MAT 0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 12

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos o conceito de derivada de ordem superior de uma função, e damos uma interpretação cinemática e uma geométrica para a derivada segunda de uma função - esta última como um indicativo da concavidade do gráfico. Apresentamos também os pontos em que a derivada segunda se anula, os "pontos de inflexão", que podem ser tanto horizontais quanto oblíquos.

Apresentamos o teste da derivada segunda que nos permite decidir, analiticamente, se um ponto crítico de uma função é um máximo ou um mínimo local. Indicamos como encontrar os pontos de máximo e de mínimo de uma função, e damos alguns exemplos de aplicações a problemas de otimização.

Introduzimos a noção de assíntota de um gráfico e descrevemos um processo para determinar assíntotas.

Encerramos com um método de esboço de gráficos de funções, apresentando diversos exemplos.

1 Derivadas de Ordem Superior

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $]a, b[$. Já vimos a definição da função derivada de f:

$$\begin{array}{rccc} f' : &]a,b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f'(x) \end{array}$$

Ao derivarmos esta função f', obtemos a chamada "derivada segunda de f" ou "derivada de segunda ordem de f", denotada por:

*jeancb@ime.usp.br

$$
\begin{array}{rccc}
f'': &]a,b[& \to & \mathbb{R} \\
 & x & \mapsto & f''(x)
\end{array}
$$

Exemplo 1. *Dada* $f(x) = 5x^4$, *tem-se* $f'(x) = 4 \cdot 5x^3 = 20x^3$ *e, portanto* $f''(x) = 3 \cdot 20x^2 = 60x^2$.

Exemplo 2. *Para* $f(x) = \sin(x)$ *temos* $f'(x) = (\sin(x))' = \cos(x)$ *e, portanto* $f''(x) = (f'(x))' = (\cos(x))' = -\sin(x)$.

Podemos generalizar isto para derivadas de ordem $n \in \mathbb{N}$, sempre que a derivada de ordem $n-1$ de f for derivável.

Definição 3. *Dada uma função* $y = f(x)$, *a* ***derivada de ordem*** n *de* f *é denotada por* $f^{(n)}(x)$ *e dada por:*

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Exemplo 4. *Dada a função* $f(x) = e^{kx}$, *onde* $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *é uma constante, temos:*

$$
\begin{gathered}
f'(x) = k \cdot e^{kx} \\
f''(x) = k^2 \cdot e^{kx} \\
\vdots \\
f^{(n)}(x) = k^n \cdot e^{kx}
\end{gathered}
$$

Exemplo 5. *Se* $f(x) = \sin(x)$, *então:*

$$
\begin{gathered}
f'(x) = \cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) \\
f''(x) = (\cos(x))' = -\sin(x) = \sin\left(x + 2 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
f^{(3)}(x) = (-\sin(x))' = -\cos(x) = \sin\left(x + 3 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
f^{(4)}(x) = (-\cos(x))' = \sin(x) = \sin\left(x + 4 \cdot \frac{\pi}{2}\right) \\
\vdots \\
f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n \cdot \frac{\pi}{2}\right)
\end{gathered}
$$

De modo análogo pode-se calcular as derivadas de qualquer ordem das outras funções elementares. Por exemplo, para $g(x) = \ln(x)$ tem-se:

$$g'(x) = (\ln(x))' = \frac{1}{x}$$

$$g''(x) = \left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{-1}{x^2}$$

$$g^{(3)}(x) = \left(\frac{-1}{x^2}\right)' = \frac{2}{x^3}$$

$$g^{(4)}(x) = \left(\frac{2}{x^3}\right)' = -\frac{6}{x^4}$$

$$g^{(5)}(x) = \left(\frac{6}{x^4}\right)' = \frac{24}{x^5}$$

e assim por diante.

1.1 A Interpretação Cinemática da Derivada Segunda

Seja s o espaço percorrido por um corpo ao longo do tempo, o que expressamos por:

$$s = f(t)$$

Conforme já sabermos, podemos interpretar $s' = f'(t)$ como a velocidade instantânea do corpo.

Em um instante t_0, seja $v(t_0)$ a velocidade do corpo no instante t_0. Caso o movimento não seja uniforme, após um intervalo de tempo Δt que deixamos correr desde o instante t_0, a velocidade terá variado um incremento de Δv.

A **aceleração média** durante o período de tempo Δt é o quociente do incremento da velocidade pelo incremente de tempo:

$$a_{\text{média}} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

A **aceleração no instante** t_0 é igual à derivada da velocidade com respeito ao tempo em t_0:

$$a(t_0) = \left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=t_0}$$

Uma vez que $v = \dfrac{ds}{dt}$, temos:

$$a(t_0) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right)\bigg|_{t=t_0} = \frac{d^2 s}{dt^2}\bigg|_{t=t_0}$$

que nos diz que a aceleração em um instante t_0 é a segunda derivada da função s com respeito ao tempo no instante t_0. Assim:

$$a(t_0) = s^{(2)}(t_0).$$

1.2 A concavidade do gráfico de uma função

Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável, e seja $x_0 \in]a, b[$. A reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada pela equação:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad \text{ou} \quad y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Deste modo, a reta tangente em $(x_0, f(x_0))$ é o gráfico da função:

$$\begin{array}{rccc} T: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) \end{array}$$

Definição 6 (concavidade voltada para cima em um ponto). *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que f* ***tem concavidade voltada para cima em*** *x_0 se existir $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[$ e:*

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\})(f(x) > T(x))$$

Definição 7 (concavidade voltada para cima em um intervalo). *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável. Dizemos que f* ***tem concavidade voltada para cima em*** *$]a, b[$ se:*

$$(\forall x \in]a, b[)((x \neq x_0) \Rightarrow (f(x) > T(x)))$$

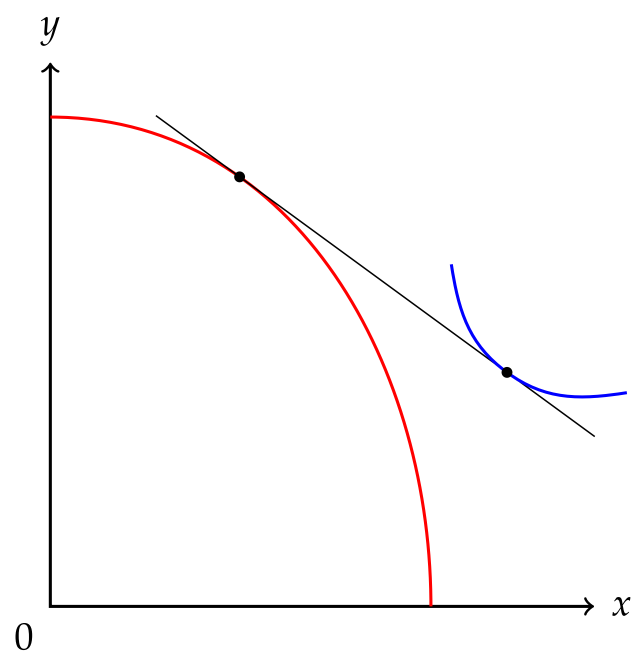
Definição 8 (concavidade voltada para baixo em um ponto). *Seja $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in]a, b[$. Dizemos que f* ***tem concavidade voltada para baixo em*** *x_0 se existir $\delta > 0$ tal que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset]a, b[$ e:*

