MAT 0111- Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 11

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos algumas aplicações do conceito de derivada a problemas matemáticos: apresentamos uma técnica, na verdade, muito simples de se calcular limites de quocientes de funções com certas indeterminações - as chamadas "regras de L'Hospital", damos o conceito e a definição precisos de pontos de máximo e de mínimo globais e locais, e apresentamos o conceito de ponto crítico, muito útil para o estudo dos máximos e mínimos locais que veremos em aulas posteriores.

1 Regras de L'Hospital[1].

Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a, b[$, tais que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \text{ e } \lim_{x \to x_0} g(x) = 0.$$

Nesta seção apresentaremos, dentre outras coisas, um método para calcular:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}.$$

fazendo uso de derivadas. Estes métodos que apresentaremos são denominados **Regras de L'Hospital**.

*jeancb@ime.usp.br

[1]Guillaume François Antoine (1661-1704), Marquês de L'Hospital, foi um matemático francês. Em 1696, L'Hospital publicou seu livro *Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes* ("Cálculo Infinitesimal com Aplicações em Linhas Curvas"). Este foi o primeiro livro-texto sobre Cálculo Infinitesimal e apresentou as idéias do Cálculo Diferencial e suas aplicações à Geometria Diferencial de curvas de forma lúcida e com numerosas figuras ([4])

Teorema 1 (Regra de L'Hospital). *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a, b[$, tais que:*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = 0 \ \ e \ \ \lim_{x\to x_0} g(x) = 0.$$

Então, se $g'(x_0) \neq 0$ e se existir $\lim_{x\to x_0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, vale:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Demonstração. Tendo em mente que as funções são contínuas em x_0, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0) = 0.$$

Desta forma, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-0}{g(x)-0} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{g(x)-g(x_0)} \cdot \frac{x-x_0}{x-x_0} =$$

$$= \lim_{x\to x_0} \frac{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}{\dfrac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}} = \frac{\lim_{x\to x_0} \dfrac{f(x)-f(x_0)}{(x-x_0)}}{\lim_{x\to x_0} \dfrac{g(x)-g(x_0)}{(x-x_0)}} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

sempre que pudermos garantir que $g'(x_0) \neq 0$. Assim, temos a seguinte regra para o cálculo do limite sempre que $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ forem contínuas e deriváveis em x_0, com $g'(x_0) \neq 0$:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Exemplo 2. *Calcular:*

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x}$$

Solução: As funções $\sin, \mathrm{id}_{\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são ambas contínuas e deriváveis em $x_0 = 0$. Ademais,

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to 0} x = 0.$$

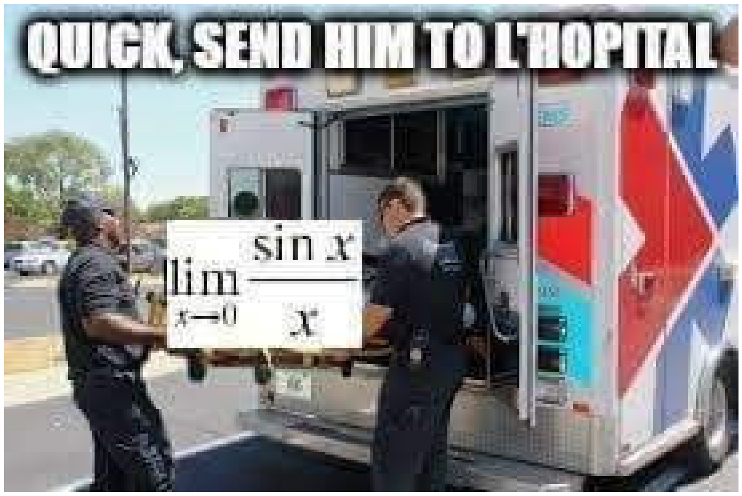


Figura 1: ”Rápido, mande-o ao L’Hospital!”

Usando a regra deduzida acima, segue que:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{\sin(x)}{x} = \frac{(\sin(x))'}{(x)'}\bigg|_{x=0} = \frac{\cos(x)}{1}\bigg|_{x=0} = \frac{\cos(0)}{1} = \frac{1}{1} = 1$$

Exemplo 3. *Calcular:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2}$$

Solução: As funções $x \mapsto 1 - x + \ln(x)$ e $x \mapsto x^3 - 3x + 2$ são ambas contínuas em um intervalo fechado contendo 1, digamos $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, e deriváveis $x_0 = 1$. Ademais,

$$\lim_{x\to 1}(1 - x + \ln(x)) = 0 \text{ e } \lim_{x\to 1}(x^3 - 3x + 2) = 0.$$

Usando a regra deduzida acima, segue que:

$$\lim_{x\to 1} \frac{1 - x + \ln(x)}{x^3 - 3x + 2} = \lim_{x\to 1} \frac{(1 - x + \ln(x))'}{(x^3 - 3x + 2)'} = \lim_{x\to 1} \left(\frac{-1 + \dfrac{1}{x}}{3x^2 - 3} \right)$$

Como $\lim_{x\to 1} \left(-1 + \dfrac{1}{x} \right) = 0$ e $\lim_{x\to 1}(3x^2 - 3) = 0$, e ambas as funções são contínuas em um intervalo fechado contendo 1, digamos $[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$, e deriváveis em $x_0 = 1$, tem-se, pela regra deduzida:

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{-1+\dfrac{1}{x}}{3x^2-3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{-\dfrac{1}{x^2}}{6x} = -\frac{1}{6}$$

A regra deduzida acima denomina-se **Regra de L'Hospital**. Esta regra pode ser estendida para outros casos, conforme veremos posteriormente.

