MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 10

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos as derivadas das funções elementares, definimos funções dadas implicitamente por equações e descrevemos como derivá-las e, em seguida, apresentamos como derivar a inversa de certas funções.

1 Funções Elementares e Suas Derivadas

As funções elementares classificam-se em dois tipos: funções elementares algébricas e funções elementares transcendentes. As funções elementares algébricas são: a função constante, a função afim, a função linear, a função polinomial de grau n, as funções racionais e, ainda, as chamadas "funções algébricas", que veremos na sequência.

As funções elementares transcendentes são as funções com expoente irracional, isto é, funções do tipo $f(x) = x^\alpha$, com $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, a função exponencial, a função logarítmica, as funções trigonométricas e as funções ciclométricas.

As funções que são combinações das funções elementares não se denominam mais funções elementares, tampouco aquelas que não constam nesta lista apresentada acima.

Nestas notas veremos como derivá-las. A partir das derivadas destas funções elementares poderemos calcular as derivadas de muitas funções usando as regras de derivação vistas na aula anterior.

Lema 1. *Tem-se:*

*jeancb@ime.usp.br

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0$$

Demonstração. Podemos multiplicar o numerador e o denominador da expressão acima pela expressão conjugada de $\cos(x)-1$, qual seja, $\cos(x)+1$, obtendo para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $\cos(x)\neq -1$, tem-se::

$$\frac{\cos(x)-1}{x}=\frac{\cos(x)-1}{x}\cdot\frac{(\cos(x)+1)}{(\cos(x)+1)}=\frac{\cos^2(x)-1}{x\cdot(\cos(x)+1)}\overset{-\sin^2(x)=\cos^2(x)-1}{\underset{\uparrow}{=}}\frac{-\sin^2(x)}{x\cdot(\cos(x)+1)}$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin^2(x)}{x\cdot(\cos(x)+1)}=-\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}$$

Uma vez que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}=1,$$

$$\lim_{x\to 0}\sin(x)=\sin(0)=0$$

e que $\lim_{x\to 0}(\cos(x)+1)=\lim_{x\to 0}\cos(x)+\lim_{x\to 0}1=\cos(0)+1=1+1=2\neq 0$, segue que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\cdot\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}=\overbrace{\left(\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{x}\right)}^{=1}\cdot\overbrace{\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x)}{\cos(x)+1}}^{=0}=0$$

Assim,

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x}=0.$$

$\square$

Teorema 2 (derivada da função seno). *A função* $\sin:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ *é derivável em todo o seu domínio, e vale:*

$$\frac{d}{dx}(\sin(x))=\cos(x).$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\sin(x))\Big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0+\Delta x) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0)\cdot\cos(\Delta x) + \sin(\Delta x)\cdot\cos(x_0) - \sin(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x_0)\cdot(\cos(\Delta x)-1) + \sin(\Delta x)\cdot\cos(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \sin(x_0)\cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}}_{=0} + \cos(x_0)\cdot \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}^{=1} = \cos(x_0).
\end{aligned}$$

□

Teorema 3 (derivada da função cosseno). *A função* $\cos : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é derivável em todo o seu domínio, e vale:*

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\cos(x)) = -\sin(x).}$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$. Tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}(\cos(x))\Big|_{x=x_0} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0+\Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0)\cdot\cos(\Delta x) - \sin(x_0)\cdot\sin(\Delta x) - \cos(x_0)}{\Delta x} = \\
&= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\cos(x_0)\cdot(\cos(\Delta x)-1) - \sin(x_0)\cdot\sin(\Delta x)}{\Delta x} = \\
&= \cos(x_0)\cdot \underbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\cos(\Delta x)-1}{\Delta x}}_{=0} - \sin(x_0)\cdot \overbrace{\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}}^{=1} = -\sin(x_0).
\end{aligned}$$

□

Teorema 4 (Derivada da função x^n). *Seja $n \in \mathbb{N}$, A função:*

$$\begin{aligned}
f:\ \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\
x &\mapsto x^n
\end{aligned}$$

