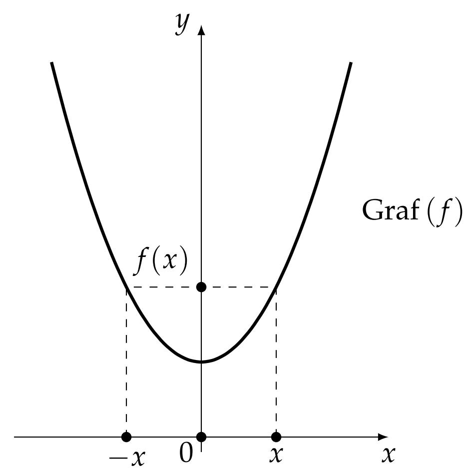
(I) *Dizemos que f **é uma função ímpar** se, e somente se:*

$$(\forall x \in A)(f(-x) = -f(x).)$$

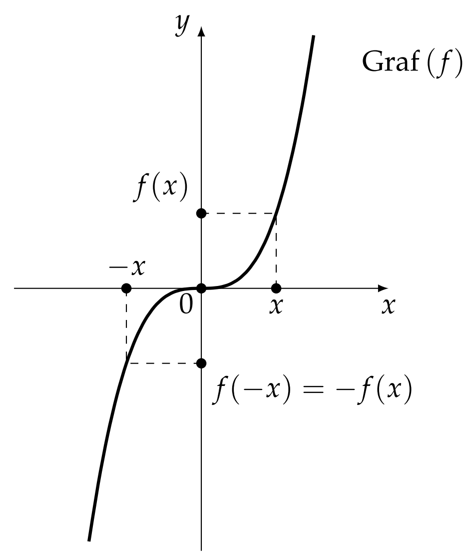
Pergunta: existe alguma função que seja simultaneamente par e ímpar?

Observação 51. *A paridade (o fato de a função ser par ou ímpar) pode ser analisada observando o gráfico de f:*

- ***Função par:** o gráfico de uma função par sempre é simétrico em relação ao eixo Oy;*



- ***Função Ímpar:*** *o gráfico de uma função ímpar é sempre simétrico em relação à origem.*



2.1.3 Funções Definidas por Partes

Definição 52. *Uma função* $f : \text{dom}(f) \to C \subseteq \mathbb{R}$ *é uma* ***função definida por partes*** *quando tiver diferentes leis em diferentes subconjuntos de seu domínio.*

Exemplo 53. *A função:*

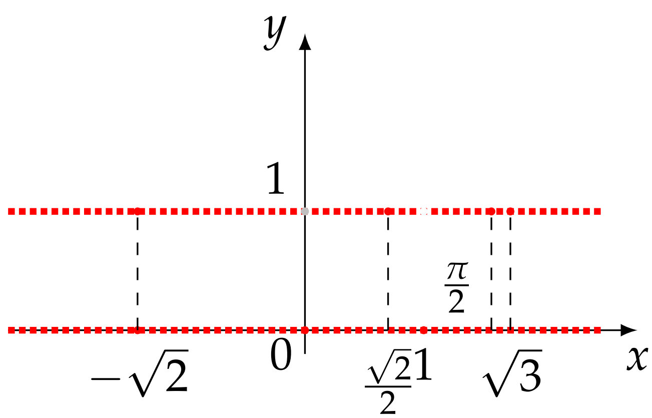
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, \ se \ x \leq 1 \\ x^2, \ se \ 1 < x \leq 2 \\ x+1, \ se \ x > 2 \end{cases} \end{array}$$

está definida por partes.

Exemplo 54. *A função:*

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \to & [0,1] \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

está definida por partes. Esta é uma função cujo gráfico - embora exista! - não podemos esboçar. Para termos uma noção do aspecto do gráfico, imaginemos que ao longo da reta $y = 1$ possamos marcar o ponto $(x, 1)$, para <u>*todo*</u> *$x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, e que ao longo da reta $y = 0$ possamos marcar o ponto $(x, 0)$ para* <u>*todo*</u> *$x \in \mathbb{Q}$. O resultado seria semelhante ao seguinte:*



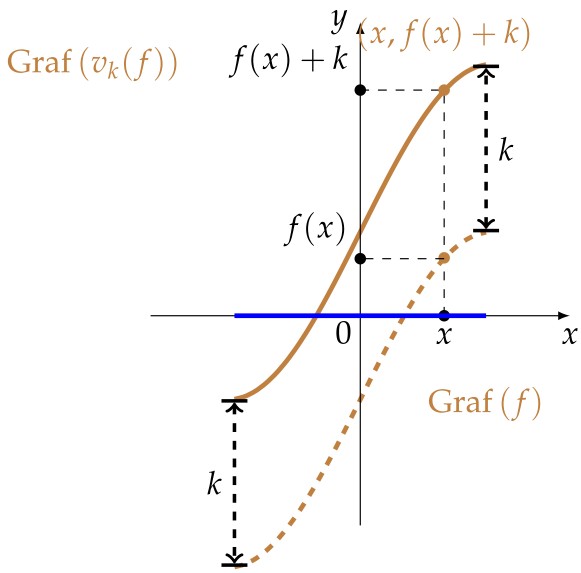
2.1.4 Translações de Gráficos

Observação 55. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$. Dada uma função $A \xrightarrow{f} B$ cujo gráfico $\text{Graf}(f)$ conhecemos, podemos obter o gráfico de dois tipos de funções obtidas a partir de f:*

- ***Translação vertical:*** *a função:*

$$\begin{array}{rrcl} v_k(f): & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) + k \end{array}$$

tem como gráfico $\text{Graf}(f)$ transladado em k unidades para cima, se $k > 0$, ou k unidades para baixo, se $k < 0$. Por isto denominamos $v_k(f)(x) = f(x) + k$ a ***translação vertical de*** *f;*