Corolário 4. *Suponha que f seja contínua em x_0 e que $f'(x)$ exista para todo x pertencente a um intervalo aberto contendo x_0 exceto, possivelmente, em x_0. Suponha, além disto, que exista $\lim_{x\to x_0} f'(x)$ Então existe $f'(x_0)$ e, em particular, f' é contínua em x_0.*

Demonstração. Considere as funções $h(x) = f(x) - f(x_0)$ e $g(x) = x - x_0$, de modo que temos:

$$\lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - f(x_0) \overset{\substack{f \text{ contínua em } x_0 \\ \uparrow}}{=} 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x\to x_0} x - x_0 = 0$$

Aplicando a **Regra de L'Hospital**, tem-se:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \overset{\substack{\text{L'Hospital} \\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to x_0} f'(x)$$

o que prova que f' é contínua em x_0. $\square$

Teorema 5 (Regra de L'Hospital, versão 2). *Sejam $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ duas funções contínuas, ambas deriváveis em $x_0 \in]a,b[$, tais que existe $\lim_{x\to\infty}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ e:*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 0 \ \text{ e } \ \lim_{x\to\infty} g(x) = 0.$$

Então:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Demonstração. Efetuando a mudança de variável $y = \dfrac{1}{x}$ e observando que:

$$\lim_{x\to\infty} y = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0, \ \text{ por valores sempre maiores que } 0.$$

Figura 2: Cálculo 1 // Regra de L'Hospital // Estudantes do Primeiro Ano

segue que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{y\to 0_+}\frac{f\left(\frac{1}{y}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)}=\lim_{y\to 0_+}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g\left(\frac{1}{y}\right)\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)}=\lim_{y\to 0_+}\frac{f'\left(\frac{1}{y}\right)}{g'\left(\frac{1}{y}\right)}\overset{x=\frac{1}{y}}{\underset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$\square$

Exemplo 6. *Calcular, usando a regra de L'Hospital:*

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)$$

Solução: Primeiramente precisamos transformar a expressão $x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)$ no quociente de duas expressões cujo limite no infinito seja 0. Expressamos:

$$x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\frac{\sin\left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

onde tem-se:

$$\lim_{x\to\infty}\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\sin\left(\lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}\right)=\sin(0)=0$$

e:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$$

Agora aplicamos a regra de L'Hospital, tendo em vista que:

$$\left(\sin\left(\frac{2}{x}\right)\right)'=\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(\frac{2}{x}\right)'=\cos\left(\frac{2}{x}\right)\cdot\left(-\frac{2}{x^2}\right)=-\frac{2}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)$$

e que:

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

segue que:

$$\lim_{x\to\infty} x\cdot\sin\left(\frac{2}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{2}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}2\cdot\cos\left(\frac{2}{x}\right)=2\lim_{x\to\infty}\cos\left(\frac{2}{x}\right)=2\cdot 1=2$$

1.1 Indeterminações

A seguir definimos o que entendemos por "indeterminações". Atente para o fato de que as expressões simbólicas **não** têm significado aritmético, ou seja, **não são números**. A classificação das indeterminações obtidas em limites de quocientes de funções nos permitem enunciar **Regras de L'Hospital** de um modo mais prático. Assim, na seção anterior, apresentamos regras de L'Hospital para a indeterminação $\frac{0}{0}$.

Definição 7. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $x_0 \in]a, b[$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = 0 \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma ***indeterminação do tipo*** $\dfrac{0}{0}$.

Definição 8. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\backslash\{x_0\}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma ***indeterminação do tipo*** $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Definição 9. *Sejam $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funções contínuas e deriváveis em $]a, b[\backslash\{x_0\}$ tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma ***indeterminação do tipo*** $\dfrac{-\infty}{\infty}$.

Definição 10. *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e deriváveis em* $]a, b[\setminus \{x_0\}$ *tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma ***indeterminação do tipo*** $\dfrac{\infty}{-\infty}$.

Definição 11. *Sejam* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *funções contínuas e deriváveis em* $]a, b[\setminus \{x_0\}$ *tais que:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = -\infty$$

Neste caso, dizemos que o limite:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$$

nos conduz a uma ***indeterminação do tipo*** $\dfrac{-\infty}{-\infty}$.

