MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 13

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda introduziremos um problema geométrico que motiva a teoria de integração segundo Riemann: calcular a área delimitada pelo gráfico de uma função. Em nosso primeiro caso concreto a analisar, vamos buscar a área da região do plano delimitada pelo eixo Ox, pelas retas $x = 0$, $x = 1$ e pelo gráfico da função $f(x) = x^2$, e o processo que utilizaremos é o protótipo do processo de integração de Riemann. Vale observar que existem outros processos de integração, como o de Lebesgue e o de Riemann-Stieltjes, que não serão vistos neste curso.

Na seção 1 calculamos, efetivamente a área referida no parágrafo anterior, resolvendo um problema conhecido como "quadratura" (por ser equivalente a encontrar o lado de um quadrado de mesma área). Na seção 2 apresentamos, com mais rigor, a integral de Riemann, destacando a ideia por detrás do processo de integração. Para facilitar a exposição, apresentamos as somas de Riemann, a soma superior e a soma inferior, com as quais lidamos mais detidamente no Apêndice.

Apresentamos as propriedades da integral de Riemann, como a linearidade, a monotonicidade, a aditividade – entre outras – e apresentamos importantes resultados como o **Teorema da Média**, que nos permitirá provar a parte 1 do **Teorema Fundamental do Cálculo**, que conjuga os problemas da quadratura com o da derivação.

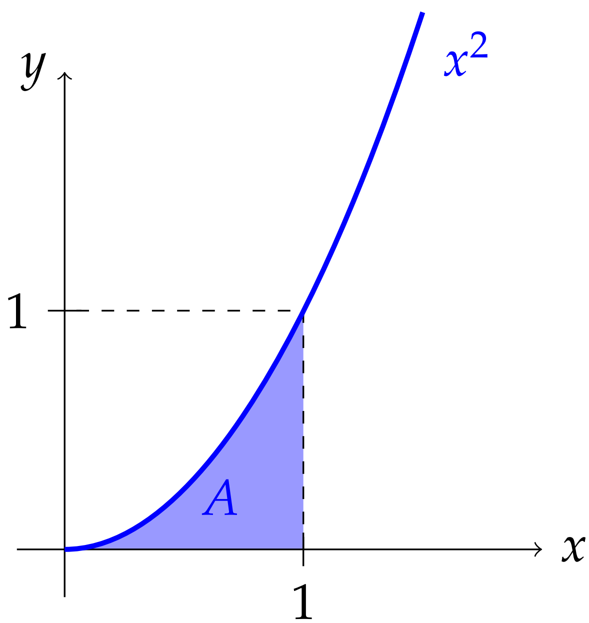
Após provar a primeira parte do **Teorema Fundamental do Cálculo**, apresentamos a definição de "primitiva" de uma função, e provamos uma segunda parte que nos permitirá calcular integrais mediante o uso de primitivas. Apresentamos também os conceitos de "integral indefinida", provando suas propriedades. Apresentamos, por último o importante **Teorema da Mudança de Variável**.

Encerramos apresentando uma tabela de integrais indefinidas, e apresentando um Apêndice para eventuais referências, em benefício do leitor.

*jeancb@ime.usp.br

1 Motivação: O Processo[1]

Motivação: Calcular a área A, compreendida entre a parábola $y = x^2$, as retas $x = 0$, $x = 1$ e o eixo Ox.



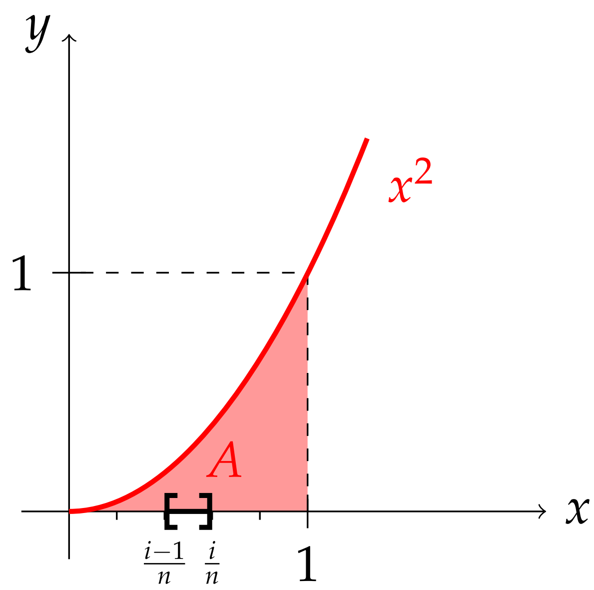
Consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

Considere a divisão do intervalo $[0,1]$ em n subintervalos de igual tamanho, $1/n$:

$$\left[0, \frac{1}{n}\right], \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right], \left[\frac{2}{n}, \frac{3}{n}\right], \dots, \left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right], \dots \left[\frac{n-1}{n}, 1\right]$$