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\setminus \{x_0\})(f(x) < T(x))$$

Definição 9 (concavidade voltada para baixo em um intervalo). *Seja* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$ *uma função derivável. Dizemos que* f ***tem concavidade voltada para baixo em*** $]a, b[$ *se:*

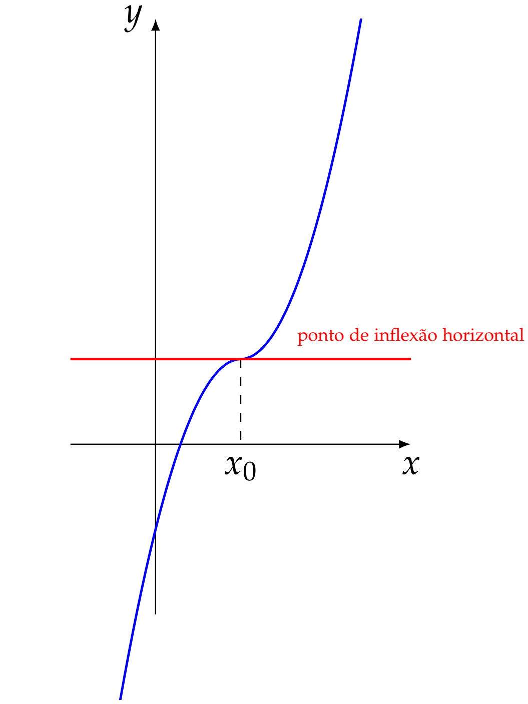
$$(\forall x \in]a, b[)((x \neq x_0) \Rightarrow (f(x) < T(x)))$$

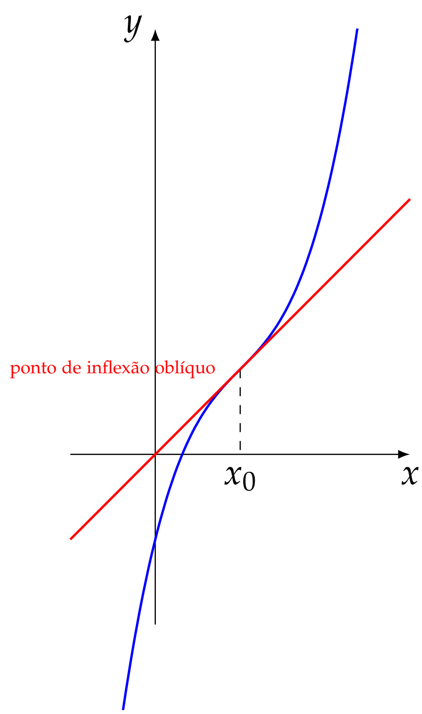
Na figura abaixo, vemos uma curva (em vermelho) com a concavidade voltada para baixo e uma curva (em azul) com a concavidade voltada para cima:



Definição 10 (ponto de inflexão). *Sejam* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e* $x_0 \in \operatorname{int}(D)$ *tais que* f *é contínua em* x_0. *Dizemos que* x_0 ***é ponto de inflexão de*** f *se existirem números* $a < x_0$ *e* $b > x_0$ *tais que* f *tenha concavidades de nomes contrários em* $]a, x_0[$ *e em* $]x_0, b[$.

Dentre os pontos de inflexão temos dois tipos: os pontos de inflexão oblíquos e os horizontais, ilustrados em seguida.





O teorema a seguir relaciona o sinal da derivada segunda de f em um intervalo $]a, b[$ com a concavidade de seu gráfico neste intervalo.

Teorema 11. *Seja* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função derivável até segunda ordem em um intervalo* $]a, b[\subseteq D \subseteq \mathbb{R}$. *Então:*

(a) Se para todo $x \in]a, b[$ *tivermos* $f''(x) > 0$, *então* f *terá concavidade voltada para cima em* $]a, b[$;

(b) Se para todo $x \in]a, b[$ *tivermos* $f''(x) < 0$, *então* f *terá concavidade voltada para baixo em* $]a, b[$;

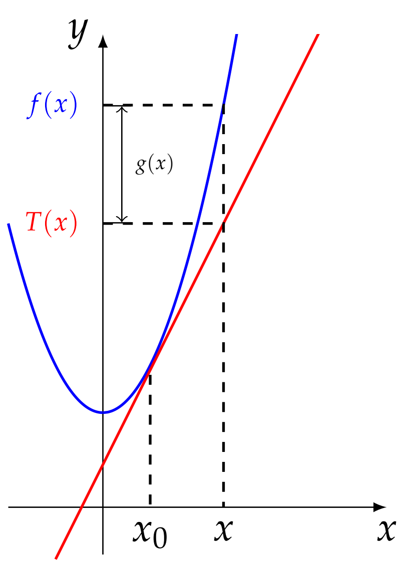
Demonstração. Ad (a): seja $x_0 \in]a, b[$ qualquer. Precisamos provar que, para todo $x \in]a, b[$, $x \neq x_0$, tem-se:

$$f(x) > T(x)$$

onde $T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Consideremos a função auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} g: &]a, b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - T(x) \end{array}$$



que mede a diferença entre $f(x)$ e $T(x)$. Para mostrar que a concavidade da curva está voltada para cima, mostraremos que para todo $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$ temos $g(x) > 0$.

Temos:

$$\begin{cases} g'(x) = f'(x) - T'(x) \\ (\forall x \in]a, b[)(T'(x) = f'(x_0)) \end{cases}$$

Observe que $T'(x) = [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]' = [f'(x_0) \cdot x]' - [f'(x_0) \cdot x_0]' = f'(x_0)$, de modo que $g'(x) = f'(x) - f'(x_0)$ e, em particular, $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

Assim,

$$\boxed{(\forall x \in]a, b[)(g'(x) = f'(x) - f'(x_0))}$$

Como, por hipótese, pra todo $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$ temos $f''(x) > 0$, segue que f' é estritamente crescente em $]a, b[$. Assim,

$$\begin{cases} g'(x_0) = 0 < g'(x) \text{ para } x_0 < x < b \\ g'(x) < g'(x_0) = 0 \text{ para } a < x < x_0 \end{cases}$$

Segue que, como $g' \restriction_{]a,x_0[} < 0$, g é estritamente decrescente em $]a, x_0[$, e como $g' \restriction_{]x_0,b[} > 0$, g é estritamente crescente em $]x_0, b[$ – e portanto, x_0 é um mínimo local. Como $g(x_0) = 0$, resulta que para todo $x \in]a, b[\setminus \{x_0\}$ tem-se:

$$g(x) > 0$$

e a concavidade do gráfico está voltada para cima.