é derivável em qualquer ponto do seu domínio, e vale:

$$\frac{d}{dx}(x^n) = n \cdot x^{n-1}.$$

Demonstração. Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Tem-se:

$$\left.\frac{d}{dx}(x^n)\right|_{x=x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x_0+\Delta x)^n - x_0^n}{\Delta x} \overset{\text{Teorema Binomial}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x_0^n + \binom{n}{1} \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \cdots + \binom{n}{n-1} \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n - x_0^n}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{n \cdot x_0^{n-1} \cdot \Delta x + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot \Delta x^2 + \cdots + n \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-1} + \Delta x^n}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} n \cdot x_0^{n-1} + \binom{n}{2} \cdot x_0^{n-2} \cdot \Delta x + \cdots + n \cdot x_0 \cdot \Delta x^{n-2} + \Delta x^{n-1} = n \cdot x_0^{n-1}$$

□

Lema 5. *Seja* $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. *Tem-se:*

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \ln(a)$$

Demonstração. Fazemos a mudança de variável:

$$a^{\Delta x} - 1 = u$$

e observamos que:

$$\lim_{\Delta x \to 0} u = \lim_{\Delta x \to 0} a^{\Delta x} - 1 = a^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Também,

$$\ln(a^{\Delta x}) = \ln(u+1)$$

de modo que $\Delta x \cdot \ln(a) = \ln(u+1)$. Assim,

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = \lim_{u \to 0} \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln(a)}} = \ln(a) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{u}{\ln(u+1)} = \ln(a) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\frac{1}{u} \cdot \ln(u+1)} =$$

$$= \ln(a) \cdot \lim_{u \to 0} \frac{1}{\ln{(1+u)^{\frac{1}{u}}}} = \ln(a) \cdot \frac{1}{\ln(e)} = \ln(a)$$

$\square$

Teorema 6 (Derivada da Função Exponencial). *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(a^x) = a^x \cdot \ln(a)}$$

Demonstração. Dado $x_0 \in \mathbb{R}$, temos:

$$\frac{d}{dx}(a^x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^x \cdot (a^{\Delta x} - 1)}{\Delta x} = a^x \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = a^x \cdot \ln(a).$$

$\square$

Como corolário do teorema acima, segue que:

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x \cdot \ln(e) = e^x \cdot 1 = e^x.$$

Teorema 7 (Derivada da Função Logarítmica). *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \ln: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln(x) \end{array}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x}}$$

Demonstração. Temos:

$$\frac{d}{dx}(\ln(x)) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln(x+\Delta x) - \ln(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \cdot \ln\left(\frac{x+\Delta x}{x}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right) =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \ln\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}} \overset{\ln \text{ é contínua}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(1 + \frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}\right) \overset{u = \frac{\Delta x}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln\left(\lim_{\Delta x \to 0}(1+u)^{\frac{1}{x \cdot u}}\right) =$$

$$\overset{\lim_{\Delta x \to 0} u = 0}{\overset{\uparrow}{=}} \ln\left(\lim_{u \to 0}[(1+u)^{\frac{1}{u}}]^{\frac{1}{x}}\right) = \ln(e^{\frac{1}{x}}) = \frac{1}{x}$$

□

Teorema 8 (Derivada da Função Logarítmica). *Seja $a \in \mathbb{R}_+^*$, $a \neq 1$. A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a(x) \end{array}$$

é derivável em todo seu domínio, e vale:

$$\boxed{\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}}$$

Demonstração. Basta observarmos que, para qualquer $x \in \mathbb{R}_+^*$ temos:

$$\log_a(x) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)$$

e derivamos:

$$\frac{d}{dx}(\log_a(x)) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{\ln(a)} \cdot \ln(x)\right) = \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{d}{dx}(\ln(x)) = \frac{1}{x \cdot \ln(a)}$$

□

Teorema 9 (derivada da função com expoente irracional). *Seja $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$. Temos:*

$$\boxed{\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \alpha \cdot x^{\alpha - 1}}$$

Demonstração. Note que:

$$x^\alpha = e^{\ln(x^\alpha)} = e^{\alpha \cdot \ln(x)}$$

de modo que, pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$\frac{d}{dx}(x^\alpha) = \frac{d}{dx}(e^{\alpha\cdot\ln(x)}) = e^{\alpha\cdot\ln(x)} \cdot \frac{d}{dx}(\alpha\cdot\ln(x)) = (e^{\ln(x)})^\alpha \cdot \alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha\cdot x^\alpha \cdot \frac{1}{x} = \alpha \cdot x^{\alpha-1}$$

□

2 Cálculo de Algumas Derivadas

Exemplo 10. *Calcular a derivada de* $h(x) = \sin(x^3)$.