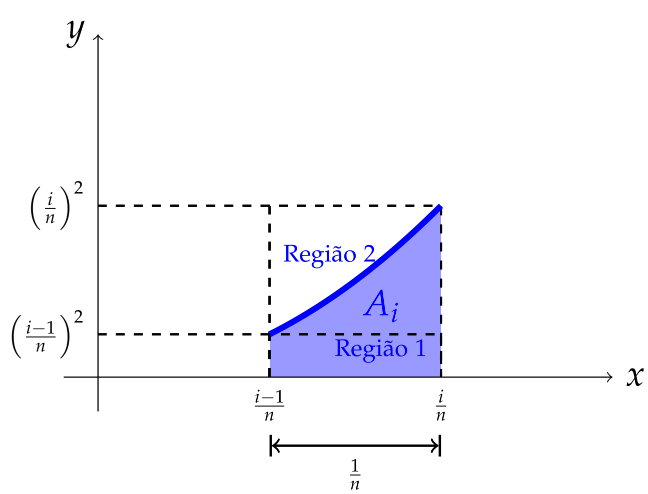
[1]de Integração de Riemann



Note que:

$$(\text{Área da Região 1}) \leq A_i \leq (\text{Área da Região 2})$$

onde as regiões são representadas a seguir:



Mas,

$$\text{Área da região 1} = \left(\frac{i-1}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{(i-1)^2}{n^3}$$

$$\text{Área da região 2} = \left(\frac{i}{n}\right)^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{i^2}{n^3}$$

e como para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ tem-se:

$$\frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A_i \leq \frac{i^2}{n^3}$$

segue que:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(i-1)^2}{n^3} \leq A \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{i^2}{n^3}$$

$$\frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} (i-1)^2 \leq A \leq \frac{1}{n^3} \sum_{i=1}^{n} i^2$$

Antes de prosseguir, precisamos do seguinte:

Teorema 1. *Vale, para qualquer $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, que:*

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

Demonstração. Temos, no mínimo, dois modos de demonstrar a identidade acima: por indução e por indução. Apresentamos a seguir as duas demonstrações, em benefício do leitor.

1^o modo: por indução: Para $n = 2$ temos, naturalmente,

$$\sum_{i=1}^{2} i^2 = 1^2 + 2^2 = 1 + 4 = 5 = \frac{2 \cdot (2+1) \cdot (4+1)}{6} = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5}{6} = 5$$

Suponha que:

$$\sum_{i=1}^{n-1} i^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2 \cdot (n-1) + 1)}{6} = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6}$$

Temos, assim:

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + n^2 = \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6} + n^2 = \frac{2n^3 - 3n^2 + n}{6} + \frac{6n^2}{6} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} =$$

$$= \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}.$$

2^o modo: por dedução:

Temos que $\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^3 - i^3]$ é, por um lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^{n}[i^3 + 3i^2 + 3i + 1 - i^3] = \sum_{i=1}^{n}(3i^2 + 3i + 1)$$

e, por outro lado, igual a:

$$\sum_{i=1}^{n}(i+1)^3 - \sum_{i=1}^{n} i^3 = (2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3) - (1^3 + 2^3 + \cdots + n^3) = (n+1)^3 - 1$$

de modo que:

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + \sum_{i=1}^{n} 1 = (n+1)^3 - 1 = n^3 + 3n^2 + 3n$$

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 + 3 \cdot \frac{n \cdot (n+1)}{2} + n = n^3 + 3n^2 + 3n$$

e assim:

$$3 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 6n^2 + 6n}{2} - \frac{3n^2 + 3n}{2} - \frac{2n}{2} = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3 + 3n^2 + n}{6} = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$$

□

Aplicando o que vimos no teorema anterior, chegamos às desigualdades:

$$\frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq A \leq \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Fazendo $n \to \infty$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} \leq \lim_{n\to\infty} A \leq \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3}$$

Agora,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(n-1) \cdot n \cdot (2n-1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[\frac{(n-1)}{n}\right] \cdot \left[\frac{2n-1}{n}\right] = \frac{1}{3}$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6n^3} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{6} \cdot \frac{n}{n} \cdot \left[\frac{(n+1)}{n}\right] \cdot \left[\frac{2n+1}{n}\right] = \frac{1}{3}$$

segue do **Teorema do Confronto** que:

$$A = \frac{1}{3}$$

Nestas notas apresentamos as derivadas das funções elementares, definimos funções dadas implicitamente por equações e descrevemos como derivá-las e, em seguida, apresentamos como derivar a inversa de certas funções.