Podemos, facilmente, obter as **Regras de L'Hospital** correspondentes às indeterminações:

$$\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$$

Teorema 12 (Regras de L'Hospital para indeterminações dos tipos $\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto, $x_0 \in \operatorname{int}(A)$, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em x_0 tais que $(\forall x \in A)(g(x) \neq 0)$. Então, se:*

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty \;\; e \;\; \lim_{x \to x_0} g(x) = \pm\infty$$

e se existe:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$$

Teorema 13 (Regras de L'Hospital para indeterminações dos tipos $\frac{-\infty}{-\infty}, \frac{-\infty}{\infty}, \frac{\infty}{-\infty}, \frac{\infty}{\infty}$ para $x \to \pm\infty$). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$ um conjunto ilimitado superiormente, $f, g : A \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em $\operatorname{int}(A)$ tais que $(\forall x \in A)(g(x) \neq 0)$. Então, se:*

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty \;\; e \;\; \lim_{x \to \pm\infty} g(x) = \pm\infty$$

e se existe:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

então:

$$\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Observação: Nos séculos XVII e XVIII, o nome era pronunciado comumente como "l'Hospital", e o próprio matemático o pronunciava desta forma. No entanto, a pronúncia francesa foi alterada: o "s" mudo foi removido e substituído por um "ô". Desta forma, é comum encontrar variantes do nome, como "L'Hôpital", por exemplo. [a]

[a] Fonte: https://tutorial.math.lamar.edu/classes/calci/lhospitalsrule.aspx

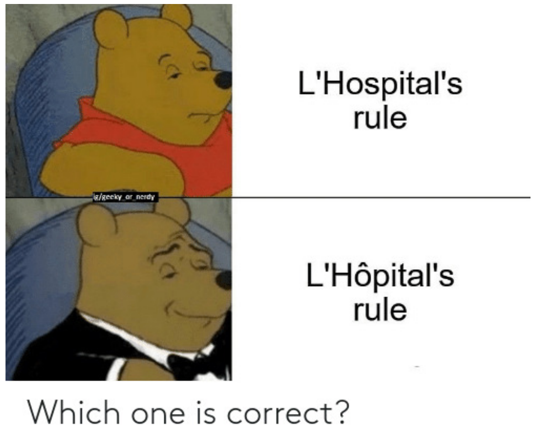


Figura 3: "Qual está correto?"

2 Extremantes Globais e Locais

Podemos utilizar as derivadas para determinar partes do domínio de uma função em que ela é crescente, decrescente, ou mesmo assume um máximo ou mínimo.

Definição 14 (ponto de máximo global). *Dada uma função qualquer $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, dizemos que x_0 é* ***um ponto de máximo global*** *de f se, e somente se, $f(x_0)$ for o* maior *valor assumido pela função em* todo *o seu domínio, ou seja:*

$$(\forall x \in D)(f(x) \leq f(x_0)).$$

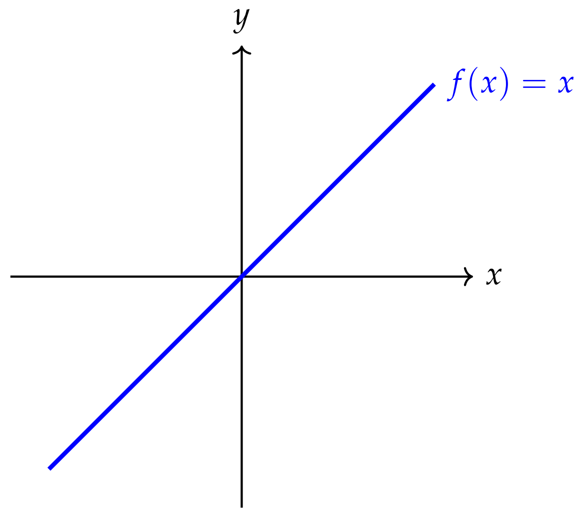
Analogamente, temos a seguinte:

Definição 15 (ponto de mínimo global). *Dada uma função qualquer $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $x_0 \in D$, dizemos que $x_0 \in D \subseteq \mathbb{R}$ é* ***um ponto de mínimo global*** *de f se, e somente se, $f(x_0)$ for o* menor *valor assumido pela função em* todo *o seu domínio, ou seja:*

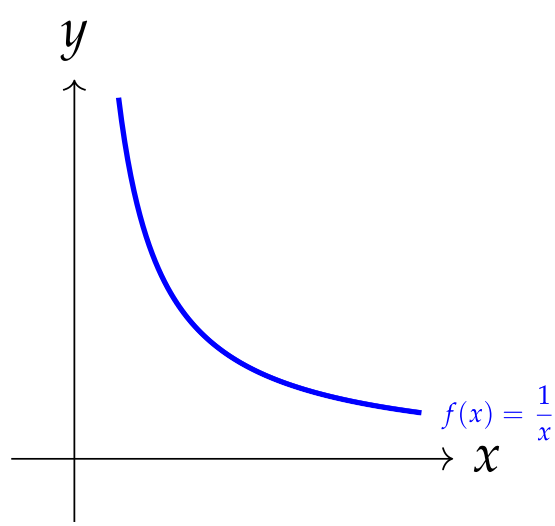
$$(\forall x \in D)(f(x_0) \leq f(x)).$$

Nem toda função admite ponto de máximo global ou de mínimo global, como é o caso das seguintes funções:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