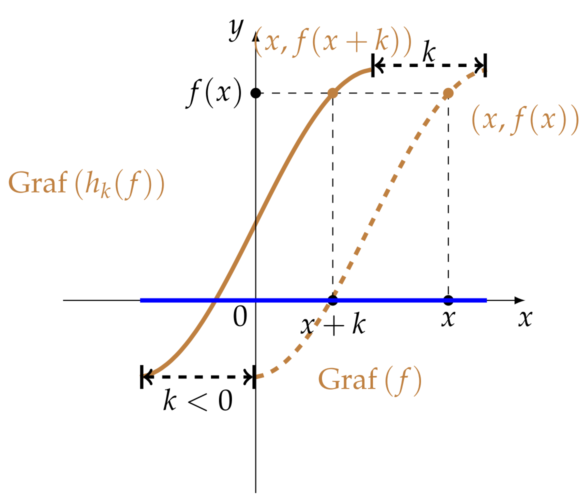


Acima ilustramos o efeito de uma translação vertical do gráfico de uma função f por uma constante $k > 0$. O gráfico de f está desenhado como uma "linha pontilhada", enquanto que o gráfico de sua translação vertical está desenhado como uma "linha cheia".

- ***Translação horizontal:*** *Se $A \xrightarrow{f} B$ e $k \in \mathbb{R}$ são tais que $(\forall x \in A)(x + k \in A)$, a função:*

$$\begin{array}{rccc} h_k(f): & A & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+k) \end{array}$$

tem como gráfico Graf (f) *transladado em k unidades para a esquerda, se $k < 0$, ou k unidades para a direita, se $k > 0$. Por isto denominamos $h_k(x) = f(x+k)$ a* ***translação horizontal de f****;*

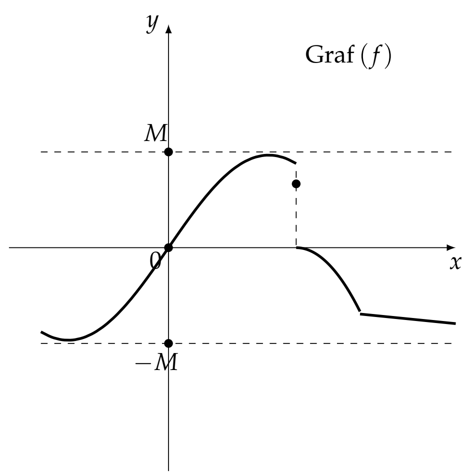


Acima ilustramos a translação horizontal do gráfico de uma função (linha pontilhada) por $k > 0$, resultado no gráfico representado em linha "cheia", deslocado por k unidades à esquerda.

2.1.5 Funções Limitadas e Funções Periódicas

Definição 56 (função limitada). *Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *e* $A \xrightarrow{f} B$ *uma função. Dizemos que* f *é* ***limitada*** *se, e somente se, existir* $M > 0$ *tal que:*

$$(\forall x \in A)(|f(x)| \leq M)$$



Proposição 57. *Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *e* $A \xrightarrow{f} B$ *uma função. Se existir* $M > 0$ *tal que:*

$$\operatorname{Graf}(f) \subseteq A \times [-M, M],$$

então f *é limitada.*

Definição 58 (função periódica). *Sejam* $A, B \subseteq \mathbb{R}$ *e* $A \xrightarrow{f} B$ *uma função. Dizemos que* f *é* ***periódica*** *se, e somente se, existir* $p \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$(\forall x \in A)((x + p \in A) \Rightarrow f(x + p) = f(x))$$

Nas próximas notas de aula estudaremos, com mais vagar, funções periódicas.

2.1.6 Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

Uma função é injetora quando preserva e reflete igualdades. Mais precisamente, temos a seguinte:

Definição 59 (função injetora). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é **injetora** se, e somente se:*

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)))$$

ou, equivalentemente:

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Para indicar que $f : A \to B$ é uma função injetora, escrevemos $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.

Proposição 60. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função injetora. Então para todo $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em, no máximo, um ponto.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f seja injetora, mas que exista algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em dois pontos distintos, digamos em $P(a_1, b_0)$ e $Q(a_2, b_0)$. Como $P \neq Q$ e $b_0 = b_0$, obrigatoriamente tem-se $a_1 \neq a_2$. Como $P(a_1, b_0), Q(a_2, b_0) \in \operatorname{Graf}(f)$, segue que $f(a_1) = b_0$ e, simultaneamente, $f(a_2) = b_0$, com $a_1 \neq a_2$, contrariando a hipótese de ser f uma função injetora. O absurdo vem de supor que exista algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em dois pontos distintos. Logo, se f é injetora, então para todo $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em, no máximo, um ponto. $\square$

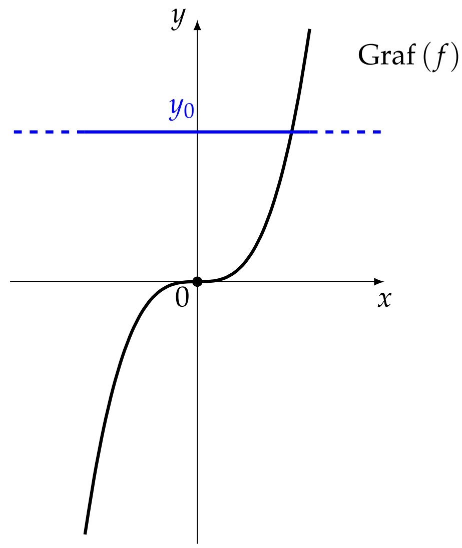
Corolário 61 (teste gráfico para injetividade). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Se existir algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em mais de um ponto, então f ~~é uma~~ função injetora.*

Aplicando o **Teste Gráfico de Injetividade**, vamos ver que a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

é injetora.