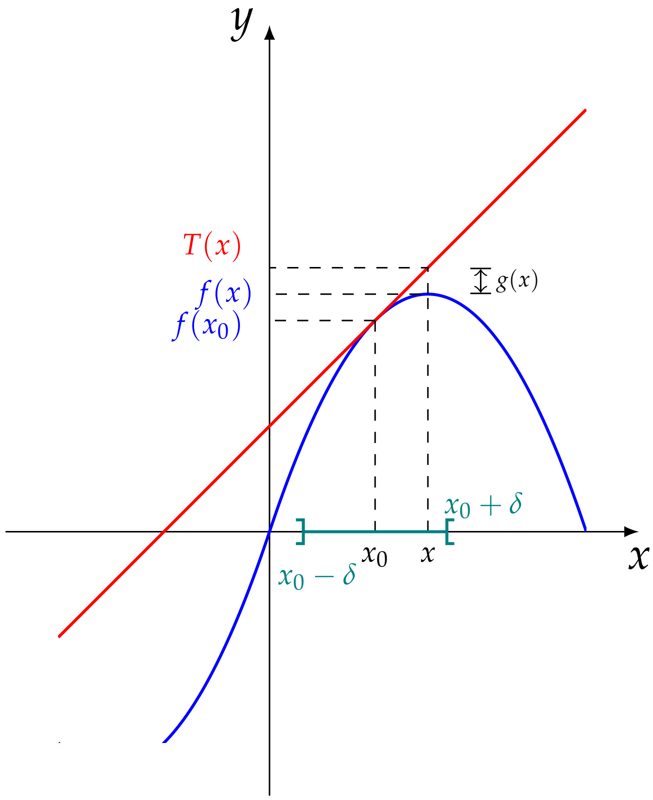
Ad (b): seja $x_0 \in]a, b[$ qualquer. Precisamos provar que, para todo $x \in]a, b[$, $x \neq x_0$, tem-se:

$$f(x) < T(x),$$

onde $T(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$.

Consideremos a função auxiliar:

$$\begin{array}{rccc} g: &]a, b[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & T(x) - f(x), \end{array}$$



que mede a diferença entre $T(x)$ e $f(x)$. Para mostrar que a concavidade da curva está voltada para baixo, mostraremos que para todo $x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$ temos $g(x) > 0$.

Temos:

$$\begin{cases} g'(x) = T'(x) - f'(x) \\ (\forall x \in]a,b[)(T'(x) = f'(x_0)) \end{cases}$$

Observe que $T'(x) = [f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)]' = [f'(x_0) \cdot x]' - [f'(x_0) \cdot x_0]' = f'(x_0)$, de modo que $g'(x) = f'(x_0) - f'(x)$ e, em particular, $g'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0$.

Assim,

$$(\forall x \in]a,b[)(g'(x) = f'(x_0) - f'(x))$$

Como, por hipótese, pra todo $x \in]a,b[\setminus \{x_0\}$ temos $f''(x) < 0$, segue que f' é estritamente decrescente em $]a,b[$, de modo que g' é estritamente crescente. Assim,

$$\begin{cases} g'(x_0) = 0 < g'(x) \text{ para } x_0 < x < b \\ g'(x) < g'(x_0) = 0 \text{ para } a < x < x_0 \end{cases}$$

Segue que, como $g' \restriction_{]a,x_0[} < 0$, pelo **Teste da Derivada Primeira** aplicado a g, g é estritamente decrescente em $]a, x_0[$, e como $g' \restriction_{]x_0,b[} > 0$, g é estritamente crescente em $]x_0, b[$ – logo, x_0 é um mínimo local. Como $g(x_0) = 0$, resulta que para todo $x \in]a, b[\setminus\{x_0\}$ tem-se:

$$g(x) = T(x) - f(x) > 0$$

e a concavidade do gráfico está voltada para baixo. □

Em suma, temos o seguinte critério:

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável até ordem dois.

- Se para todo $x \in]a, b[$, $f''(x) > 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima no intervalo $]a, b[$;
- Se para todo $x \in]a, b[$, $f''(x) < 0$, então o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo no intervalo $]a, b[$;

Observação 12. *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma funcção derivável em $x_0 \in \operatorname{int}(D)$, cuja derivada segunda é contínua em x_0. Se x_0 é um ponto de inflexão de f então $f''(x_0) = 0$. De fato, se x_0 é um ponto de inflexão, existe $\delta > 0$ tal que $f \restriction_{]x_0-\delta,x_0[}$ tem concavidade voltada para cima (respectivamente, "para baixo") e $f \restriction_{]x_0,x_0+\delta[}$ tem concavidade voltada para baixo (respectivamente, "para cima"), de modo que em $]x_0 - \delta, x_0[$ tem-se $f''(x) = f \restriction''_{]x_0-\delta,x_0[}(x) > 0$ e em $]x_0, x_0 + \delta[$ tem-se $f''(x) = f \restriction''_{]x_0,x_0+\delta[}(x) > 0$. Como f'' é contínua em x_0 e como:*

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_{0+}} f''(x) \geq 0$$

e:

$$f''(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_{0-}} f''(x) \leq 0$$

segue que:

$$0 \leq f''(x_0) \leq 0$$

e portanto $f''(x_0) = 0$.

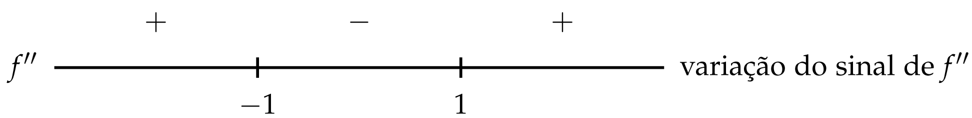
Exemplo 13. *Estudar a concavidade do gráfico da função dada por $f(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$, e determinar seus pontos de inflexão.*

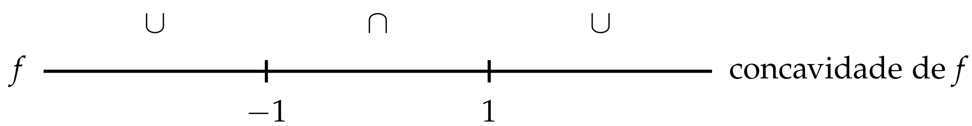
Solução: Como se trata de uma função duas vezes derivável, estudar a concavidade do gráfico desta função é equivalente a estudar o sinal da derivada segunda.