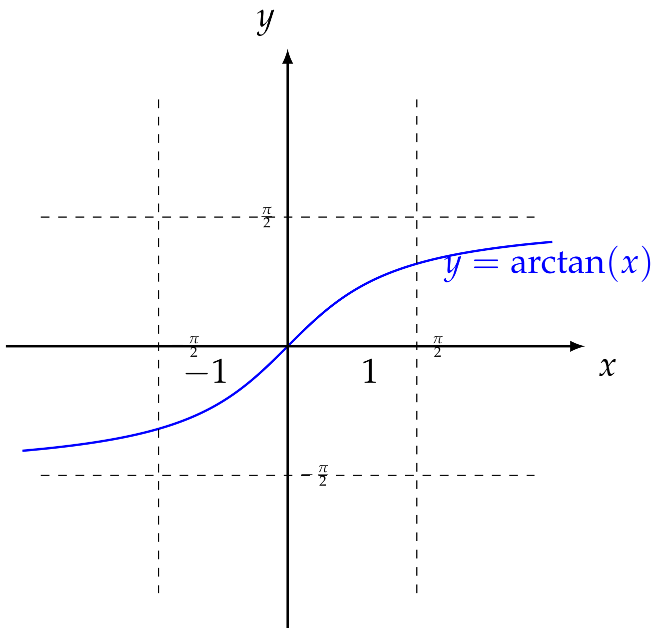


$$g: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$



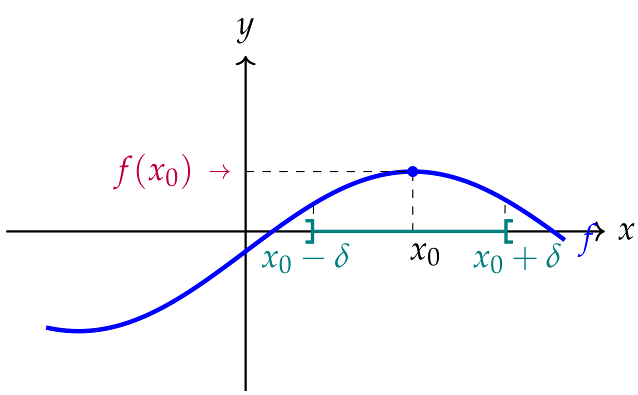
e:

$$\arctan: \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \arctan(x) \end{array}$$



Definição 16 (máximo local). *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0* ***é um ponto de máximo local*** *se, e somente se, existir $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)(f(x) \leq f(x_0))$$



Teorema 17. *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0. Se f assume um valor máximo em x_0 então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Tomemos $\delta > 0$ de tal modo que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$.

Para qualquer Δx tal que $0 < |\Delta x| < \delta$, tem-se $x_0 + \Delta x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$, e como x_0 é um ponto de máximo, vale:

$$f(x_0 + \Delta x) \leq f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \leq 0$$

Segue portanto que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \text{ se } \Delta x > 0$$

e que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \text{ se } \Delta x < 0$$

Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

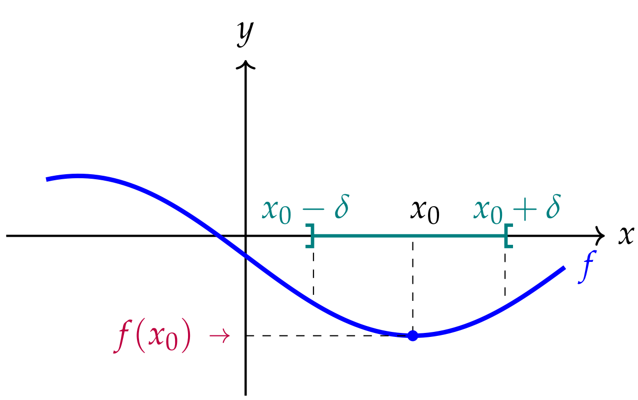
Por hipótese, no entanto, f é derivável em x_0, de modo que:

$$0 \leq f'_-(x_0) = f'(x_0) = f'_+(x_0) \leq 0$$

e portanto $f'(x_0) = 0$. $\square$

Definição 18 (mínimo local). *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que x_0 **é um ponto de mínimo local** se, e somente se, existir $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D)(f(x_0) \leq f(x))$$



Teorema 19. *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0. Se f assume um valor mínimo em x_0 então $f'(x_0) = 0$.*

Demonstração. Tomemos $\delta > 0$ de tal modo que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$.

Para qualquer Δx tal que $0 < |\Delta x| < \delta$, tem-se $x_0 + \Delta x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subseteq D$, e como x_0 é um ponto de máximo, vale:

$$f(x_0 + \Delta x) \geq f(x_0)$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \geq 0$$

Segue portanto que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 \text{ se } \Delta x > 0$$

e que:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 \text{ se } \Delta x < 0$$

Assim,

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0_+} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0_-} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0$$

Por hipótese, no entanto, f é derivável em x_0, de modo que:

$$0 \leq f'_+(x_0) = f'(x_0) = f'_-(x_0) \leq 0$$

e portanto $f'(x_0) = 0$. □

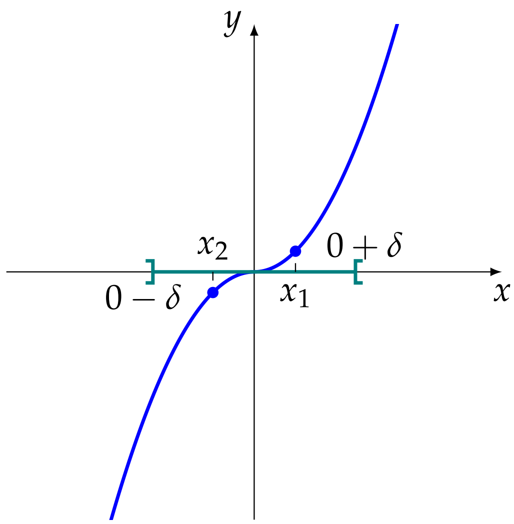
Observe, no entanto, que a recíproca é falsa, uma vez que existem pontos onde a derivada se anula que não são nem pontos de máximo local nem pontos de mínimo local, conforme ilustra o seguinte exemplo:

Exemplo 20. *Considere a função $f(x) = x^3$, da qual tem-se:*

$$f'(x) = 3 \cdot x^2$$

e portanto $f'(0) = 0$. No entanto 0 <u>não</u> é ponto de máximo local, uma vez que para qualquer $\delta > 0$, $]-\delta, \delta[$ contém sempre um número positivo - digamos $x_1 > 0$ com $0 < x_1 < \delta$, de modo que

$f(0) \leq f(x_1) = x_1^3$. 0 tampouco pode ser ponto de mínimo local, uma vez que para qualquer $\delta > 0$, $]-\delta,\delta[$ contém algum número negativo - digamos $x_1 < 0$ com $-\delta < x_2 < 0$, de modo que $x_2^3 = f(x_2) \leq 0 = f(0)$. Logo 0 não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo. Neste caso dizemos que $x = 0$ é um ponto de inflexão, ou seja, um ponto onde a "concavidade" do gráfico muda.



Definição 21 (ponto crítico). *Sejam $D \subseteq \mathbb{R}$, $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ e $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em x_0. Diz-se que x_0 é um* ***ponto crítico de*** *f se, e somente se $f'(x_0) = 0$.*

Assim, se $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é derivável em um ponto $x_0 \in \operatorname{int}(D)$, os **Teoremas 17** e **19** podem ser reformulados como segue:

Se x_0 é ponto de máximo local ou mínimo local de f então $f'(x_0) = 0$.

No entanto, conforme ilustra o **Exemplo 20**, a recíproca é falsa, ou seja:

Se $f'(x_0) = 0$ não podemos garantir que o ponto x_0 seja um máximo ou um mínimo local.

Os resultados apresentados nesta seção nos fornecem um método que nos ajuda a determinar pontos de máximo e de mínimo (globais) de uma função, como segue:

(1) Encontrar os pontos em que a derivada não existe e calcular a função nestes pontos;

(2) Encontrar os pontos críticos da função e calcular a função nestes pontos;

(3) Determinar $f(a)$ e $f(b)$.

O **maior** valor encontrado nos passos (1), (2) e (3) será o **máximo global** da função, e o **menor** valor encontrado nos passos (1),(2) e (3) será o **mínimo global** da função.

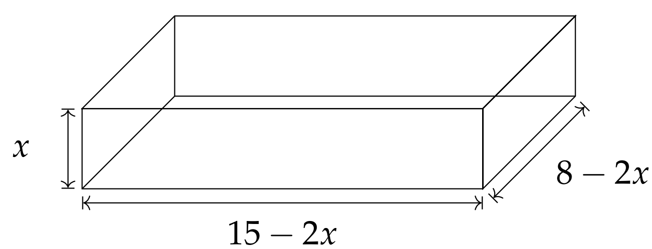
Vamos aplicar estes passos para resolver o seguinte problema:

Exemplo 22. *Um fabricante de caixas de papelão quer utilizar folhas de papelão medindo* $8dm$ *por* $15dm$*, cortando quadrados nos quatro cantos da folha e dobrando-os para cima. Qual o tamanho do quadrado a ser retirado de maneira que a caixa sem tampa tenha o maior volume possível?*

Solução: Seja x a altura da caixa, de modo que a área da base da caixa será $(15-2x)\cdot(8-2x) = 120-30x-16x+4x^2$, ou seja, Área da base $= 4x^2-46x+120$. O volume da caixa será, portanto:

$$V(x) = x \cdot \text{Área da base } = x\cdot(4x^2-46x+120) = 4x^3-46x^2+120x$$

O próprio problema impõe que devemos tomar $x \in [0,4]$.



Neste caso, como o volume é uma função polinomial de x, a função volume admite derivada em todos os pontos de $]0,4[$ - o que nos dispensa de levar a cabo o passo (1). Em seguida, seguindo o Passo (2), procuramos os pontos críticos de $V(x)$, procurando os valores de $x \in]0,4[$ tais que:

$$V'(x) = 0$$

ou seja, tais que:

$$V'(x) = 12x^2-92x+120 = 0$$

Resolvendo esta equação quadrática, obtemos duas soluções:

$$x = \frac{5}{3} \text{ e } x = 6.$$

Imediatamente descartamos $x = 6$, por não pertencer ao domínio de V, de modo que nos resta a solução $x = \dfrac{5}{3}$. Calculamos o valor da função V no ponto crítico:

$$V\left(\frac{5}{3}\right) = 4 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^3 - 46 \cdot \left(\frac{5}{3}\right)^2 + 120 \cdot \left(\frac{5}{3}\right) = \frac{2450}{27} \approx 90.741\text{dm}^3$$

Tendo em conta que $V(0) = V(4) = 0$, segue que o tamanho do quadrado a ser retirado a fim de que o volume da caixa seja máximo é de $\frac{25}{9}\text{dm}^2$.