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 & \mapsto & \sin(x^3) \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sin(y) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

Assim, $f'(y) = \cos(y)$ e $g'(x) = 3x^2$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\cdot g'(x) = \cos(g(x))\cdot g'(x) = \cos(x^3)\cdot 3x^2 = 3x^2\cdot\cos(x^3)$$

Exemplo 11. *Calcular a derivada de* $h(x) = e^{3x}$.

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x & \mapsto & e^{3x} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{cccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & e^y \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x \end{array}$$

Assim, $f'(y) = e^y$ e $g'(x) = 3$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = e^{g(x)} \cdot g'(x) = e^{3x} \cdot 3 = 3 \cdot e^{3x}.$$

Exemplo 12. *Calcular a derivada de $h(x) = (3x^2 + 1)^3$.*

Solução: O primeiro passo é escrever h como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3x^2+1 & \mapsto & (3x^2+1)^3 \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & y^3 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 3x^2+1 \end{array}$$

Assim, $f'(y) = 3y^2$ e $g'(x) = 6x$. Pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$h'(x) = (f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x) = 3g(x)^2 \cdot g'(x) = 3 \cdot (3x^2+1)^2 \cdot 6x = 18x \cdot (3x^2+1)^2.$$

Teorema 13. *Seja $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \operatorname{int}(A)$. Então:*

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & e^{g(x)} \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & e^y \end{array}$$

Assim, $f'(y) = e^y$, de modo que pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$\frac{d}{dx}[e^{g(x)}] = e^{g(x)} \cdot g'(x).$$

□

Teorema 14. *Seja $g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \operatorname{int}(A)$ e tal que $(\forall x \in A)(g(x) > 0)$. Então:*

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

Demonstração. Temos:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \overset{g}{\to} & \mathbb{R} & \overset{f}{\to} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & g(x) & \mapsto & \ln(g(x)) \end{array}$$

onde:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \ln(y) \end{array}$$

Assim, $f'(y) = \dfrac{1}{y}$, de modo que pela **Regra da Cadeia**, tem-se:

$$\frac{d}{dx}[\ln(g(x))] = \frac{1}{g(x)} \cdot g'(x) = \frac{g'(x)}{g(x)}.$$

$\square$

3 Observações

No Ensino Médio ficamos com uma impressão de que uma função deve ser sempre dada por uma expressão analítica (uma "lei"), como por exemplo:

$$f(x) = x^3 + 2x^2 - x - 3$$

$$g(y) = \sqrt{y^2 + 1}$$

ou mesmo:

$$h(t) = \cos(2\pi t).$$

Na verdade, há mais de 250 anos esta era a definição de função. Segundo o próprio Leonhard Euler,

"Uma função de uma quantidade variável é uma expressão analítica composta, de alguma forma, pela variável e por números (ou "constantes")."

No entanto, no curso de Cálculo vemos que a noção de função como "uma associação dada por uma fórmula" é muito limitada para seus propósitos.

A noção atual de função, no entanto, vai muito além das definidas por Euler, como vimos nas AGENDA 01. As funções definidas implicitamente nos ajudam a dissipar esta "impressão" errada que temos de função, conforme veremos na seção seguinte.

4 Funções Implícitas

Motivação: Na Geometria Analítica frequentemente encontramos curvas representadas sob a forma $F(x,y) = 0$ para alguma função $F :]a,b[\times]c,d[\subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Por exemplo, temos:

$$\text{uma reta é dada pela equação: } a \cdot x + b \cdot y + c = 0$$

$$\text{uma circunferência é dada pela equação: } (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - r^2 = 0$$

e assim por diante. Em alguns casos podemos "isolar" uma variável em termos da outra, mas em muitos casos isto não é possível. A seguir definimos o que entendemos por uma **função definida implicitamente por uma equação**.