Assim,

$$f'(x) = -x \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$
$$f''(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se $e^{-\frac{x^2}{2}} > 0$, o que determina o sinal de $f''(x)$ é a expressão $x^2 - 1$. Assim, temos:





$$\begin{cases} \text{Se } x \in]-\infty, -1[\text{ ou } x \in]1, \infty[\text{ tem-se } f''(x) > 0 \\ \text{Se } x \in]-1, 1[\text{ tem-se } f''(x) < 0 \end{cases}$$

ou seja,

$$\begin{cases} \text{Se } x \in]-\infty, -1[\text{ ou } x \in]1, \infty[, \ f \text{ tem concavidade voltada para cima} \\ \text{Se } x \in]-1, 1[, \ f \text{ tem concavidade voltada para baixo} \end{cases}$$

Os pontos de inflexão da função são os zeros da função $f''(x) = (x^2 - 1) \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$, ou seja, são os pontos -1 e $+1$.

1.3 O Teste da Derivada Segunda

Já vimos que se x_0 é um ponto em que a derivada segunda de uma função se anula temos um ponto de inflexão do gráfico, ou seja, um ponto no qual a concavidade do gráfico muda de nome. O teste da derivada segunda nos permitirá classificar pontos críticos de uma função em termos do sinal de sua derivada segunda.

Teorema 14 (Teste da Derivada Segunda). *Sejam $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em um intervalo $[a, b] \subset D$, $x_0 \in]a, b[$ um ponto crítico de f (ou seja, x_0 é tal que $f'(x_0) = 0$) e suponha que f seja pelo menos duas vezes derivável em $]a, b[$, sendo a derivada segunda de f contínua em x_0. Então:*

(a) Se $f''(x_0) > 0$ então x_0 é ponto de mínimo local;

(b) Se $f''(x_0) < 0$ então x_0 é ponto de máximo local;

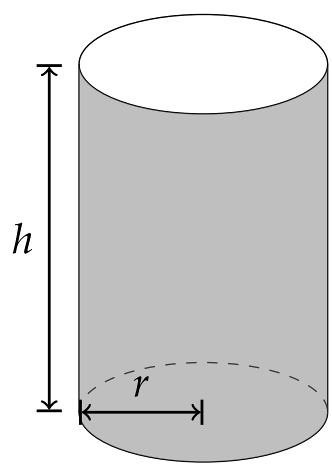
Demonstração. Ad (a): Por hipótese, f'' é contínua em x_0, de modo que pelo **Teorema da Conservação do Sinal**, existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f''(x) > 0$. Como $f''(x) = (f')'(x)$, concluímos que f' é crescente em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Temos também que f' é contínua em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (pois f é duas vezes derivável em $]a, b[$, o que implica que f' é derivável em $]a, b[$ e portanto f' é contínua em $]a, b[$ - sendo, em particular, contínua em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$), de modo que como é estritamente crescente vale $x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow f'(x) < 0$ e $x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow f'(x) > 0$, de modo que f decresce de $x_0 - \eta$ até x_0 e, em seguida, cresce de x_0 a $x_0 + \eta$. Isto significa que x_0 é um ponto de mínimo da função f.

Ad (b): Por hipótese, f'' é contínua em x_0, de modo que pelo **Teorema da Conservação do Sinal**, existe $\eta > 0$ tal que para todo $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, $f''(x) < 0$. Como $f''(x) = (f')'(x)$, concluímos que f' é decrescente em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$. Temos também que f' é contínua em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ (pois f é duas vezes derivável em $]a, b[$, o que implica que f' é derivável em $]a, b[$ e portanto f' é contínua em $]a, b[$ - sendo, em particular, contínua em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$), de modo que como é estritamente decrescente vale $x_0 - \eta < x < x_0 \Rightarrow f'(x) > 0$ e $x_0 < x < x_0 + \eta \Rightarrow f'(x) < 0$, de modo que f cresce de $x_0 - \eta$ até x_0 e, em seguida, decresce de x_0 a $x_0 + \eta$. Isto significa que x_0 é um ponto de máximo da função f.

□

Exemplo 15. *Um fabricante de latas de massa de tomate deseja encontrar a relação entre a altura e o raio para produzir uma lata na forma de um cilindro, de maneira que para um volume fixo a quantidade de material seja a menor possível. Qual deve ser esta relação?*

Solução:



Sabe-se que o volume (fixado) V da lata será:

$$V = \pi \cdot r^2 \cdot h$$

de modo que a altura se expressa em termos do raio como:

$$h(r) = \frac{V}{\pi \cdot r^2}$$

A quantidade Q de material para produzir a lata será proporcional à área superficial, que é:

$$Q(r) = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h(r) + 2 \cdot \pi \cdot r^2 = 2 \cdot \pi \left(\frac{V}{\pi \cdot r} + r^2 \right)$$

Vamos buscar os pontos críticos de Q, ou seja, vamos procurar os valores de r tais que:

$$Q'(r) = 0$$

Mas $Q'(r) = 2 \cdot \pi \left[-\frac{V}{\pi \cdot r^2} + 2 \cdot r \right]$
de modo que $Q'(r) = 0 \iff -\frac{V}{\pi \cdot r^2} + 2 \cdot r = 0$, ou seja, se, e somente se,

$$2 \cdot r = \frac{V}{\pi \cdot r^2} \iff$$

$$r^3 = \frac{V}{2 \cdot \pi} \iff$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$$

Logo, $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$ é ponto crítico de Q. Falta verificarmos se este ponto é um ponto de máximo ou de mínimo. Para classificá-lo assim, aplicamos o **Teste da Derivada Segunda**:

$$Q''(r) = 2 \cdot \pi \cdot \left[\frac{2 \cdot V}{\pi \cdot r^3} + 2 \right]$$

Assim,

$$Q'' \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}} \right) = 12 \cdot \pi > 0.$$

Concluímos, assim, que $\sqrt[3]{\frac{V}{2 \cdot \pi}}$ é minimante da função. Para descobrir a razão entre o raio e a altura, vemos que:

$$r^3 = \frac{V}{2 \cdot \pi} = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{2 \cdot \pi} = \frac{r^2 \cdot h}{2}$$

$$r = \frac{h}{2}$$

Isto significa que as latas cuja altura seja igual ao diâmetro são as latas que minimizam a quantidade de material para produção.

Exemplo 16. *Um cone circular reto deve ser circunscrito numa esfera de raio conhecido. Encontre a razão entre a altura e o raio da base do cone que tiver volume mínimo.*

1.4 Máximo e Mínimo de Função Contínua em Intervalo Fechado

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. O **Teorema de Weierstrass** (**Teorema 26** da Agenda 8) garante-nos que f assume em $[a,b]$ um máximo global e um mínimo global. Vamos descrever, a seguir, um processo bastante interessante para determinar os valores máximo e mínimo de f em $[a,b]$.