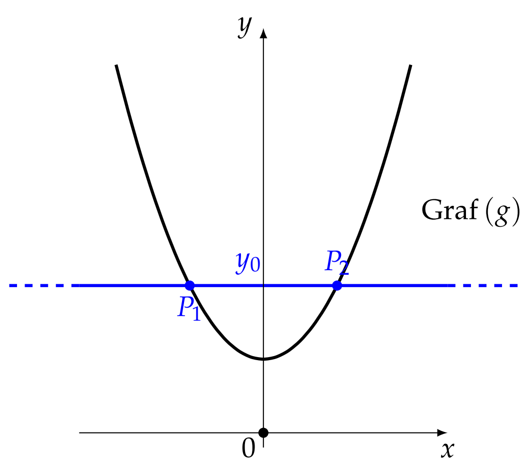
De fato, observe que para qualquer número real $y_0 \in \mathbb{R} = \operatorname{cod}(f)$, a reta de equação $y = y_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em, no máximo, um ponto:



Pelo mesmo critério, podemos concluir que a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

não é injetora. De fato, qualquer reta horizontal de equação $y = y_0$, com $y_0 > 1$ interceptará o gráfico de g em dois pontos, P_1 e P_1 (logo, não é o caso da interseção ocorrer em, no máximo, um ponto):



Definição 62 (função sobrejetora). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é* ***sobrejetora*** *se, e somente se:*

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

ou, equivalentemente:

$$f[A] = \operatorname{Im}(f) = B.$$

Para indicar que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora, escrevemos $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.

Proposição 63. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função sobrejetora. Então para todo $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta* Graf (f) *em, no mínimo, um ponto.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f seja sobrejetora, ou seja, que:

$$f[A] = \operatorname{im}(f) = B,$$

mas que exista algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepta Graf (f). Neste caso, $b_0 \in B$ *mas* $b_0 \notin f[A]$, uma vez que $f[A] = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(f(a) = b)\}$, ou seja, $f[A] \neq B$. Disto segue que f não é sobrejetora, o que contraria nossa hipótese. O absurdo provém de supormos que existe $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepte Graf (f). □

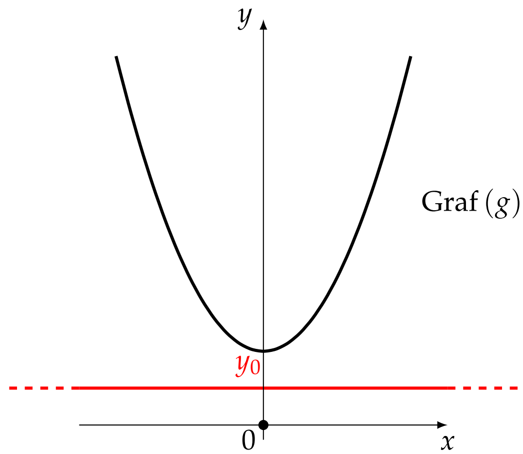
Corolário 64 (teste gráfico para sobrejetividade). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Se existir algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepta* Graf (f), *então f não é uma função sobrejetora.*

Consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

e vejamos, aplicando o **teste gráfico para sobrejetividade** que tal função não é sobrejetora.

De fato, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R} = \operatorname{cod}(g)$ tal que $y_0 < 1$, a reta horizontal de equação $y = y_0$ não intercepta nenhum ponto do gráfico de g. Isto significa que nenhum $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y_0 < 1$ é oriundo de algum elemento do domínio - logo g não pode ser sobrejetora.



No entanto, se considerarmos a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \rightarrow & [1,\infty[\\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

veremos que toda reta de equação $y = y_0$, para qualquer $y_0 \in \operatorname{cod}(h) = [1,\infty[$ intercepta o gráfico de h em, pelo menos, um ponto. Logo, h é sobrejetora.

Definição 65 (função bijetora). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é **bijetora** se, e somente se, for simultaneamente injetora e sobrejetora. Para indicar que uma função $f : A \rightarrow B$ é bijetora, escrevemos $A \overset{f}{\rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow} B$.*

Pense nisto: enuncie um critério gráfico para bijetividade de uma função $f : A \rightarrow B$, similar aos critérios enunciados anteriormente para injetividade e sobrejetividade.

2.1.7 Operações com Funções

Dada uma função de uma variável real a valores reais, $A \xrightarrow{f} B$, como $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, podemos operar os elementos de A e de B - e em particular podemos somar, subtrair, multiplicar e, sob certas circunstâncias, dividir elementos do contradomínio de f, pois este é parte do conjunto dos números reais, onde podemos efetuar estas operações. Em vista disto, podemos "operar" com funções de uma variável real a valores reais que admitam elementos na interseção dos seus domínios simplesmente por operar, para cada x, as respectivas imagens das funções.

Temos, portanto, a seguinte:

Definição 66. *Sejam* $f : \operatorname{dom}(f) \to \mathbb{R}$ *e* $g : \operatorname{dom}(g) \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) \neq \varnothing$.

(i) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

é denominada a ***soma de*** f ***e*** g***;***

(ii) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f-g: & \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

é denominada a ***diferença de*** f ***e*** g***;***

(iii) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: & \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

é denominada a ***produto de*** f ***e*** g***;***

(iv) *Se* $k \in \mathbb{R}$ *é um número qualquer, então a função:*

$$\begin{array}{rccc} k \cdot f: & \operatorname{dom}(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & k \cdot f(x) \end{array}$$

é denominada o ***produto de*** f ***pela constante*** k***;***

(iv) *Se* $(\forall x \in \operatorname{dom}(g))(g(x) \neq 0)$, *então a função:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & \operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