Definição 15 (função dada implicitamente). *Sejam $I, J \subseteq \mathbb{R}$ dois intervalos (abertos, fechados, semi-abertos, limitados ou ilimitados). Seja $F : I \times J \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de <u>duas</u> variáveis. Dizemos que **a equação:***

$$F(x,y) = 0$$

***define implicitamente uma função** $y = y(x)$ se, e somente se:*

$$\mathcal{F} = \{(x,y) \in I \times J \mid F(x,y) = 0\}$$

for uma função de domínio I e contradomínio J - ou seja, se, e somente se para todo $x \in I$ existir um, e somente um $y = y(x) \in J$ tal que:

$$F(x,y) = F(x, y(x)) = 0.$$

*Por outro lado, dizemos que **a equação:***

$$F(x,y) = 0$$

***define implicitamente uma função** $x = x(y)$ se, e somente se:*

$$\mathcal{F} = \{(y,x) \in J \times I \mid F(x,y) = 0\}$$

for uma função de domínio J e contradomínio I - ou seja, se, e somente se para todo $y \in J$ existir um, e somente um $x = x(y) \in I$ tal que:

$$F(x,y) = F(x(y),y) = 0.$$

Definição 16 (Função Algébrica). *Chamamos de **função algébrica** a toda função definida implicitamente por uma equação da forma:*

$$p_0(x) \cdot y^n + p_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x) \cdot y + p_n(x) = 0$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $(\forall i \in \{0,1,\cdots,n\})(p_i(x)$ é um polinômio).

Exemplos e Contraexemplos:

(a) Toda função algébrica é definida implicitamente por uma equação $F(x,y) = 0$, onde:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & p_0(x) \cdot y^n + p_1(x) \cdot y^{n-1} + \cdots + p_{n-1}(x) \cdot y + p_n(x) \end{array}$$

onde $n \in \mathbb{N}$ e $(\forall i \in \{0,1,\cdots,n\})(p_i(x)$ é um polinômio).

(b) Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$. A função:

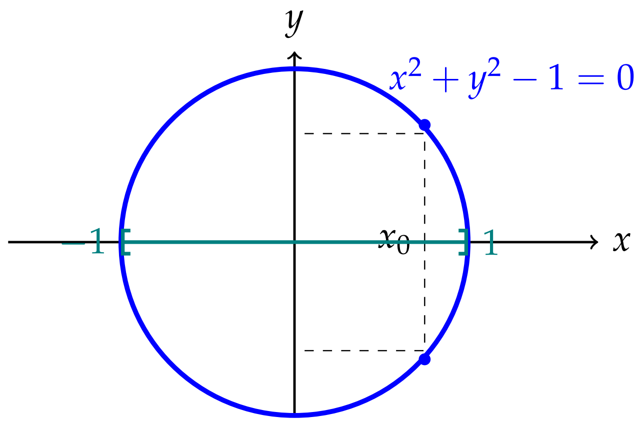
$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & a \cdot x + b \cdot y + c \end{array}$$

define, implicitamente mediante a equação $F(x,y) = ax + by + c = 0$, uma função y em termos de x se tivermos $b \neq 0$ e uma função x em termos de y, se $a \neq 0$. Com efeito, dado $x \in R$, existe <u>um único</u> $y \in \mathbb{R}$ tal que $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, a saber, $y = \frac{1}{b} \cdot (c - a \cdot x)$. Por outro lado, se $a \neq 0$, dado $y \in \mathbb{R}$ existe <u>um único</u> x tal que $a \cdot x + b \cdot y + c = 0$, a saber $x = \frac{1}{a} \cdot (c - b \cdot y)$.