3 Taxa de Variação Pontual

Como vimos, a derivada de uma função f em um ponto x_0 é definida tomando primeiramente a razão incremental:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

Esta razão também é chamada de *taxa média de variação* da função f no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$. Ela mede, por assim dizer, a "rapidez" com que a função varia quando x passa do valor x_0 para o valor $x_0 + \Delta x$. Dizemos "rapidez" (entre aspas) porque o termo não é apropriado totalmente, senão quando a variável independente é o tempo. Por exemplo, na equação horária do movimento, $s = s(t)$, a velocidade média:

$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

que é a taxa média de variação do espaço s entre os instantes t_0 e $t_0 + \Delta t$ indica, efetivamente, a rapidez de variação do deslocamento s entre os referidos instantes.

Do mesmo modo que a razão incremental de uma função f é chamada de taxa média de variação, a derivada $f'(x_0)$ é chamada a *taxa de variação* de f no ponto x_0.

A taxa de variação instantânea de f por unidade de variação de x em $x = x_0$ é o análogo da velocidade instantânea e tem o seguinte significado: se a função mantivesse sempre a mesma tendência de variação caracterizada pela taxa $f'(x_0)$, então seu gráfico seria a reta tangente à curva f no ponto $(x_0, f(x_0))$, cuja inclinação é $f'(x_0)$.

Seja (x, y) um ponto qualquer dessa tangente, de modo que sua equação é dada por:

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

ou:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

A equação da reta tangente ao gráfico de uma função derivável em um ponto x_0, onde a função é derivável, é:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Exemplo 23. *Encontrar a equação da reta tangente à curva dada por $y = \sin(x)$ em $x = \frac{\pi}{4}$.*

Solução: Aqui tem-se $f(x) = \sin(x)$ e $x_0 = \dfrac{\pi}{4}$. Assim, $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$, de modo que $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$. A equação da reta tangente é, portanto:

$$y = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

Exemplo 24. *Imaginemos um petroleiro avariado, cujo vazamento de óleo cubra uma área circular A de raio r. Com o passar do tempo, estas duas grandezas crescem a taxas que estão relacionadas. De fato, tem-se $A = \pi r^2$. De fato, como $A = \pi \cdot r^2$, tem-se:*

$$\frac{d}{dt}(A) = \frac{d}{dt}(\pi \cdot r^2) = \pi \cdot \frac{d}{dt}(r^2) \overset{\substack{\text{Regra da Cadeia} \\ \uparrow}}{=} \pi \cdot 2 \cdot r \frac{dr}{dt} = 2\pi \cdot r \frac{dr}{dt}$$

ou ainda:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi \cdot r}$$

Isto nos mostra que, neste fenômeno, o raio r da mancha cresce a uma taxa inversamente proporcional a si mesmo. Por exemplo, se a área cresce, digamos, a uma taxa de 10000m^2 por hora, então:

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\frac{dA}{dt}}{2\pi \cdot r} = \frac{10000}{6.2832 \cdot r}$$

Agora podemos deduzir a taxa de variação do raio (neste caso, o quanto ele aumenta) com respeito ao próprio raio.

Assim, para $r = 2\text{km}$, este raio estará se expandindo à razão de:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=2} = \frac{50000}{6.2832} \approx 796\text{m/h}$$

Quando r atingir o valor de 4km, a taxa de crescimento do raio terá sido reduzida à metade:

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=4} = \frac{25000}{6.2832} \approx 398\text{m/h}$$

Exemplo 25. *Um balão mantém a forma esférica enquanto é inflado. Encontrar a razão de variação instantânea da área superficial em relação ao raio no exato instante em que o raio é 6cm.*

Sabe-se que a área da esfera de raio r é $A(r) = 4 \cdot \pi \cdot r^2$. Desta forma,

$$\frac{d}{dr}(A(r)) = \frac{d}{dr}(4 \cdot \pi \cdot r^2) = 4 \cdot \pi \cdot \frac{d}{dr}(r^2) \overset{\substack{\text{Regra da Cadeia}\\ \uparrow}}{=} 4\pi \cdot 2 \cdot r \cdot \frac{dr}{dr} = 8 \cdot \pi \cdot r$$

Desta forma, quando $r = 6cm$, temos $dA/dr(6) = 8 \cdot \pi \cdot 6 = 48 \cdot \pi \mathrm{cm}^2/\mathrm{cm}$.

Exemplo 26. *Acumula-se areia em um monte de forma cônica a uma razão de $10\mathrm{dm}^3/\mathrm{min}$. Se a altura do monte é sempre igual a duas vezes o raio da base, a que razão cresce a altura do monte quando a altura é de $8\mathrm{dm}$?*

O volume do monte é dado por:

$$V(r) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot r^2 \cdot h$$

Como a altura é sempre o dobro do raio, temos $r = h/2$, de modo que:

$$V(h) = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 \cdot h = \frac{1}{12} \cdot \pi \cdot h^3$$

Desta forma, se considerarmos o raio e a altura como funções do instante t, $r = r(t)$ e $h = h(t)$, seguir-se-á, pela ***Regra da Cadeia****, que:*