é denominada o ***quociente de*** f ***e*** g***;***

Definição 67 (composição de funções). *Sejam* $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, $A \xrightarrow{f} B$ *e* $B \xrightarrow{g} C$ *funções (note bem que* $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{dom}\ (g)$*). A* ***composição de*** g ***com*** f *é a função:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f : & A & \rightarrow & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

ou seja, é a função $g \circ f$ *tal que:*

$$(\forall x \in \mathrm{dom}\ (f))((g \circ f)(x) = g(f(x))).$$

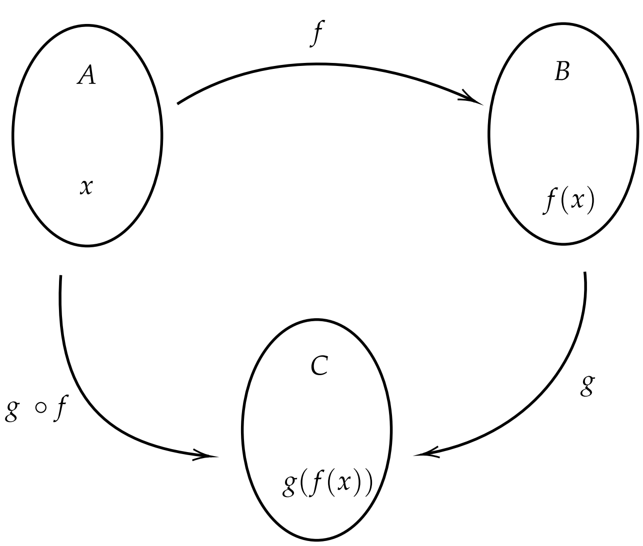
Sempre que $\mathrm{cod}\,(f) = \mathrm{dom}\ (g)$*, dizemos que* g *e* f *são* ***componíveis****, e podemos definir* $g \circ f$*.*

Em termos diagramáticos, costumamos dizer que "o diagrama a seguir comuta":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Isto significa que:

• f *tem como domínio o conjunto* A *e como contradomínio o conjunto* B*;*
• g *tem como domínio o conjunto* B *e como contradomínio o conjunto* C*;*
• $g \circ f$ *tem como domínio o conjunto* A *e como contradomínio o conjunto* C*;*
• *Para qualquer* $x \in A$*, obtemos o mesmo elemento em* C *calculando* $(g \circ f)(x)$ *ou calculando primeiramente* $f(x)$ *e, em seguida, calculando* $g(f(x))$*.*



Exemplo 68. *Considere:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+3}{x-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sin(y) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & e^z \end{array}$$

Então, uma vez que $\text{cod}\,(g) = \mathbb{R} \neq [-1,1] = \text{dom}\,(f)$*, não podemos definir* $f \circ g$*, ou seja,* f ***não é componível com*** g*. No entanto, como* $\text{cod}\,(f) = \mathbb{R} = \text{dom}\,(g)$*, de modo que* g ***é componível com*** f*, e podemos definir:*

$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & g(f(z)) = g(e^z) = \sin(e^z) \end{array}$$

Como $\text{cod}\,(g \circ f) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}\setminus\{3\} = \text{dom}\,(h)$*, não definimos* $h \circ (g \circ f)$*,* h ***não é componível com*** $g \circ f$*. No entanto, como* $\text{cod}\,(h) = \mathbb{R} = \text{dom}\,(g)$*,* g ***é componível com*** h*, e definimos:*

$$\begin{array}{rccc} g\circ h: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right) = \sin\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right) \end{array}$$

Exemplo 69. *Sejam:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Uma vez que $\text{cod}\,(f) = \text{dom}\,(g)$*,* g ***é componível com*** f*, e tem-se:*

$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) = \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Como $\text{cod}\,(g) = \text{dom}\,(f)$*,* f ***é componível com*** g*, e pode-se definir também:*

$$\begin{array}{rccc} f\circ g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & y & \mapsto & f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2+1 = y+1 \end{array}$$

Este exemplo ilustra que, em geral, ainda que $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *estejam ambas definidas,* $f \circ g \neq g \circ f$*.*

Exemplo 70. *Considere as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \dfrac{1}{y} \end{array}$$

Neste caso, não está definida $g \circ f$, uma vez que $\operatorname{cod}(g) = \mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} = \operatorname{dom}(f)$ *(pois* $0 \in \operatorname{cod}(f)$ *e* $0 \notin \operatorname{dom}(g)$*).*

Por outro lado, podemos definir $f \circ g$, uma vez que $\operatorname{cod}(g) = \operatorname{dom}(f)$*:*

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{5}{y} + 6 \end{array}$$

Observação 71. *Sejam A, B, C conjuntos e $A \xrightarrow{g} B$, $B \xrightarrow{f} C$ funções. Então* $\operatorname{dom}(f \circ g) = \operatorname{dom}(g)$ *e* $\operatorname{cod}(f \circ g) = \operatorname{cod}(f)$*.*

Sob certas condições adequadas, podemos compor várias funções. Sejam $A \xrightarrow{h} B$, $B \xrightarrow{g} C$ e $C \xrightarrow{f} D$ três funções. Então podemos obter $f \circ g : B \to D$ e $g \circ h : A \to C$. Como $\operatorname{cod}(h) = \operatorname{dom}(f \circ g)$, define-se:

$$(f \circ g) \circ h : A \to D,$$

e como $\operatorname{cod}(g \circ h) = \operatorname{dom}(f)$, define-se:

$$f \circ (g \circ h) : A \to D.$$

A proposição a seguir nos mostra que, em ambos os casos, obtemos a mesma função:

Proposição 72 (Associatividade da Composição de Funções). *Sejam A, B, C e D conjuntos, e sejam $f : C \to D, g : B \to C$ e $h : A \to B$ funções. Tem-se:*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g \circ h"'] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f \circ g"] & \\ & C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Demonstração. Já sabemos que $\operatorname{dom}(f \circ (g \circ h)) = A = \operatorname{dom}((f \circ g) \circ h)$ e que $\operatorname{cod}(f \circ (g \circ h)) = \operatorname{cod}((f \circ g) \circ h)$, de modo que para demonstrar a identidade, basta verificarmos que, para qualquer $x \in A$ tem-se:

$$f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ g) \circ h(x).$$

Por um lado, tem-se $f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$, e por outro lado tem-se $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$, o que prova o resultado.