Suponhamos f derivável em $]a,b[$. Seja $f(x_0)$ o valor máximo assumido por f em $[a,b]$. Deste modo, ou bem x_0 é uma extremidade do intervalo $[a,b]$ ou é um ponto de $]a,b[$.

Se $x_0 \in]a,b[$, pelo **Teorema 17** da Agenda 11, tem-se $f'(x_0) = 0$. Segue que para obter o valor máximo de f em $[a,b]$, é suficiente comparar os valores que f assume nas extremidades de $[a,b]$ com os assumidos nos pontos críticos que pertencem a $]a,b[$. O valor máximo de f em $[a,b]$ será, então, o maior daqueles valores.

2 Assíntotas de Um Gráfico

Muito frequentemente precisamos investigar a forma de uma curva $y = f(x)$ e, consequentemente, o tipo de variação da função no caso de um crescimento ilimitado (em valor absoluto) da abscissa ou da ordenada dos pontos da curva. Diversos comportamentos podem ser encaixados nestas situações: pode ocorrer que, conforme nos aproximemos, pela direita ou pela esquerda, de um certo valor $x_0 \in \mathbb{R}$, a função tenda a mais ou menos infinito. Também pode ocorrer que, conforme a variável x tenda a mais ou menos infinito, o gráfico da função se aproxime mais e mais de certa reta.

Em ambos os casos temos o que chamamos de “assíntotas”: no primeiro caso, temos as assíntotas verticais, e no segundo as assíntotas oblíquas.

Definição 17 (assíntota vertical). *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D'$. Dizemos que a reta vertical $x = x_0$* ***é uma assíntota vertical de*** *f se for um dos seguintes casos:*

$$\lim_{x \to x_{0+}} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_{0-}} f(x) = \pm\infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$$

Definição 18 (assíntota oblíqua). *Seja δ a distância entre uma reta r e um ponto do gráfico de uma dada função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Se para obter valores de δ arbitrariamente pequenos for suficiente tomarmos valores de x suficientemente grandes, dizemos que a reta r é uma* ***assíntota oblíqua*** *do gráfico de f.*

Se a reta:

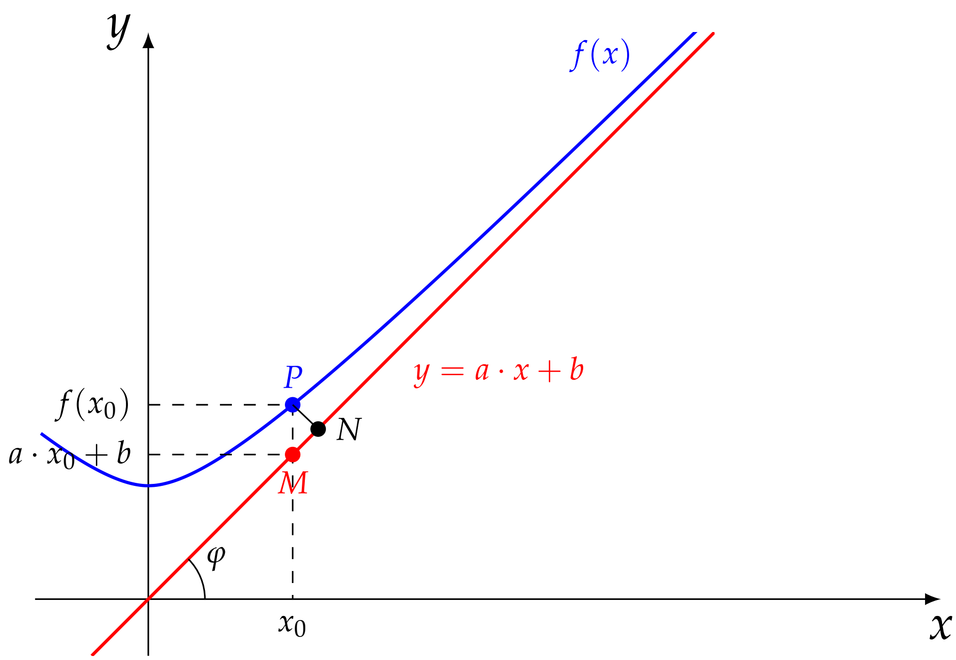
$$y = a \cdot x + b$$

é uma assíntota, então:

$$\lim_{x \to \infty} \delta = \lim_{x \to \infty} PN = 0$$

Mas $\cos(\varphi) = \dfrac{PN}{PM}$, de modo que $PM = \dfrac{PN}{\cos(\varphi)}$. Assim, tem-se pelo fato de φ ser constante, que:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{PN}{\cos(\varphi)} = 0$$



Mas $PM = f(x) - a \cdot x - b$, de modo que:

$$\lim_{x \to \infty} PM = \lim_{x \to \infty} [f(x) - a \cdot x - b] = \lim_{x \to \infty} x \cdot \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$$

ou seja,

$$\lim_{x \to \infty} \left[\frac{f(x)}{x} - a - \frac{b}{x}\right] = 0$$

ou, equivalentemente,

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$$

Por hipótese, também, sabe-se que:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) - a \cdot x - b = 0$$

de modo que:

$$b = \lim_{x \to \infty} [f(x) - a \cdot x]$$

As assíntotas podem ser horizontais, verticais ou oblíquas.

Exemplo 19. *Considere a função:*

$$f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 1}$$

Nota-se, prontamente, que há uma assíntota vertical em $x = -1$. De fato,

$$\lim_{x \to -1_+} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = \infty$$

e:

$$\lim_{x \to -1_-} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} = -\infty$$

Se o gráfico admite uma assíntota oblíqua, ela deve ser da forma:

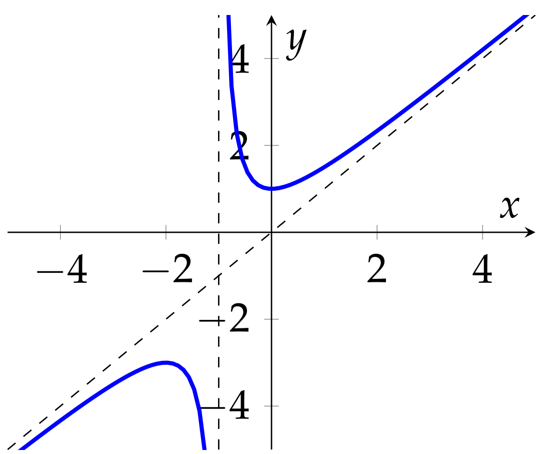
$$y = a \cdot x + b.$$

Devemos, portanto, buscar valores de a e de b tais que:

$$a = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + x} = 1$$

$$b = \lim_{x \to \infty} f(x) - a \cdot x = \lim_{x \to \infty} f(x) - x = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x + 1} = 0$$

A assíntota oblíqua tem equação $y = x$.