2 Integral de Riemann

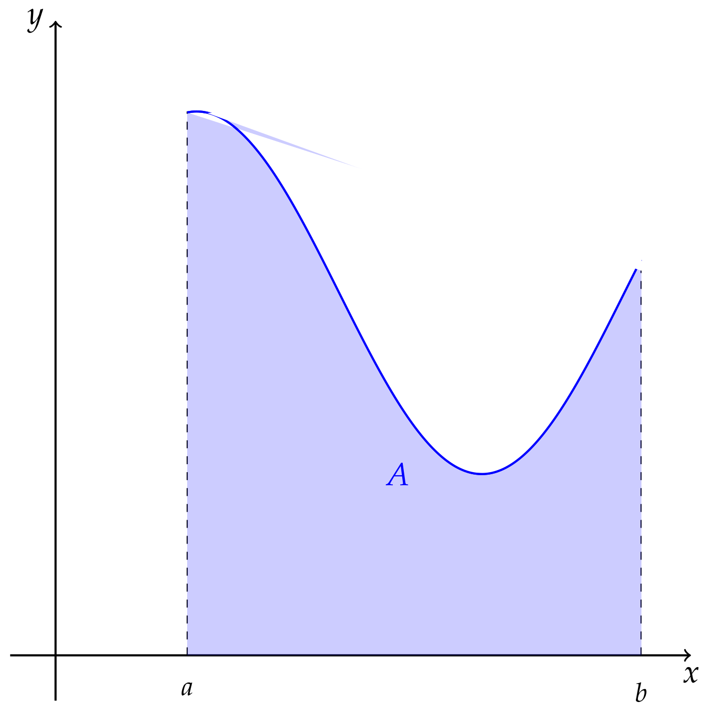
Nesta seção apresentaremos primeiramente a ideia por detrás da definição da integral de Riemann, tendo como motivação o cálculo da área entre o gráfico de certa função e o eixo Ox.

2.1 A ideia do processo de integração de Riemann

Motivação: Dada uma função real positiva definida num intervalo fechado $[a, b]$, calcular a área da região compreendida entre o gráfico da função e o eixo Ox.

Considere a função de uma variável real $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, positiva – ou seja, $(\forall x \in [a, b])(f(x) > 0)$.

Seja A a área compreendida entre as retas $x = a$, $x = b$, o gráfico de f e o eixo Ox, conforme ilustra a figura abaixo:

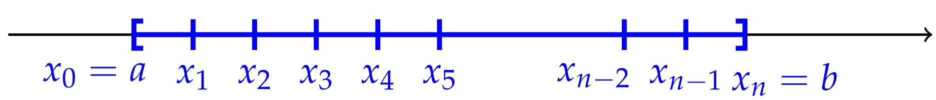


Gostaríamos de "aproximar" o valor da área A. Procedemos da seguinte maneira:

Seja o conjunto de pontos:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-2} < x_{n-1} < x_n = b$$

O conjunto de pontos acima é chamado uma **partição de** $n+1$ **pontos do intervalo** $[a, b]$. Os pontos não precisam estar igualmente espaçados.



Considere, agora, o $i-$ésimo intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. Neste subintervalo consideramos a seguinte aproximação para a área A_i: escolhemos um ponto $\xi_i \in]x_{i-1}, x_i[$ qualquer e tomamos:

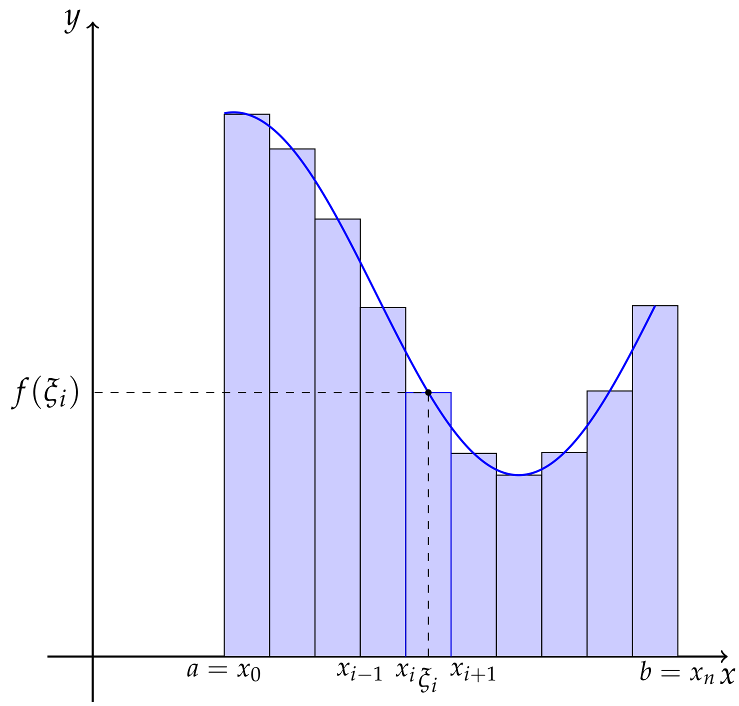
$$A_i \approx f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1}).$$

Desta forma, a aproximação para a área total, A, seria dada por:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} A_i = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Denominando $x_i - x_{i-1}$ por Δx_i, segue que:

$$A \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$



A área A é obtida quando o número de subintervalos tende a infinito, ou seja,

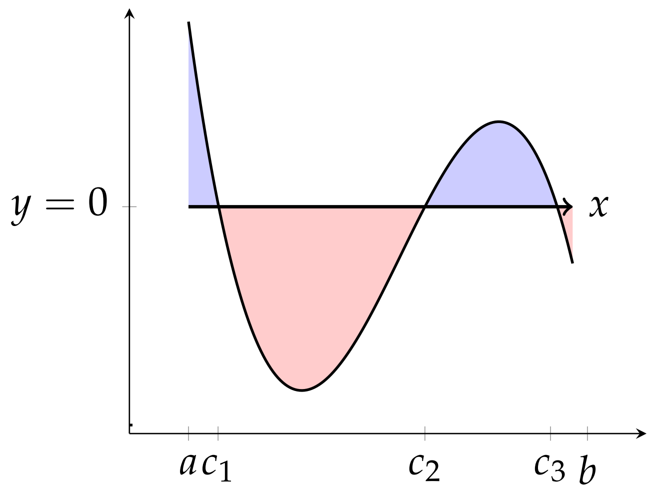
$$A = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Definimos, portanto:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i$$