□

Proposição 73. *Sejam A, B conjuntos e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Tem-se:*

$$(f \circ \mathrm{id}_A = f) \& (\mathrm{id}_B \circ f = f)$$

Demonstração. Tem-se, naturalmente, que $\operatorname{dom}(f \circ \mathrm{id}_A) = \operatorname{dom}(f)$ e $\operatorname{cod}(f \circ \mathrm{id}_A) = \operatorname{cod}(f)$. Logo, basta mostrarmos que para qualquer $a \in A$ tem-se $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(a)$. De fato, dado qualquer $a \in A$, tem-se $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$, e segue o resultado. A demonstração de que $\mathrm{id}_B \circ f = f$ é análoga, portanto a omitiremos. □

2.1.8 Inversas Laterais de uma Função: Seções e Retrações

Definição 74 (inversa à esquerda). *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $g : B \to A$ é uma **função inversa de f à esquerda** se, e somente se:*

$$(g \circ f = \mathrm{id}_A).$$

Definição 75 (seção). *Uma **seção** é uma função que admite inversa à esquerda.*

Definição 76 (inversa à direita). *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $g : B \to A$ é uma **função inversa de f à direita** se, e somente se:*

$$(f \circ g = \mathrm{id}_B).$$

Definição 77 (retração). *Uma **retração** é uma função que admite inversa à direita.*

Proposição 78. *Toda função sobrejetora é uma retração.*

Demonstração. Seja $f : A \twoheadrightarrow B$ uma sobrejeção, de modo que para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Podemos construir uma inversa à esquerda para f simplesmente escolhendo, para cada $y \in B$ um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Seja $g : B \to A$ uma tal aplicação. Tem-se:

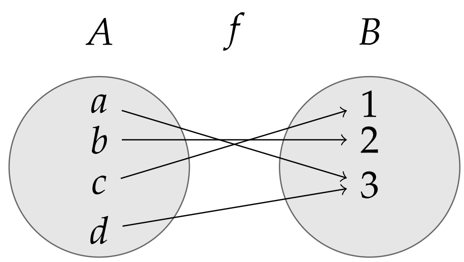
$$(\forall y \in B)((f \circ g)(y) = f(x) = y)$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

$\square$

Em outras palavras, toda função sobrejetora é uma retração.

Exemplo 79. *Sejam $A = \{a, b, c, d\}$, $B = \{1, 2, 3\}$ e considere a função $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\}$, conforme representado no diagrama abaixo:*



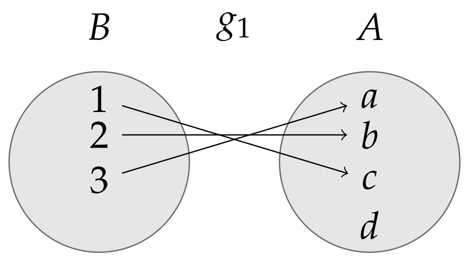
*Percebe-se que f é uma função sobrejetora, uma vez que todo elemento de B provém de pelo menos um elemento de A. A **Proposição 78** garante que f admite uma inversa à direita. Para construi-la, de acordo com o prescrito na proposição, devemos escolher, para cada elemento do conjunto B, um único elemento do conjunto A. Neste caso, temos:*

$$f^{\dashv}[\{1\}] = \{c\}$$
$$f^{\dashv}[\{2\}] = \{b\}$$
$$f^{\dashv}[\{3\}] = \{a, d\}$$

Uma inversa à esquerda é:

$$\begin{array}{rccc} g_1 : & B & \to & A \\ & 1 & \mapsto & c \\ & 2 & \mapsto & b \\ & 3 & \mapsto & a \end{array}$$

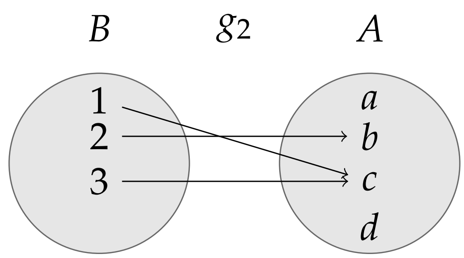
diagramaticamente representada por:



Outra inversa à esquerda de f pode ser, também:

$$\begin{array}{rccc} g_2: & B & \to & A \\ & 1 & \mapsto & c \\ & 2 & \mapsto & b \\ & 3 & \mapsto & d \end{array}$$

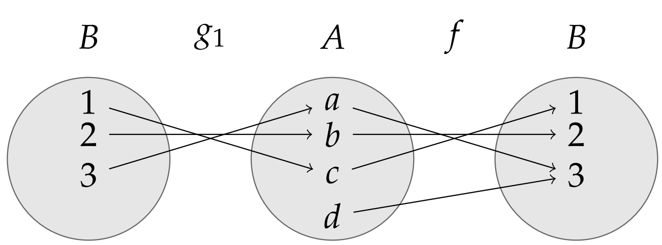
diagramaticamente representada por:



Vamos verificar agora que $f \circ g_1 = \mathrm{id}_B$ calculando $f \circ g_1$ em todos os elementos de B:

$$\begin{cases} (f \circ g_1)(1) = f(g_1(1)) = f(c) = 1 = \mathrm{id}_B(1) \\ (f \circ g_1)(2) = f(g_1(2)) = f(b) = 2 = \mathrm{id}_B(2) \\ (f \circ g_1)(3) = f(g_1(3)) = f(a) = 3 = \mathrm{id}_B(3) \end{cases}$$

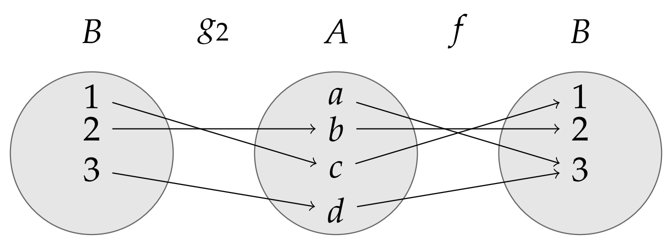
Diagramaticamente, note que no diagrama abaixo, seguindo os caminhos das setas "emendadas", 1 é mapeado em 1, 2 é mapeado em 2 e 3 é mapeado em 3.