Exemplo 20. *Considere a função:* $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x}$. *Temos:*

$$\lim_{x \to 0_+} f(x) = \lim_{x \to 0_+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0_-} f(x) = \lim_{x\to 0_-} \frac{x^2+2x-1}{x} = \infty$$

A reta $x = 0$ é uma assíntota vertical de f.

3 Esboço do Gráfico de Funções

Nesta seção veremos alguns exemplos de esboços de gráficos de funções feitos manualmente.

Para o esboço do gráfico de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sugerimos o roteiro:

(1) explicitar o domínio natural da função e encontrar os seus pontos de descontinuidade;

(2) determinar a função derivada, f', identificando os intervalos de crescimento e de decrescimento, máximos e mínimos locais, bem como os pontos onde a derivada não está definida;

(3) determinar a função f'', a fim de estudar a concavidade e destacar os pontos de inflexão do gráfico;

(4) Calcular os limites laterais à direita e à esquerda de f em pontos $x_0 \in \mathbb{R}$ nos seguintes casos:

   (i) se $x_0 \in D$ mas f é descontínua em x_0;

   (ii) se $x_0 \notin D$ mas x_0 é ponto de acumulação à direita ou à esquerda de D;

   (iii) se x_0 é ponto onde f não admite derivada, calcular os limites laterais à direita e à esquerda de f'.

(5) calcular os limites conforme $x \to \infty$ e $x \to -\infty$;

(6) determinar ou localizar as raízes (zeros) de f.

(7) Construir uma tabela com os valores de f nos pontos característicos (raízes, máximos, mínimos, inflexões e singularidades).

(8) Encontrar e esboçar as esboçar as assíntotas verticais, horizontais e oblíquas, quando existirem;

Exemplo 21. *Esboçar o gráfico da função:*

$$f(x) = 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}}$$

Solução: Seguindo o roteiro, vemos primeiramente (1), que $\operatorname{dom}(f) = \mathbb{R}$.

Para determinar os intervalos de crescimento e de decrescimento da função f, precisamos estudar a derivada da função.

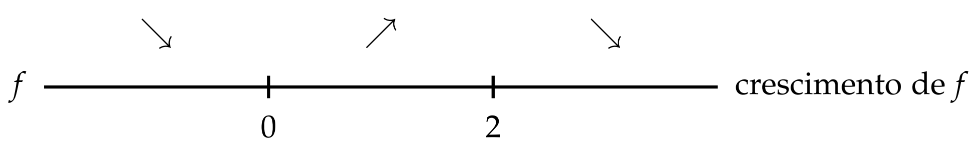
Temos, para todo $x \neq 0$, $f'(x) = \dfrac{10}{3}x^{-\frac{1}{3}} - \dfrac{5}{3}x^{\frac{2}{3}} = \dfrac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot (2-x)$, e temos $f'(x) = 0 \iff x = 2$. Como a derivada em 0 não existe, teremos uma quina no gráfico.

(2) Também,

$$\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot (2-x) > 0 \iff (0 < x < 2)$$

$$\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot (2-x) < 0 \iff (x < 0) \vee (x > 2)$$

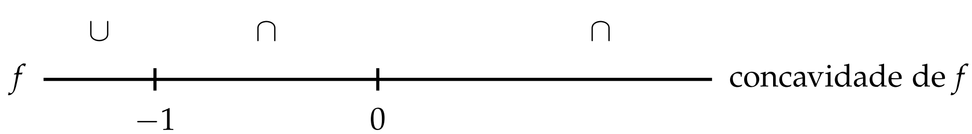
Desta forma, a função é decrescente em $]-\infty, -1[$ e em $]2, \infty[$, e é crescente em $]0, 2[$.



(3) Estudamos a concavidade de f analisando a derivada segunda. Para todo $x \neq 0$ temos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left[\frac{5}{3}x^{-\frac{1}{3}} \cdot (2-x)\right] = -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} - \frac{10}{9}x^{-\frac{1}{3}} = -\frac{10}{9}x^{-\frac{4}{3}} \cdot (1+x)$$

Assim, $f''(x) = 0$ ocorre se, e somente se $1 + x = 0$, ou seja, se, e somente se, $x = -1$.



(4) Neste caso o domínio é $\mathbb{R}$ e a função é contínua em $\mathbb{R}$, de modo que podemos suprimir este passo;

(5) Temos:

$$\lim_{x\to\infty} 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = \lim_{x\to\infty} x^{\frac{2}{3}} \cdot (5-x) = -\infty$$

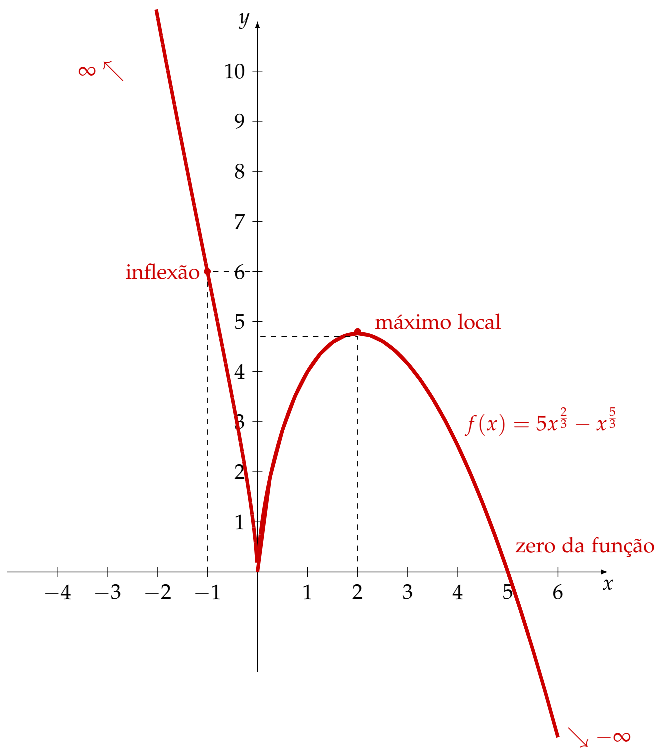
$$\lim_{x\to-\infty} 5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = \lim_{x\to-\infty} x^{\frac{2}{3}} \cdot (5-x) = \infty$$

(6) As raízes de f são os valores de x tais que:

$$5x^{\frac{2}{3}} - x^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{2}{3}} \cdot (5 - x) = 0 \iff (x = 0) \vee (x = 5)$$

Calculando f nos pontos característicos, temos:

x	$f(x)$
-1	6
0	0
2	$\sqrt[3]{4}$
5	$-\frac{5}{\sqrt[3]{5}}$



Exemplo 22. *Esboçar o gráfico da função:*

$$f(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

Solução: Seguindo o passo (1), vemos que dom $(f) = \mathbb{R}$, uma vez que a função é polinomial.