Observação 2. *A integral de uma função contínua, não necessariamente positiva, é definida de maneira análoga. A diferença é que atribuímos sinal negativo a áreas abaixo do eixo x e sinal positivo a áreas acima do eixo x. Na figura abaixo, por exemplo, temos:*

$$\int_a^{c_1} f(x)dx > 0, \ \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx < 0, \ \int_{c_2}^{c_3} f(x)dx > 0 \ \text{ e } \ \int_{c_3}^{b} f(x)dx < 0$$

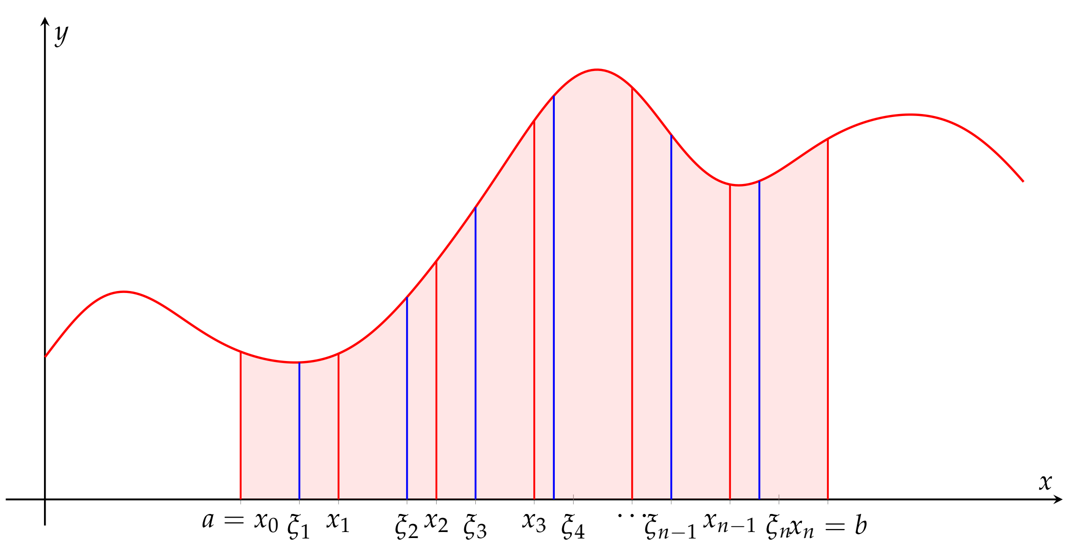


2.2 Somas de Riemann

Sejam $f : [a,b] = R \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b\}$ uma partição de ordem n de $[a,b]$, Seja, para $i \in \{0, \cdots, n\}$, $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ o $i-$ésimo subintervalo determinado por $\mathcal{P}_{[a,b]}$. Escolhendo um ponto $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}] = I_i$ qualquer, formamos a soma:

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i) \cdot (x_i - x_{i-1})$$

Uma soma deste tipo é chamada **soma de Riemann de f sobre** $[a,b]$.



Definição 3. *Se* *qualquer* *sequência* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *de somas de Riemann da função* f *(independentemente da escolha que fizermos de* ξ_i *no intervalo* $[x_i, x_{i+1}]$*) tem limite* $s \in \mathbb{R}$ *conforme* $n \to \infty$*, isto é, se:*

$$\exists s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

dizemos que f ***é Riemann-integrável sobre*** $[a, b]$*, e escrevemos:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{[a,b]} f(x)dx = s = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i$$

A demonstração do resultado a seguir será dada posteriormente.

Teorema 4. *Toda função* ***contínua*** *definida em um intervalo fechado e limitado, da forma* $[a, b]$*, é Riemann-integrável.*

O teorema acima nos diz, entre outras coisas, que sempre que $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for contínua, o limite das somas de Riemann conforme $n \to \infty$ existirá independentemente da escolha que fizermos de $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Há uma condição menos restritiva que uma função definida em um intervalo deve satisfazer a fim de ser Riemann-integrável, como mostra o seguinte:

Teorema 5. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *uma função* ***limitada****. Se o conjunto dos pontos de descontinuidade de* f*:*

$$\text{Desc}\,(f) = \{x_0 \in [a, b] \mid f \text{ é descontínua em } x_0\}$$

pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então f *é Riemann-integrável sobre* $[a, b]$*.*

Sejam $f : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua e positiva, W a região do espaço delimitada por cima pelo gráfico de f, por baixo pelo eixo Ox e pelos lados pelas retas $x = a$ e $x = b$. Se tomarmos $\bar{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ como sendo um ponto de máximo de f, então $f(\bar{x}_i)\Delta x_i$ representa a área do retângulo de base $[x_{i-1}, x_i]$ e altura $f(\bar{x}_i)$. A soma:

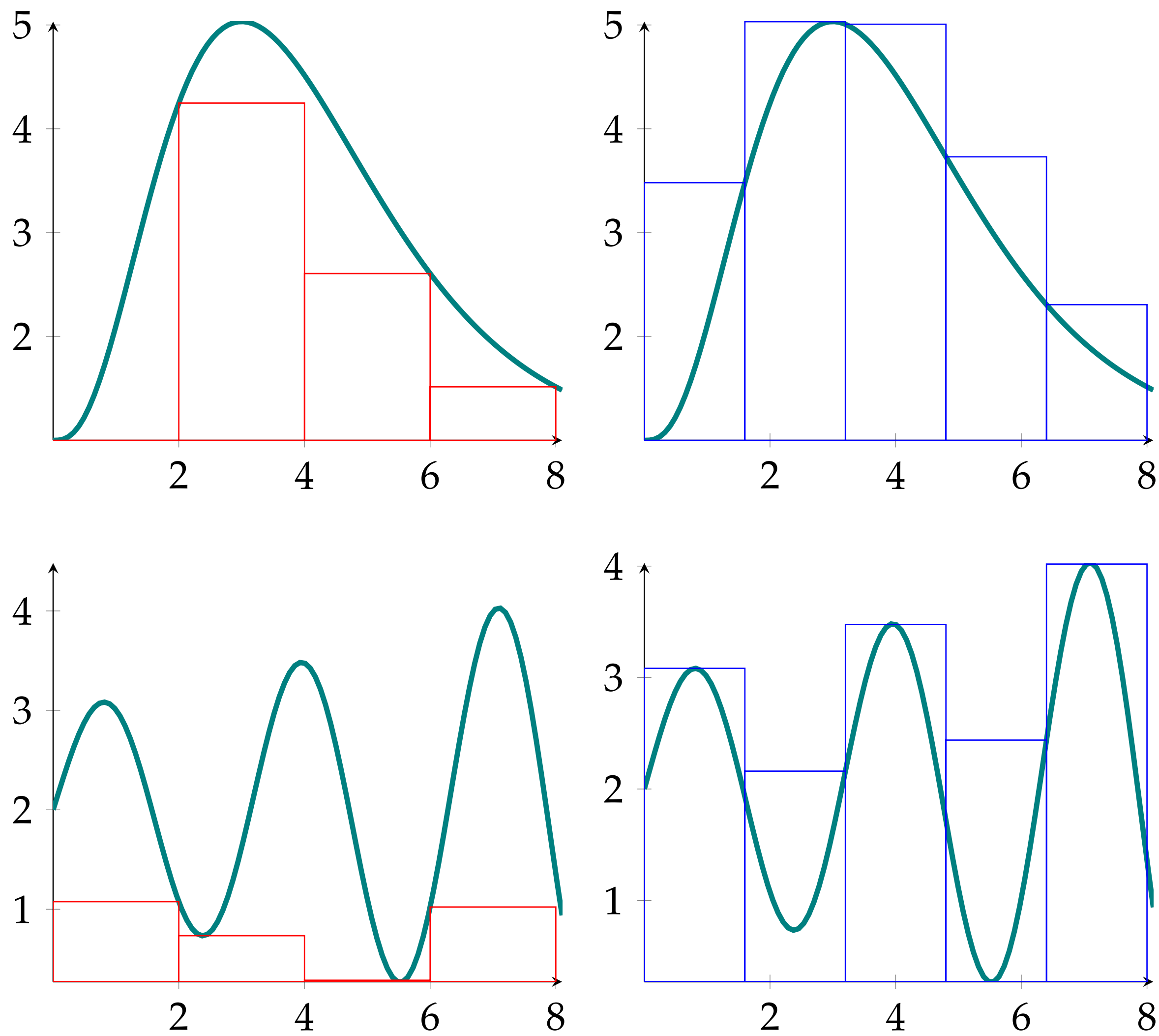
$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\bar{x}_i)\Delta x_i$$

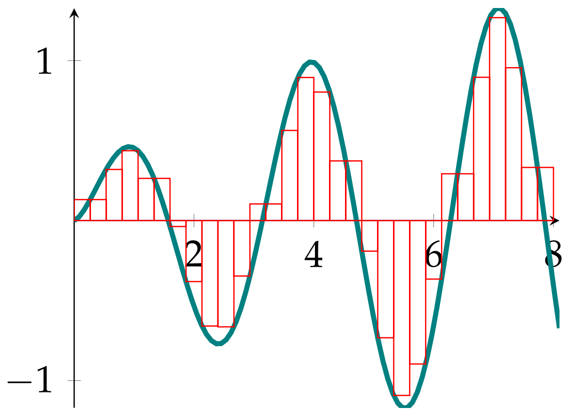
é denominada **"a soma superior de** f**"** representa a área do retângulo circunscrito à região W. Analogamente, se tomarmos $\underline{x}_i \in [x_{i-1}, x_i]$ como sendo um ponto de mínimo de f em $[x_{i-1}, x_i]$, então a soma:

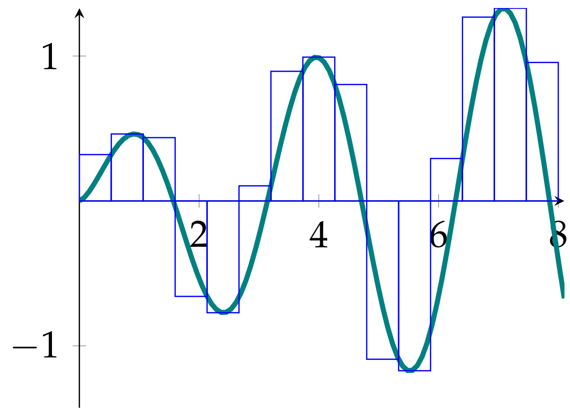
$$s_n = \sum_{i=0}^{n-1} f(\underline{x}_i)\Delta x_i$$

é denominada a **"soma inferior de f"** representa a área da região inscrita à região W.