Vamos verificar agora que $f \circ g_2 = \mathrm{id}_B$ calculando $f \circ g_2$ em todos os elementos de B:

$$\begin{cases} (f \circ g_2)(1) = f(g_2(1)) = f(c) = 1 = \mathrm{id}_B(1) \\ (f \circ g_2)(2) = f(g_2(2)) = f(b) = 2 = \mathrm{id}_B(2) \\ (f \circ g_2)(3) = f(g_2(3)) = f(d) = 3 = \mathrm{id}_B(3) \end{cases}$$

Diagramaticamente, note que no diagrama abaixo, seguindo os caminhos das setas "emendadas", 1 é mapeado em 1, 2 é mapeado em 2 e 3 é mapeado em 3.



> **Proposição 80.** *Toda função injetora admite inversa à esquerda.*

Demonstração. Sejam A, B conjuntos e $f : A \rightarrowtail B$ uma função injetora. Vamos construir uma função $g : B \to A$ tal que $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Definimos g como segue: escolhemos um elemento arbitrário, $x_0 \in A$ e fazemos:

$$\begin{array}{rccc} g : & B & \to & A \\ & y & \mapsto & \begin{cases} g(y) = x, \text{ se } y \in f[A] \text{ e } y = f(x) \\ x_0, \text{ se } y \notin f[A] \end{cases} \end{array}$$

Note que g, dada acima, é função. Trata-se de uma relação total, pois a <u>todo</u> elemento de B associamos pelo menos um elemento de A, a saber o elemento $g(y) = x$, no caso de $y \in f[A]$ e $y = f(x)$, e x_0, no caso em que $y \notin f[A]$.

A relação g também é unívoca: a cada elemento de $B \setminus f[A]$ corresponde apenas um elemento de A (o elemento x_0), e a cada elemento $y \in f[A]$ corresponde <u>um único</u> elemento de A (nomeadamente o único x tal que $f(x) = y$ – unicidade esta advinda da injetividade de f).

Finalmente, verifiquemos que $g \circ f = \mathrm{id}_A$. Temos, para qualquer $x \in A$:

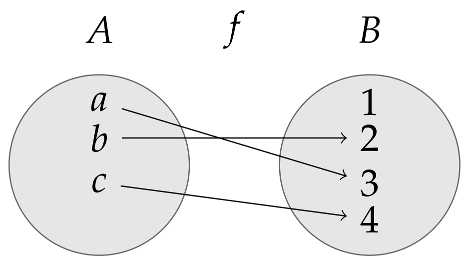
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\text{único } y \text{ tal que } f(x) = y) = x = \mathrm{id}_A(x).$$

ou seja,

$$g \circ f = \mathrm{id}_A,$$

de modo que g é uma inversa à esquerda de f. $\square$

Exemplo 81. *Sejam $A = \{a, b, c\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$ e considere a função $f = \{(a, 3), (b, 2), (c, 4)\}$, conforme representado no diagrama abaixo:*



Nota-se prontamente que f é uma função injetora, uma vez que faz corresponder a elementos distintos de A elementos distintos de B.

*Vamos seguir o que foi prescrito na **Proposição 80** para construir $g : B \to A$, uma inversa à esquerda de f.*

O único elemento que não pertence à imagem de A por f é o número 1, de modo que a este número devemos atribuir, arbitrariamente, algum elemento de A, digamos, a:

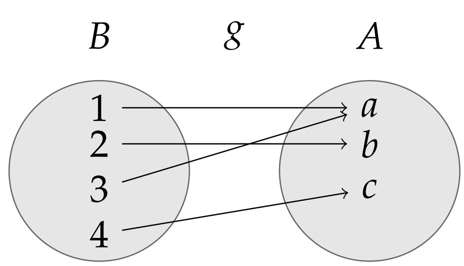
- *$g(1) = a$ (pois eu pude escolher livremente – mais formalmente, "porque eu quis");*

Note que poderíamos, também, ter escolhido b ou c como imagem de 1.

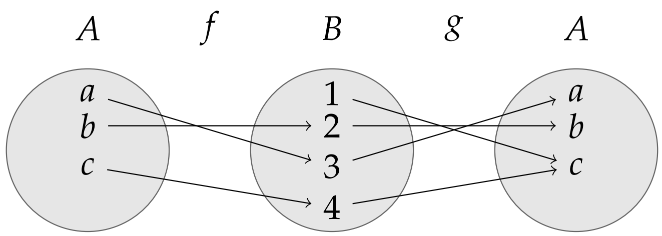
Como os demais elementos são oriundos por f de elementos de A, basta definirmos:

- *$g(2) = b$, pois 2 é imagem de b por f;*
- *$g(3) = a$, pois 3 é imagem de a por f;*
- *$g(4) = c$, pois 4 é imagem de c por f;*

Abaixo esboçamos o diagrama de balões de g:



Efetuando a composição $f \circ g$, obtemos, diagramaticamente:



ou seja,

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(3) = a = \mathrm{id}_A(a)$$
$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = b = \mathrm{id}_A(b)$$
$$(g \circ f)(c) = g(f(c)) = g(4) = a = \mathrm{id}_A(c)$$

e vale $(g \circ f) = \mathrm{id}_A$.

Em outras palavras, toda função injetora é uma seção.