Geometricamente temos uma reta - que, contanto que não seja vertical, sempre é gráfico de uma função;

(c) A função:

$$\begin{array}{rccc} F: & [-1,1] \times [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & x^2 + y^2 - 1 \end{array}$$

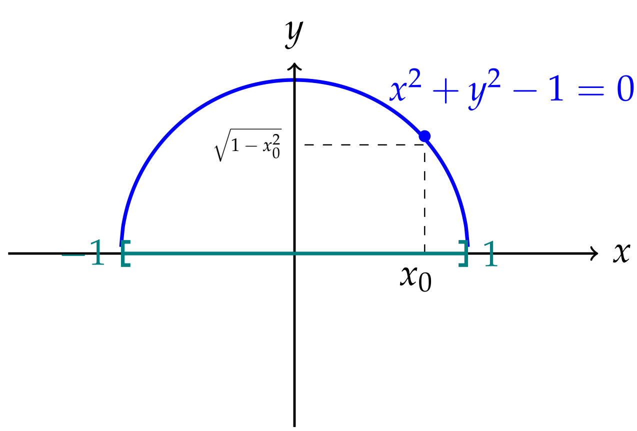


<u>não</u> define, implicitamente, mediante a equação $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$, uma função y em termos de x com domínio em $[-1, 1]$ e contradomínio em $[-1, 1]$, ou mesmo uma função x em termos de y. Com efeito, para um dado $x \in]-1, 1[$ existem sempre <u>dois</u> valores de y, $\pm\sqrt{1 - x^2}$, que satisfazem $F(x, y) = 0$, ou seja, tem-se: $F\left(x, -\sqrt{1 - x^2}\right) = 0$ e $F\left(x, \sqrt{1 - x^2}\right) = 0$. Logo, a relação definida por:

$$\mathcal{F} = \{(x, y) \in [-1, 1] \times [-1, 1] \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

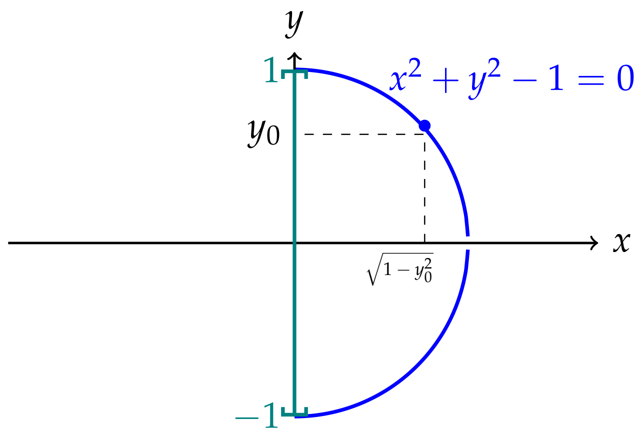
<u>não</u> define uma função $y = y(x)$, de $[-1, 1]$ em $[-1, 1]$. Pode-se verificar, do mesmo modo, que a equação $F(x, y) = 0$ tampouco define uma função $x = x(y)$. Geometricamente, temos que a equação $x^2 + y^2 = 1$ representa uma circunferência unitária centrada na origem - que sabemos não ser gráfico de função.

Não obstante, é fácil verificar que a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ <u>define</u> uma função de $[-1, 1]$ em $[0, 1]$, e até mesmo <u>define</u> uma função $y = y(x)$ de $[-1, 1]$ em $[0, -1]$.



Observe, ainda, que a equação $x^2 + y^2 - 1 = 0$ define implicitamente uma funcção $x = x(y)$, de $[-1, 1]$ em $[0, 1]$, dada por:

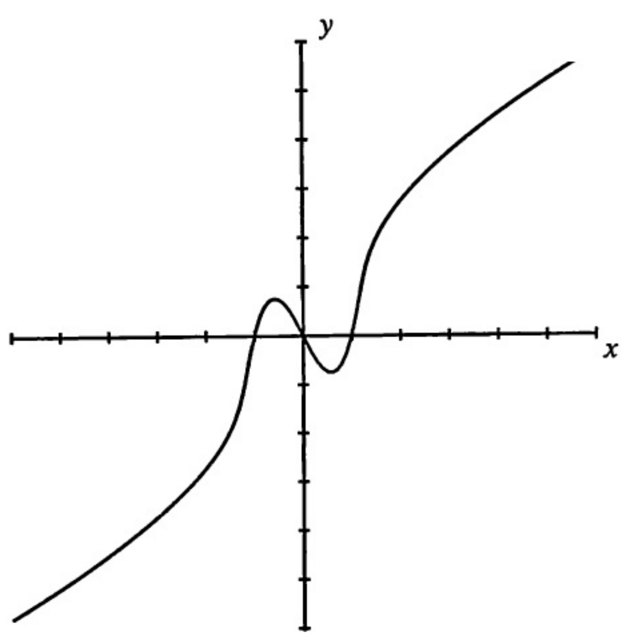
$$\{(y, x) \in [-1, 1] \times [0, 1] \mid x^2 + y^2 - 1 = 0\}$$



(d) A função:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & y^5 + 16y - 32x^3 + 32x \end{array}$$

define, implicitamente, mediante a equação $F(x, y) = y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$, uma função y em termos de x.



Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fixado, e consideremos a função de y dada por:

$$\begin{array}{rccc} F_{\bar{x}}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} \end{array}$$

que é tal que:

$$\lim_{y \to -\infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \to -\infty} y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} = -\infty$$

e:

$$\lim_{y \to \infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \to \infty} y^5 + 16y - 32\bar{x}^3 + 32\bar{x} = \infty$$

Dado $M > 0$, existem $N_1, N_2 > 0$ tais que $y > N_1$ implica $F_{\bar{x}}(y) > M$ e $y < -N_2$ implica $F_{\bar{x}}(y) < -M$. Tomemos $y_2 < -N_2$ e $N_1 < y_1$, e teremos:

$$F_{\bar{x}}(y_2) < -M < 0 < M < F_{\bar{x}}(y_1)$$

Desta forma, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, existe algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Finalmente, observe que $F_{\bar{x}}$ é estritamente crescente, ou seja, para quaisquer números $y_1 < y_2$ tem-se:

$$F_{\bar{x}}(y_1) < F_{\bar{x}}(y_2) \text{ (verifique!)}$$

Assim, o $\bar{y}$ tal que $F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ é único.

Segue, portanto, que dado qualquer $\bar{x} \in \mathbb{R}$ existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$.

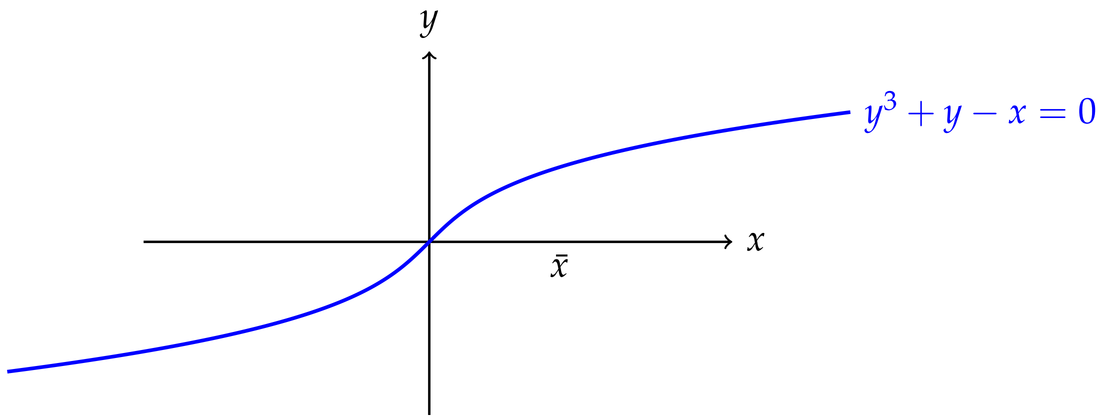
(e) Considere:

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & y^3 + y - x \end{array}$$

Afirmamos que a equação $F(x, y) = 0$, ou seja:

$$y^3 + y - x = 0$$

define y como função implícita de x.



Para verificar esta afirmação, devemos comprovar que dado $\bar{x} \in \mathbb{R}$ qualquer, existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^3 + \bar{y} - \bar{x} = 0$.