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3 \cdot h^2 \cdot \frac{dh}{dt}$$

de modo que quando $dV/dt = 10\mathrm{dm}^3/\mathrm{min}$ e $h = 8$, teremos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{5}{8\pi}\mathrm{dm}/\mathrm{min}6$$

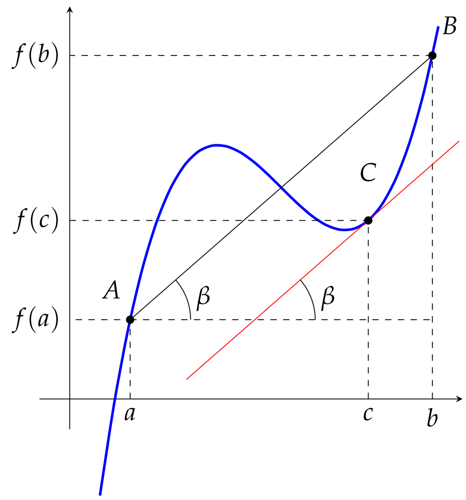
4 O Teorema do Valor Médio e suas Consequências

Veremos agora um teorema de importância fundamental conhecido como **Teorema do Valor Médio**. Ele possui um conteúdo geométrico muito sugestivo, que merece ser analisado antes mesmo que enunciemos o teorema. Para isso, consideremos uma função f e dois pontos sobre seu gráfico:

$$A = (a, f(a)) \text{ e } B = (b, f(b)).$$

O declive da secante AB é dado por:

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



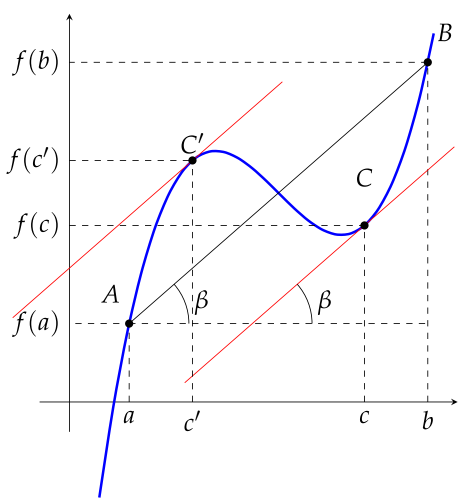
A figura acima nos sugere que entre A e B deve haver algum ponto $C = (c, f(c))$ sobre o gráfico, onde a reta tangente à curva seja paralela à secante AB. Desta forma, os declives da reta secante e da reta tangente (em vermelho) serão iguais. Como o declive da reta tangente é $f'(c)$,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c),$$

ou ainda:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) \tag{1}$$

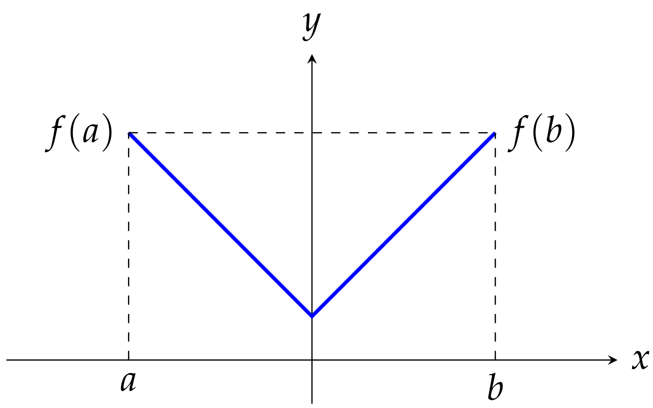
Observamos que o valor c, entre a e b, satisfazendo (1), pode não ser único, conforme ilustra a figura a seguir:



em que há dois pontos c, c' entre a e b satisfazendo (1). Assim, neste caso há duas abscissas c, c' tais que:

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a) = f'(c') \cdot (b - a).$$

Pode acontecer, também, que não haja ponto nenhum nas condições citadas, como vemos a seguir:



No caso particular em que $f(a) = f(b)$, (1) se reduz a $f'(c) = 0$. Este resultado é conhecido como o **Teorema de Rolle**, que enunciamos a seguir:

Teorema 27 (Teorema de Rolle). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em* $\operatorname{int}([a, b]) =]a, b[$ *tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Pode acontecer que f tenha valor constante, $(\forall x \in [a, b])(f(a) = f(x) = f(b))$; Neste caso, tem-se a função constante e $f' :]a, b[\to \mathbb{R}$ é identicamente nula - e o teorema é trivialmente satisfeito.

Se f não é constante, ela terá que assumir valores maiores ou menores que $f(a) = f(b)$. Por outro lado, sendo f contínua em um intervalo fechado, $[a, b]$, pelo **Teorema de Weierstraß** f assume um valor máximo e um valor mínimo neste intervalo.