É natural nos perguntarmos sobre a validade das recíprocas. Veja os resultados abaixo:

Proposição 82. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Se f admite inversa à esquerda então f é injetora.*

Demonstração. Seja $g : B \to A$ uma inversa à esquerda de f. Dados $x_1, x_2 \in A$, caso tenhamos:

$$f(x_1) = f(x_2),$$

ao calcular g em ambos os membros da igualdade acima, obteremos:

$$x_1 = \mathrm{id}_A(x_1) = (g \circ f)(x_1) = g(f(x_1)) = g(f(x_2)) = (g \circ f)(x_2) = \mathrm{id}_A(x_2) = x_2$$

Desta forma, se $x_1, x_2 \in A$ são tais que $f(x_1) = f(x_2)$, segue que $x_1 = x_2$ – ou seja, f é injetora, uma vez que reflete igualdades (*i.e.*, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$). $\square$

Proposição 83. *Sejam A, B conjuntos e $f : A \to B$ uma função. Se f admite inversa à direita então f é sobrejetora.*

Demonstração. Seja $g : B \to A$ uma inversa à direita de f, de modo que $f \circ g = \text{id}_B : B \to B$. Dado $y \in B$, tem-se que:

$$y = \text{id}_B(y) = (f \circ g)(y) = f(g(y)).$$

Como $g(y) \in A$, segue que existe $x = g(y)$ tal que $y = f(x)$ – ou seja, f é sobrejetora. $\square$

Do exposto acima, concluímos que:

- f é injetora se, e somente se, f admite uma inversa à esquerda;
- f é sobrejetora se, e somente se, f admite uma inversa à direita;

Na próxima seção, veremos uma condição necessária e suficiente para que uma função admita inversa (dos dois lados).

2.1.9 A Inversa de Uma Função

Definição 84. *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. A* ***função inversa de*** f*, quando existir, é uma função $g : B \to A$ tal que:*

$$(f \circ g = \text{id}_B) \& (g \circ f = \text{id}_A).$$

Proposição 85. *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Se f admite uma função inversa $g : B \to A$, então g é única.*

Demonstração. Suponhamos que $g, g' : B \to A$ sejam duas funções inversas de f. Mostraremos que $g = g'$. Como g e g' têm os mesmos domínios e contradomínios, pela **Definição 36** basta mostrarmos que g e g' têm a mesma lei.

Como g é inversa de f, segue que para qualquer $y \in B$:

$$(f \circ g)(y) = \text{id}_B(y) = y$$

Aplicando g' aos dois membros da igualdade acima e observando que $g' \circ f = \text{id}_A$, segue que:

$$\begin{gathered} g' \circ (f \circ g)(y) = g' \circ \text{id}_B(y) = g'(y) \\ (g' \circ f) \circ g(y) = g'(y) \\ \text{id}_B \circ g(y) = g'(y) \\ g(y) = g'(y) \end{gathered}$$

Uma vez que $(\forall y \in B)(g(y) = g'(y))$, segue do que observamos anteriormente que $g = g'$. $\square$

Na seção anterior, vimos que uma função tem inversa à direita se, e somente se, for sobrejetora e que tem inversa à esquerda se, e somente se, for injetora. É natural inferir, portanto, que uma função admitirá inversa bilateral (ou seja, tanto à direita quanto à esquerda) se, e somente se, for bijetora – isto é, simultaneamente injetora (para que tenha inversa à direita) e sobrejetora (para que tenha inversa à esquerda).

Teorema 86. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função bijetora. Então existe uma* única *função $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ tal que:*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \tag{1}$$

e:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \tag{2}$$

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $f : A \to B$ seja bijetora e, em seguida, vamos construir uma inversa para f. A inversa de f deve ter, como domínio, o conjunto B, e como contradomínio o conjunto A. Devemos, portanto, estabelecer uma relação <u>unívoca</u> e <u>total</u>, $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Dado $y \in B$ <u>qualquer</u>, como f é bijetora e, em particular, sobrejetora, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é bijetora e, em particular, injetora, segue que este x tal que $f(x) = y$ é único. Assim, estabelecemos uma função:

$$\begin{array}{rccc} g: & B & \to & A \\ & y & \mapsto & \text{o único } x \text{ tal que } f(x) = y \end{array}$$

Note que a totalidade de g provém do fato de ser f sobrejetora, e a univocidade de g provém do fato de f ser injetora. Note que:

$$(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$$

e que:

$$(\forall y \in B)(f(g(y)) = y),$$

de modo que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Outrossim, note que, por construção, esta função g é única. Segue que $g = f^{-1}$. □

A recíproca do teorema acima é válida, uma vez que a existência da inversa à direita garante a sobrejetividade (**Proposição 85**), enquanto que a existência da inversa à esquerda garante a injetividade da função (**Proposição 82**).

Observação 87. *Em termos diagramáticos, dizemos que o "diagrama a seguir comuta"*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"] & \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Isto significa que:

- $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$;

Definição 88 (função inversa). *A função $f^{-1} : B \to A$ dada no **Teorema 86** é denominada a **função inversa de** $A \overset{f}{\to} B$.*

Da definição de função inversa segue a:

Proposição 89. *Dada uma função $f : A \to B$ bijetora, temos:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(f(a) = b \iff a = f^{-1}(b)).$$

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $f(a) = b$. Aplicando f^{-1} aos dois membros desta igualdade, obtemos (pelo fato de f^{-1} ser função):

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b),$$

e como $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, tem-se:

$$a = \mathrm{id}_A(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b).$$

Reciprocamente, sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $a = f^{-1}(b)$. Aplicando f aos dois membros desta igualdade, obtemos (pelo fato de f ser função):