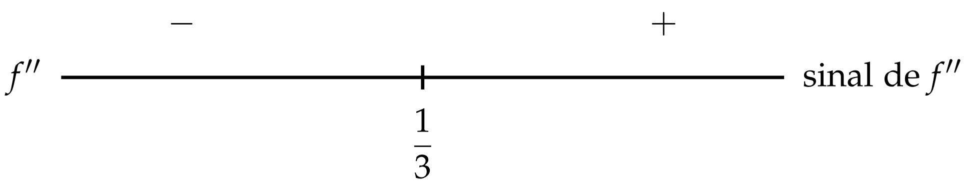
Busquemos, seguindo o passo (2), os intervalos de crescimento e de decrescimento de f, estudando o sinal de:

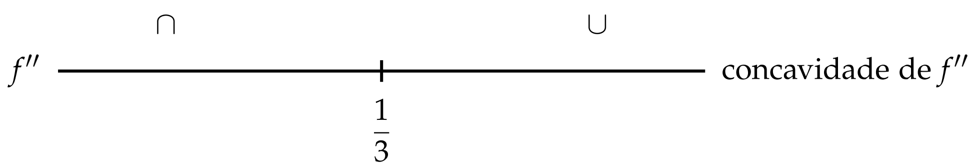
$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 1$$

Como sabemos, f' tem como gráfico uma parábola com concavidade voltada para cima e raízes em $-\frac{1}{3}$ e em 1:

Agora passamos ao passo (3), estudando a concavidade do gráfico ao estudar o sinal de:

$$f''(x) = 6x - 2$$





O único ponto de inflexão do gráfico é, portanto, $x = \frac{1}{3}$.

Pelo passo (5), calculamos:

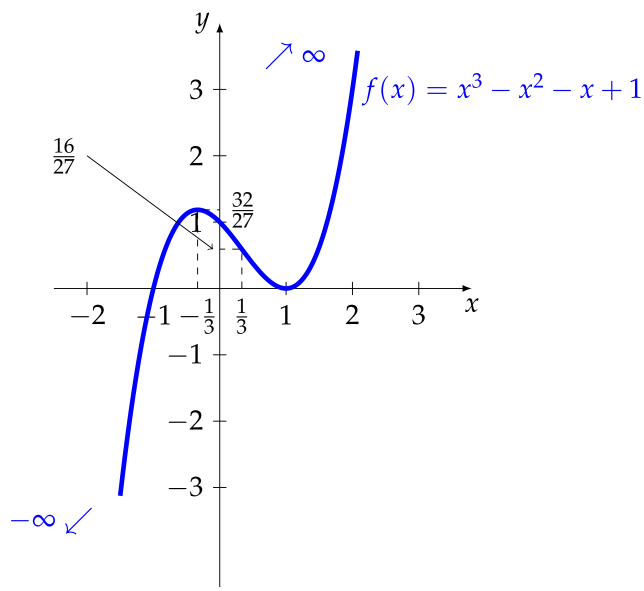
$$\lim_{x \to \infty} x^3 - x^2 - x + 1 = \lim_{x \to \infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = \infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} x^3 - x^2 - x + 1 = \lim_{x \to -\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right) = -\infty$$

No passo (7) descobrimos que f tem duas raízes, $x = -1$ e $x = 1$ (raiz simples), pois $f(x) = (x-1) \cdot (x+1)^2$.

Calculando f nos pontos característicos, temos:

x	$f(x)$
1	0
-1	0
$-\frac{1}{3}$	$\frac{32}{27}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{16}{27}$
0	1



Exemplo 23. *Fazer o esboço do gráfico da função:*

$$y = \sqrt[3]{2ax^2 - x^3},$$

onde $a \in \mathbb{R}$ é um número positivo.

Solução:
(1) o domínio da função é $\mathbb{R}$;

(2) Vamos buscar os intervalos de crescimento e de decrescimento da função estudando o sinal de f'. Temos, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2a\}$:

$$f'(x) = \frac{4ax - 3x^2}{3(\sqrt[3]{2ax^2 - x^3})^2}$$

Note que, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2a\}$, tem-se:

$$3 \cdot (\sqrt[3]{2ax^2 - x^3})^2 > 0$$

de modo que o que determina o sinal de f' é o sinal de $4ax - 3x^2$. Temos, para qualquer $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2a\}$:

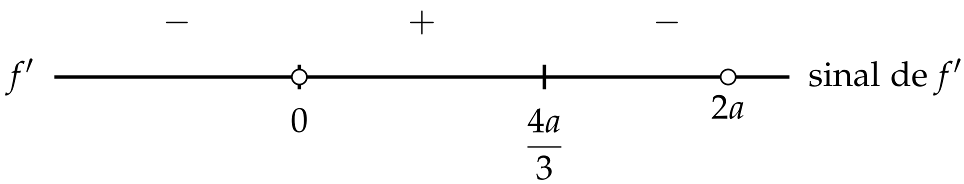
$$4ax - 3x^2 > 0 \iff 0 < x < \frac{4a}{3}$$

e:

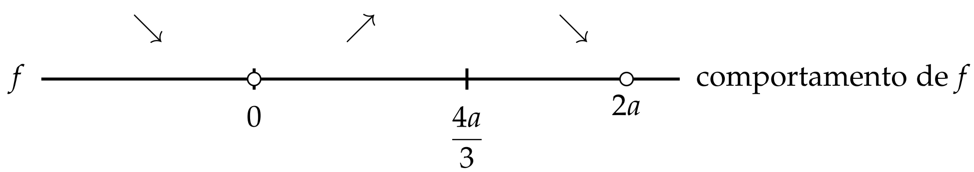
$$4ax - 3x^2 < 0 \iff (x < 0) \vee \left(\frac{4a}{3} < x\right)$$

de modo que:

$$f'(x) = 0 \iff (x = 0) \vee \left(x = \frac{4a}{3}\right)$$



e portanto:



Naturalmente, $x = \dfrac{4a}{3}$ é um ponto crítico de f – uma vez que $f'\left(\dfrac{4a}{3}\right) = 0$ – e temos:

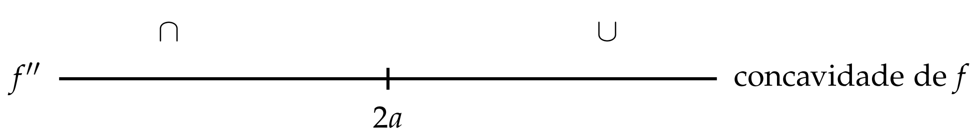
$$f\left(\frac{4a}{3}\right) = \frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}.$$

(3) Para estudar a concavidade do gráfico devemos estudar o sinal de:

$$f''(x) = \frac{(2ax^2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot [3(4a - 6x) \cdot (2ax^2 - x^3) - 2(4ax - 3x^2)^2]}{[3(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}}]^2} =$$

$$= \frac{(2ax^2 - x^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot (-8a^2x^2)}{9 \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{4}{3}}} = \frac{-8a^2x^2}{9 \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{5}{3}}}$$

Note que $\dfrac{-8ax^2}{9} < 0$ para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, de modo que o sinal de $f''(x)$ ficará determinado pelo sinal de $(2ax^2 - x^3)^{\frac{5}{3}} = x^{\frac{10}{3}} \cdot (2a - x)^{\frac{5}{3}}$, e portanto pelo sinal de $2a - x$. Tem-se, portanto, $x < 2a \Rightarrow f''(x) < 0$ e $x > 2a \Rightarrow f''(x) > 0$.