Seja $\bar{x} \in \mathbb{R}$ fixado, e considere:

$$\begin{array}{rccc} F_{\bar{x}}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & y^3 + y - \bar{x} \end{array}$$

Verifica-se que $F_{\bar{x}}$ é estritamente crescente e que:

$$\lim_{y \to -\infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \to -\infty} y^3 + y - \bar{x} = -\infty$$

$$\lim_{y \to \infty} F_{\bar{x}}(y) = \lim_{y \to \infty} y^3 + y - \bar{x} = \infty$$

Em virtude disto, dado $M > 0$, existem $N_1, N_2 > 0$ tais que $y > N_1$ implica $F_{\bar{x}}(y) > M$ e $y < -N_2$ implica $F_{\bar{x}}(y) < -M$. Tomemos $y_2 < -N_2$ e $N_1 < y_1$, e teremos:

$$F_{\bar{x}}(y_2) < -M < 0 < M < F_{\bar{x}}(y_1)$$

Desta forma, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, existe algum $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que:

$$F_{\bar{x}}(\bar{y}) = F(\bar{x}, \bar{y}) = 0$$

Como para todo $\bar{x} \in \mathbb{R}$ existe um único $\bar{y} \in \mathbb{R}$ tal que $F(\bar{x}, \bar{y}) = \bar{y}^3 + \bar{y} - \bar{x} = 0$, e portanto y é uma função de x definida implicitamente pela equação $y^3 + y = x$.

5 Derivação de Funções Definidas Implicitamente por uma Equação

Em muitos casos, dada uma equação da forma $F(x,y) = 0$, é possível explicitar y como função de x, de modo que o processo de derivação de y com respeito a x é dado pelo limite do quociente da razão incremental. Por exemplo, as equações

$$x + y = 2 \Rightarrow y = 2 - x$$
$$y + \sin(x) - 2 = x \Rightarrow y = x + 2 - \sin(x)$$

definem explicitamente y como função de x.

No entanto, se tivermos as equações:

$$x\sqrt{y} + y\sqrt{x} - x - y = 0$$

ou:

$$a^y - y + 2x = 3$$

é impossível explicitar y em termos de x.

Nestes casos, a fim de obter uma expressão que defina $y'(x)$, consideramos a expressão como $F(x, y(x)) = 0$ e a derivamos utilizando as regras de derivação já conhecidas, ou seja, as regras da soma, diferença, produto, quociente e, sempre que derivarmos y devemos ter em mente que y é uma função de x e usar sempre a **Regra da Cadeia**.

Exemplo 17. *Calcular a derivada da função y dada implicitamente pela equação:*

$$y^3 + y = x$$

Solução: derivamos os dois membros da igualdade:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Usamos as propriedades operatórias da derivação (regras da soma e da cadeia) para obter:

$$\frac{d}{dx}(y^3 + y) = \frac{d}{dx}(y^3(x)) + \frac{d}{dx}(y(x)) = 3y(x)^2 \cdot y'(x) + y'(x) = 1$$

Finalmente isolamos (quando possível) y':

$$y'(x) = \frac{1}{3y(x)^2 + 1}$$

Exemplo 18. *Calcular a derivada da função y dada implicitamente pela equação:*

$$y^5 + 16y - 32x^3 + 32x = 0$$

Solução: derivamos os dois membros da igualdade:

$$\frac{d}{dx}(y^5 + 16y - 32x^3 + 32x) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

Usamos as propriedades operatórias da derivação (regras da soma e da cadeia), sempre tendo em mente que y é uma função de x, para obter:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^5) + \frac{d}{dx}(16y(x)) - \frac{d}{dx}(32x^3) + \frac{d}{dx}(32x) = 0 \tag{1}$$

Pela **Regra da Cadeia** temos:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^5) = 5 \cdot y(x)^4 \cdot y'(x)$$