Se f assumir valores maiores que $f(a)$, então f terá um ponto de máximo $x = c$ no intervalo $]a, b[$. Sendo f derivável neste ponto, segue que $f'(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

O caso em que f só assume valores menores que $f(a) = f(b)$ é análogo. $\square$

Teorema 28 (Teorema do Valor Médio). *Seja f uma função definida e contínua em um intervalo fechado $[a, b]$, derivável em $]a, b[$. Então existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que:*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Demonstração. A equação da reta que passa pelos pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$ é dada por:

$$\frac{y - f(a)}{x - a} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$y = f(a) + \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a)$$

Definimos agora uma função que mede a distância vertical entre a reta e um ponto do gráfico no ponto de abscissa x:

$$\begin{array}{rccc} F: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(a) + \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) \cdot (x - a) - f(x) \end{array}$$

Note que F é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$, com:

$$\begin{array}{rccc} F: &]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left(\dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}\right) - f'(x) \end{array}$$

e que $F(a) = F(b) = 0$, de modo que estamos em condições de aplicar o **Teorema de Rolle**, que nos garante que existe pelo menos um ponto $c \in]a, b[$ tal que $F'(c) = 0$. Mas neste ponto c, tem-se:

$$0 = F'(0) \iff f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Exemplo 29. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, derivável em $]a, b[$ tal que:*

$$(\forall x \in]a, b[)(f'(x) = 1).$$

Mostrar que $f(x) = x - a + f(a)$.

Solução: Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe pelo menos um valor $c \in]a, b[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \tag{2}$$

Dado um $\bar{x} \in [a, b]$ qualquer fixado, segue do **Teorema do Valor Médio** aplicado a $f \restriction_{[a,\bar{x}]}$ que existe algum $\bar{c} \in]a, \bar{x}[$ tal que:

$$f'(\bar{c}) = \frac{f(\bar{x}) - f(a)}{\bar{x} - a}$$

Por hipótese, no entanto, $f'(\bar{c}) = 1$, de modo que:

$$1 = \frac{f(\bar{x}) - f(a)}{\bar{x} - a}$$

$$f(\bar{x}) = f(a) + \bar{x} - a$$

Assim, dado *qualquer* $x \in [a, b]$ vale:

$$f(x) = f(a) + x - a$$

5 O Teste da Derivada Primeira

Teorema 30 (Teste da Derivada Primeira). *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Então:*

(1) *Se para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) > 0$, então f é **estritamente crescente** em $[a, b]$;*

(2) *Se para todo $x \in]a, b[$ tivermos $f'(x) < 0$, então f é **estritamente decrescente** em $[a, b]$;*

Demonstração. Ad (1): Queremos demonstrar que f é crescente em $[a, b]$, ou seja, que dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_1) < f(x_2)$, e portanto $f(x_2) - f(x_1) > 0$.

Por hipótese, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, segue que existe pelo menos um $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou seja,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{>0} \cdot \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} > 0$$

e assim

$$f(x_1) < f(x_2).$$

Ad (2): Queremos demonstrar que f é estritamente decrescente em $[a, b]$, ou seja, que dados quaisquer $x_1, x_2 \in [a, b]$ tais que $x_1 < x_2$, tem-se $f(x_2) < f(x_1)$, e portanto $f(x_2) - f(x_1) < 0$.

Por hipótese, $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua em $[a, b]$ e derivável em $]a, b[$. Pelo **Teorema do Valor Médio** aplicado ao intervalo $[x_1, x_2]$, segue que existe pelo menos um $c \in]x_1, x_2[$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

ou seja,

$$f(x_2) - f(x_1) = \underbrace{f'(c)}_{<0} \cdot \overbrace{(x_2 - x_1)}^{>0} < 0$$

e assim

$$f(x_2) < f(x_1).$$

□

Exemplo 31. *Classificar os pontos críticos de $f(x) = -2x^2 + 3x + 2$.*

Solução: Observamos que, por ser polinomial, f é derivável em todo seu domínio.

Busquemos os pontos críticos de f, ou seja, vamos procurar os valores de x tais que $f'(x) = 0$, ou seja, tais que:

$$f'(x) = -4x + 3 = 0$$

ou seja, $x = \dfrac{3}{4}$. Note que:

$$f'(x) = \begin{cases} > 0, \text{ se } x < \frac{3}{4} \\ = 0, \text{ se } x = \frac{3}{4} \\ < 0, \text{ se } x > \frac{3}{4} \end{cases}$$

Concluímos que no intervalo $]-\infty, \frac{3}{4}[$ a função é estritamente crescente, enquanto que no intervalo $]\frac{3}{4}, \infty[$ a função é estritamente decrescente. Daí podemos concluir que $x = \frac{3}{4}$ é um ponto de máximo local.

Exemplo 32. *Classificar os pontos críticos de $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$.*

Solução: Observamos que, por ser polinomial, f é derivável em todo seu domínio.

Busquemos os pontos críticos de f, ou seja, vamos procurar os valores de x tais que $f'(x) = 0$, ou seja, tais que:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

Pela fórmula quadrática encontramos uma única solução, a saber, $x = 1$.

Agora vamos estudar o sinal da derivada para podermos, em seguida, classificar o ponto crítico. Temos:

$$f'(x) = 3 \cdot (x^2 - 2x + 1) = 3 \cdot (x-1)^2,$$

de modo que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $f'(x) = 3 \cdot \overbrace{(x-1)^2}^{\geq 0} \geq 0$. Temos, assim que $x = 1$ não é nem ponto de máximo local nem ponto de mínimo local, uma vez que esta função é não decrescente.

Na próxima aula veremos um método mais prático para classificar pontos críticos.

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Guillaume François Antoine, Marquês de L'Hôpital. In: Wikipédia, a enciclopédia livre. Flórida: Wikimedia Foundation, 2021.