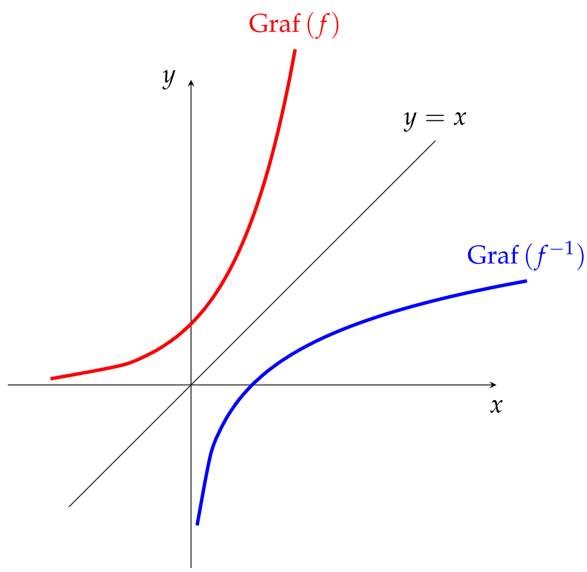
$$f(a) = f(f^{-1}(b)),$$

e como $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, tem-se:

$$b = \mathrm{id}_B(b) = f \circ f^{-1}(b) \overset{\overset{\text{hip.}}{\uparrow}}{=} a.$$

$\square$

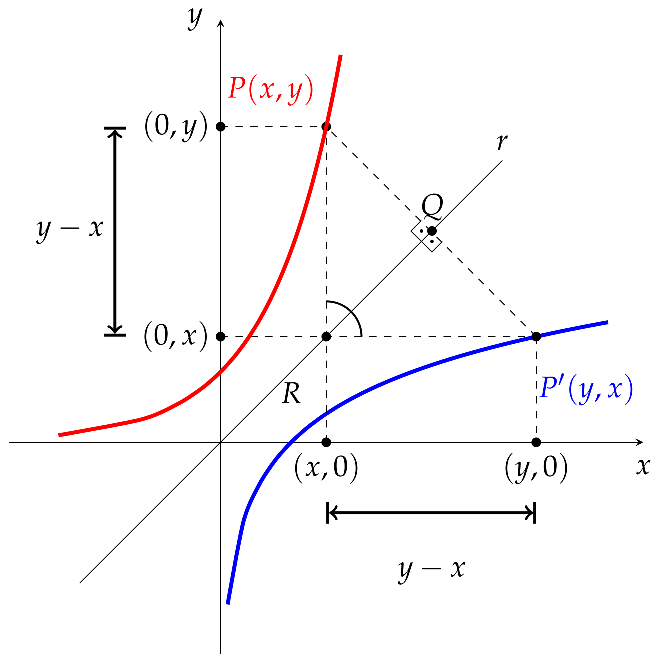
Teorema 90. *Se $f : A \to B$ é uma função de uma variável real a valores reais invertível, com inversa $f^{-1} : B \to A$, então* $\mathrm{Graf}\,(f)$ *e* $\mathrm{Graf}\,(f^{-1})$ *são simétricos em relação à primeira bissetriz (i.e., a reta de equação $y = x$).*



Demonstração. Seja $P(x, y)$ um ponto de $\mathrm{Graf}\,(f)$, ou seja, tal que $y = f(x)$. Pela **Proposição 89**, tem-se $f^{-1}(y) = x$, de modo que $(y, x) \in \mathrm{Graf}\,(f^{-1})$. Devemos mostrar que $P'(y, x) \in \mathrm{Graf}\,(f^{-1})$ é simétrico de P em relação à reta r de equação $y = x$, ou seja, que $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ são equidistantes da reta r.

Observamos na figura a seguir que:

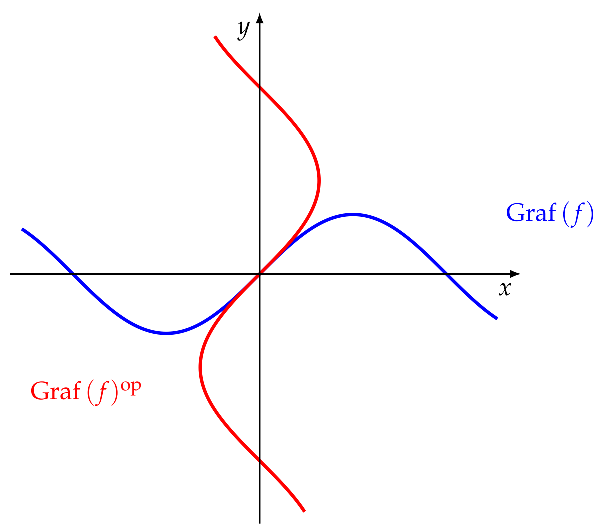
- $RP \cong RP'$, pois ambos medem $y - x$;
- $\angle(PRQ) \cong \angle(QRP')$, pois ambos medem $\pi/4$, já que r é a primeira bissetriz;
- RQ é um lado comum aos triângulos ΔPQR e $\Delta P'QR$;



Segue das três observações acima, pelo caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, que $\Delta PQR \cong \Delta P'QR$. Segue disto que a distância de P a Q, $d(P,Q)$, é igual à distância de P' a Q, $d(P',Q)$. Segue, portanto, que os pontos P e P' são simétricos pela primeira bissetriz.

$\square$

Ao removermos a hipótese de invertibilidade de f no teorema anterior, não podemos garantir que a reflexão de $\text{Graf}\,(f)$ - que denotamos abaixo por $\text{Graf}\,(f)^{\text{op}}$. pela primeira bissetriz seja gráfico de alguma função. Veja o seguinte exemplo:



Usando-se a **Proposição 42**, verifica-se que embora f seja uma função, seu gráfico refletido pela primeira bissetriz, $\text{Graf}\,(f)^{\text{op}}$ não é gráfico de nenhuma função.

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Ávila, G., **Evolução dos Conceitos de Função e de Integral**, Revista Matemática Universitária, Volume I, 1985.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Ponte, J. P., **The History of the Concept of Function and some Educational Implications**, Mathematics Educator, volume 3, número 2. 1992.