Temos, também:

$$\frac{d}{dx}(16 \cdot y(x)) = 16 \cdot \frac{d}{dx}(y(x)) = 16 \cdot y'(x)$$

$$\frac{d}{dx}(32x^3) = 32 \cdot \frac{d}{dx}(x^3) = 32 \cdot (3 \cdot x^2) = 96x^2$$

$$\frac{d}{dx}(32x) = 32 \cdot \frac{d}{dx}(x) = 32$$

Assim, a equação (1) fica:

$$5 \cdot y(x)^4 \cdot y'(x) + 16 \cdot y'(x) - 96 \cdot x^2 + 32 = 0$$

donde tem-se:

$$[5 \cdot y(x)^4 + 16] \cdot y'(x) = 96x^2 - 32$$

e como para qualquer $x \in \mathbb{R}$ $5y(x)^4 + 16 \geq 16 > 0$, segue que:

$$y'(x) = \frac{96x^2 - 32}{5y(x)^4 + 16}$$

6 Derivada de Função Inversa

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ uma função bijetora, e seja $g : B \to A$ a sua inversa, de modo que:

$$(\forall x \in B)(f(g(x)) = x)$$

Se supusermos g derivável em $x \in B$ e f derivável em $g(x)$ e tal que $f'(g(x)) \neq 0$, ao derivar ambos os membros da igualdade acima, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(f \circ g)(x) = \frac{d}{dx}(\mathrm{id}_B(x)) = \frac{d}{dx}(x) = 1$$

Pela **Regra da Cadeia**, segue que:

$$f'(g(x_0)) \cdot g'(x) = 1$$

e portanto:

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

Como $g = f^{-1}$, temos:

$$\boxed{\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}}$$

Exemplo 19. *Seja $n \in \mathbb{N}$ um número natural. Sabemos que a inversa da função $g(x) = \sqrt[n]{x}$ é a inversa de $f(x) = x^n$, cuja derivação já conhecemos. Pela fórmula dada no teorema anterior, segue que:*

$$\frac{d}{dx}(g(x)) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{n \cdot g(x)^{n-1}} = \frac{1}{n \cdot (\sqrt[n]{x})^{n-1}} = \frac{1}{n} \cdot x^{\frac{1}{n}-1}$$

Exemplo 20. *Calcular a derivada da função:*

$$\begin{array}{rccc} \arcsin : & [-1,1] & \to & \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \\ & x & \mapsto & \arcsin(x) \end{array}$$

Solução: Aplicando a fórmula deduzida, temos:

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{(\sin(\arcsin(x)))'} = \frac{1}{\cos(\arcsin(x))}$$

Para obtermos uma expressão mais "agradável" da derivada da função arco-seno, nos utilizamos das identidades trigonométricas relacionando seno e cosseno. Sabe-se que:

$$(\forall z \in \mathbb{R})(\cos(z) = \sqrt{1 - \sin^2(z)})$$

e portanto:

$$\cos(\arcsin(x)) = \sqrt{1 - [\sin(\arcsin(x))]^2} = \sqrt{1 - x^2}$$

Assim,

$$\frac{d}{dx}(\arcsin(x)) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

Do item (b) do exercício 1 da Lista de Exercícios 5 segue que $\frac{d}{dx}(\tan(x)) = \sec^2(x)$.

Exemplo 21. *Calcular a derivada de:*

$$\begin{array}{rccc} \arctan : & \mathbb{R} & \rightarrow & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ & x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$

Solução: Sabe-se que a função acima é invertível e que sua inversa é:

$$\begin{array}{rccc} \tan : & \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan(x) \end{array}$$

Assim, para avaliarmos a derivada de arctan basta tomarmos:

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{(\tan(\arctan(x)))'} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}$$

Sabe-se, no entanto, que:

$$\sec^2(z) = 1 + \tan^2(z)$$

de modo que:

$$\sec^2(\arctan(x)) = 1 + (\tan(\arctan(x)))^2 = 1 + x^2$$

e portanto:

$$\frac{d}{dx}(\arctan(x)) = \frac{1}{1 + x^2}$$

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Krantz, S.G., Parks, H. R., **The Implicit Function Theorem: History, Theory and Applications**, Volume I, 5^a edição. Editora Birkhäuser. Boston, Basel, Berlin, 2015.