Quanto aos pontos de inflexão, temos dois a analisar: $x = 0$ e $x = 2a$. O único desses pontos em que a derivada segunda muda de nome é $x = 2a$, de modo que $2a$ é o único ponto de inflexão.

Neste caso, a equação acima não admite solução, e portanto não há pontos de inflexão.

(4) Devemos estudar f em seus pontos singulares, ou seja, em $x = 0$.

Note que:

$$\lim_{x\to 0_+} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x\cdot(4a-3x)}{3(\sqrt[3]{x^4\cdot(2a-x)^2}} = \lim_{x\to 0_+} \frac{x\cdot(4a-3x)}{3x(\sqrt[3]{x\cdot(2a-x)^2}} = \infty$$

$$\lim_{x\to 0_-} f'(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{x\cdot(4a-3x)}{3x(\sqrt[3]{x^4\cdot(2a-x)^2}} = -\infty$$

de modo que f não é derivável em $x = 0$.

Outro ponto em que a derivada não está definida é $x = 2a$. Neste ponto tem-se:

$$\lim_{x\to 2a_+} f'(x) = \lim_{x\to 2a_+} \frac{4a-3x}{3(\sqrt[3]{x\cdot(2a-x)^2}} \overset{\overset{a>0}{\uparrow}}{=} -\infty$$

$$\lim_{x\to 2a_-} f'(x) = \lim_{x\to 2a_-} \frac{4a-3x}{3(\sqrt[3]{x\cdot(2a-x)^2}} \overset{\overset{a>0}{\uparrow}}{=} -\infty$$

Neste ponto, portanto, a reta tangente ao gráfico é vertical.

Note que f é contínua em todo o seu domínio e que não existem assíntotas verticais nem horizontais.

(5) Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} = -\infty$$

e:

$$\lim_{x\to -\infty} \sqrt[3]{2ax^2 - x^3} = +\infty$$

(6) As únicas raízes de f são $x = 0$ e $x = 2a$.

A função assume um máximo local em $x = \dfrac{4a}{3}$.

Vamos buscar assíntotas oblíquas. Se $y = ax + b$ é a equação da assíntota oblíqua, então:

$$a = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt[3]{2ax^2 - x^3}}{x} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2ax^2 - x^3}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \sqrt[3]{\frac{2a}{x} - 1} = -1$$

Também tem-se:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -1.$$

Agora,

$$b = \lim_{x\to\infty} [f(x) - a \cdot x] = \lim_{x\to\infty} [\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x]$$

Recorde que:

$$a^3 - b^3 = (a-b) \cdot (a^2 + ab + b^2)$$

de modo que:

$$\lim_{x\to\infty} [\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x] = \lim_{x\to\infty} (\sqrt[3]{2ax^2 - x^3} + x) \cdot \frac{(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} + x^2}{(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2ax^2 - x^3 + x^3}{(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} + x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax^2}{(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} + x^2} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2a}{\left[\frac{(2ax^2 - x^3)^{\frac{2}{3}} - x \cdot (2ax^2 - x^3)^{\frac{1}{3}} + x^2}{x^2}\right]} = \lim_{x\to\infty} \frac{2a}{\left[\left(\frac{2ax^2 - x^3}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{2ax^2 - x^3}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}} + 1\right]} =$$

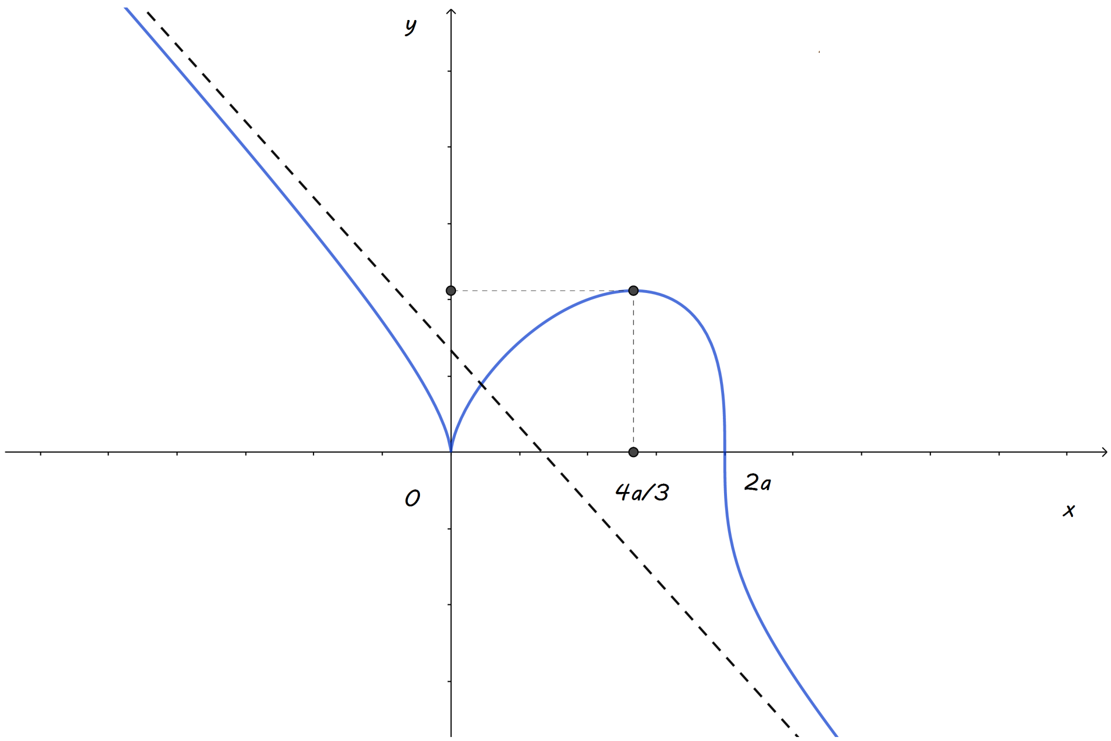
$$= \frac{2a}{3}$$

logo, a assíntota oblíqua tem equação:

$$y = -x + \frac{2a}{3}$$

x	$f(x)$
0	0
$\frac{4a}{3}$	$\frac{2}{3}a\sqrt[3]{4}$
$2a$	0

O gráfico de f tem, portanto, o seguinte aspecto:



Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.