A seguir damos alguns exemplos de somas inferiores e superiores representadas respectivamente em vermelho e em azul:







Pelo **Teorema 4**, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = s = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

mostrando que as áreas das regiões circunscritas e inscritas tendem para o mesmo valor s quando $n \to \infty$. Portanto, a região W tem uma área finita e igual a s.

2.3 Propriedades da Integral de Riemann

Teorema 6 (Linearidade). *Sejam $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis. Então a função:*

$$\begin{array}{rccc} \alpha \cdot f + \beta \cdot g : & [a,b] \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot g(x) \end{array}$$

é Riemann-integrável em $[a,b]$ e vale:

$$\int_a^b (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(x)dx = \alpha \cdot \int_a^b f(x)dx + \beta \cdot \int_a^b g(x)dx$$

Demonstração. Seja $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a,b] \mid i \in \{0, \cdots, n\}\}\}$ uma partição de ordem n do intervalo $[a,b]$. Como f e g são integráveis, para qualquer escolha de $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$, $i \in \{0, \cdots, n-1\}$ teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

e

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(\xi_i) \cdot \Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Temos, das propriedades aritméticas dos limites, que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha\cdot f+\beta\cdot g)(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha\cdot f)(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}(\beta\cdot g)(\xi_i)\cdot\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\alpha\cdot\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \lim_{n\to\infty}\beta\cdot\sum_{i=1}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i =$$

$$= \alpha\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i + \beta\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \alpha\cdot\int_a^b f(x)dx + \beta\cdot\int_a^b g(x)dx$$

Ademais, tais limites independem da escolha do $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, uma vez que as funções f e g ão Riemann-integráveis. $\square$

Teorema 7 (Monotonicidade). *Sejam $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado, $f, g : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções integráveis em $[a,b]$ tais que para todo $x \in [a,b]$ valha $f(x) \leq g(x)$. Então:*

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

Demonstração. Dada qualquer partição de ordem n de $[a,b]$, digamos $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a,b] \mid i \in \{0,\cdots,n\}\}$, temos, para qualquer escolha de $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i \in \{0,\cdots,n-1\}$, que:

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

Como para qualquer que seja $\xi_i \in [x_i, x_{i+1}]$ tem-se $f(\xi_i) \leq g(\xi_i)$, de modo que:

$$\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i$$

Pela conservação do sinal no limite, temos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}f(\xi_i)\cdot\Delta x_i \leq \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n-1}g(\xi_i)\cdot\Delta x_i = \int_a^b g(x)dx$$

$\square$

Proposição 8. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função tal que* $\operatorname{Desc}(f)$ *pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados então a função:*

$$\begin{aligned} |f| : \quad [a,b] &\to \quad \mathbb{R} \\ x \quad &\mapsto \quad |f(x)| \end{aligned}$$

é limitada e tal que $\operatorname{Desc}(|f|)$ *pode ser descrito como uma união enumerável de pontos isolados.*

Proposição 9. *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é uma função integrável, então:*

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

Demonstração. Temos, para qualquer $x \in [a,b]$:

$$-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$$

Decorre da monotonicidade da integral que:

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

ou seja,

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

□

O resultado a seguir decorre de forma imediata da monotonicidade da integral:

Proposição 10. *Sejam* $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *uma função limitada,*

$$m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

$$M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

Então, se f *é Riemann-integrável, vale:*

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$$

O teorema a seguir é crucial para toda a teoria da integração:

Teorema 11 (Teorema da Média). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Então existe $c \in [a,b]$ tal que:*

$$\int_a^b f(x)dx = f(c) \cdot (b-a)$$

Demonstração. Uma vez que f é, por hipótese, contínua, segue do **Teorema de Weierstrass** que existem $\bar{x}$ e $\underline{x}$ em $[a,b]$ tais que:

$$f(\bar{x}) = M = \max\{f(x) \mid x \in [a,b]\}$$

e:

$$f(\underline{x}) = m = \min\{f(x) \mid x \in [a,b]\}.$$

Pela **Proposição 10**, tem-se:

$$m \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M \cdot (b-a)$$

donde segue que:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

Pelo **Teorema do Valor Intermediário** aplicado a f, existe algum $c \in [a,b]$ tal que:

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

□

Teorema 12 (Aditividade). *Se o intervalo $[a,b]$ é subdividido em n subintervalos, $I_1, \cdots, I_n$ de tal forma que $\operatorname{int}(I_i) \cap \operatorname{int}(I_j) = \varnothing$ [a] e $[a,b] = \cup_{i=1}^n I_i$ se para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, é uma função integrável em $[a,b]$, então $f \restriction_{I_i}$ é integrável em I_i, então:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b] = \cup_{i=1}^n I_i \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f \restriction_{I_i} (x) \text{ se } x \in I_i \end{array}$$

então $f : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável em R e vale:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{i=1}^n \int_{I_i} f \restriction_{I_i} (x)dx$$

[a] na verdade não é estritamente necessário que $\operatorname{int}(I_i) \cap \operatorname{int}(I_j) = \varnothing$, basta que para quaisquer $i, j \in \{1, \cdots, n\}$ tenhamos o comprimento de $I_i \cap I_j$ igual a zero, ou seja, que $I_i \cap I_j$ tenha "medida nula".

Demonstração. Faremos a prova deste resultado por indução no número de subintervalos.

Suponha, primeiramente, que $[a,b] = I_1 \cup I_2$ com $\text{int}(I_1) \cap \text{int}(I_2) = \varnothing$. Uma tal decomposição de $[a,b]$ em dois subintervalos só pode ser da forma $I_1 = [a,\alpha]$ e $I_2 = [\alpha, b]$ para algum $\alpha \in]a,b[$.

Dada qualquer partição $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{x_i \in [a,b] \mid (a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b)\}$ de $[a,b] = I_1 \cup I_2$, com $x_{i_0} = \alpha$ para algum $i_0 \in \{1, \cdots, n-1\}$, temos uma partição $\mathcal{P}_1 = \{x_i \in I_1 \mid i \in \{1, \cdots, i_0\}\}$ de I_1 e uma partição $\mathcal{P}_2 = \{x_i \in I_2 \mid i \in \{i_0, \cdots, n\}\}$ de I_2. Temos, assim:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\Delta x_i + \lim_{n\to\infty} \sum_{i=i_0}^{n-1} f(\xi_i)\Delta x_i =$$

$$= \int_a^\alpha f \restriction_{I_1} (x)dx + \int_\alpha^b f \restriction_{I_2} (x)dx,$$

onde $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ é um ponto qualquer.

Deixamos a demonstração do passo indutivo a cargo do leitor. □

Observação 13. *Sejam $a < b$ e $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável. Então convencionamos que:*

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

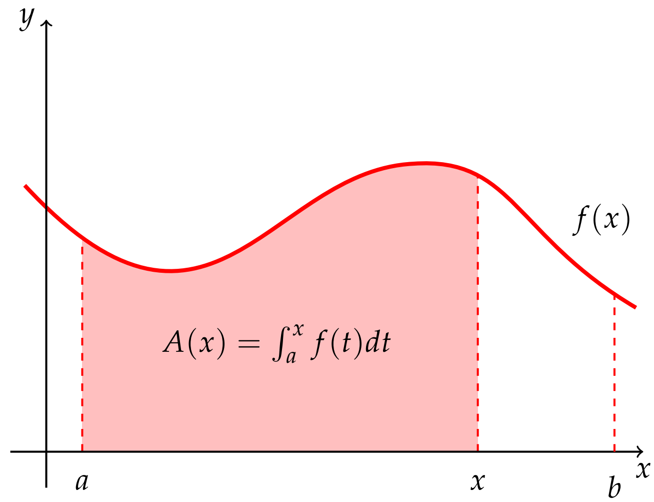
2.4 O Teorema Fundamental do Cálculo: Primitivas e Integrais Indefinidas

Teorema 14 (Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, e seja:*

$$\begin{array}{rccc} A: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \int_a^x f(t)dt \end{array}$$

Tem-se que A é derivável em $]a,b[$ e vale:

$$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = \frac{dA}{dx}(x) = A'(x) = f(x).$$



Demonstração. Dados quaisquer $x_0 \in]a, b[$ e $\Delta x > 0$ tal que $x_0 + \Delta x \in [a, b]$, tem-se:

$$A(x_0) = \int_a^{x_0} f(t)dt$$

$$A(x_0 + \Delta x) = \int_a^{x_0+\Delta x} f(t)dt \overset{\text{aditividade}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

Assim, tem-se:

$$A(x_0 + \Delta x) - A(x_0) = \left[\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)d\right] - \int_a^{x_0} f(t)dt = \int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt$$

Uma vez que f é, por hipótese, contínua em $[a, b]$, ela também o é no intervalo $[x_0, x_0 + \Delta x]$, de modo que pelo **Teorema da Média** (**Teorema 11**), existe algum $c \in [x_0, x_0 + \Delta x]$ tal que:

$$\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt = f(c) \cdot (x_0 + \Delta x - x_0) = f(c) \cdot \Delta x$$

Observe, também, que como c é *sempre* tomado entre x_0 e $x_0 + \Delta x$, conforme fazemos $\Delta x \to 0$, teremos $c \to x_0$, e portanto (cf. **Teorema 2** das Notas da Aula 10):

$$\lim_{\Delta x \to 0} f(c) = \lim_{c \to x_0} f(c) = f(x_0)$$

e em particular:

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(c) = \lim_{\substack{c \to x_0 \\ c > x_0}} = f(x_0).$$

Desta forma temos, por definição:

$$A'_+(x_0) = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{A(x_0 + \Delta x) - A(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{\int_{x_0}^{x_0+\Delta x} f(t)dt}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} \frac{f(c) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta x > 0}} f(c)$$

$$= f(x_0)$$

Analogamente mostra-se que:

$$A'_-(x_0) = f(x_0),$$

de modo que:

$$A'(x_0) = f(x_0).$$

Como $x_0 \in]a, b[$ é um ponto *qualquer*, segue que:

$$(\forall x \in]a, b[) \left(A'(x) = f(x)\right)$$

Note ainda que, quando x_0 fosse um dos extremos do intervalo $[a, b]$, os limites usados na demonstração seriam limites laterais, e $A'(a)$ seria uma derivada à direita e $A'(b)$ seria uma derivada à esquerda. $\square$

Definição 15 (primitiva). *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Dizemos que uma função $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é* ***uma primitiva da função*** *f se para todo $x \in I$ tivermos:*

$$F'(x) = f(x).$$

Observe que, de acordo com a nossa definição, as primitivas de uma função f estão sempre definidas sobre algum intervalo. Quando não explicitamos o intervalo e nos referimos a duas primitivas da mesma função f, entendemos que essas funções são primitivas de f no mesmo intervalo que é domínio de f.

O **Teorema Fundamental do Cálculo** nos diz, portanto, que *toda* função contínua em um intervalo da forma $[a, b]$ admite uma primitiva, dada por:

$$A(x) = \int_a^x f(t)dt$$

Exemplo 16. *A função $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$ é uma primitiva da função $f(x) = x^2$, pois:*

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3 \cdot x^2 = x^2$$

Também as funções:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 4, \;\; H(x) = \frac{1}{3} \cdot (x^3 + 3)$$

são primitivas da função $f(x) = x^2$ (verifique).

Exemplo 17. *A função $F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + c$, onde $c \in \mathbb{R}$ é uma constante, é uma primitiva da função $f(x) = \cos(2x)$.*

Exemplo 18. *A função $F(x) = \frac{1}{2x^2}$ é uma primitiva da função $f(x) = -\frac{1}{x^3}$ em qualquer intervalo que não contém a origem, pois para todo $x \neq 0$ tem-se $F'(x) = f(x)$.*

Teorema 19. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $F : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva da função $f : I \to \mathbb{R}$. Então, se c é uma constante qualquer, a função $G(x) = F(x) + c$ também é primitiva de f.*

Demonstração. Como F é primitiva de f, para todo $x \in I$ tem-se:

$$F'(x) = f(x).$$

Logo, para todo $x \in I$ tem-se:

$$G'(x) = (F(x) + c)' = F'(x) + 0 = f(x)$$

□

Proposição 20. *Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Se para todo $x \in I$ tivermos $f'(x) = 0$, então f é constante em I.*

Demonstração. Sejam $x, y \in I, x < y$. Como f é derivável em I, f é contínua em $[x, y]$ e derivável em $]x, y[$. Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe $z \in]x, y[$ tal que:

$$f'(z) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

Como, por hipótese, $f'(z) = 0$, segue que:

$$0 = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$$

de modo que:

$$f(y) - f(x) = 0$$

e portanto:

$$f(y) = f(x).$$

Como x e y são dois pontos quaisquer de I, concluímos que f é constante em I. $\square$

Proposição 21. *Seja $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo. Se $F, G : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são funções primitivas de $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, então existe uma constante $c \in \mathbb{R}$ tal que para todo $x \in I$ tem-se $G(x) - F(x) = c$.*

Demonstração. Seja:

$$\begin{array}{rccc} H: & I \subseteq \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & G(x) - F(x) \end{array}$$

Como F e G são primitivas de $f : I \to \mathbb{R}$, temos $F'(x) = f(x) = G'(x)$ para todo $x \in I$. Assim, para qualquer $x \in I$ tem-se:

$$H'(x) = [G(x) - F(x)]' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

Pela **Proposição 20**, segue que $H(x) = c$ para alguma constante $c \in \mathbb{R}$. Logo,

$$(\forall x \in I)(H(x) = c),$$

ou seja:

$$(\forall x \in I)(G(x) = F(x) + c).$$

$\square$

Assim, a proposição acima nos informa que o problema de determinar as primitivas de f se resume a achar uma primitiva em particular.

Teorema 22 (Teorema Fundamental do Cálculo, parte 2). *Se $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ é uma primitiva de $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, então:*

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Demonstração. Tem-se:

$$A(a) = \int_a^a f(x)dx = 0 \quad \text{e} \quad A(b) = \int_a^b f(x)dx$$

Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo, parte 1**, tem-se $F'(x) = f(x)$. Pela **Proposição 21**, segue que A e F diferem por uma constante, ou seja:

$$A(x) = F(x) + c$$

Para $x = a$, temos $A(a) = F(a) + c$, de modo que $c = -F(a)$. Assim,

$$A(x) = F(x) - F(a).$$

Em particular, para $x = b$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = A(b) = F(b) - F(a)$$

□

Exemplo 23. *Sabemos que* $(\sin x)' = \cos x$. *Desta forma,* $F(x) = \sin(x)$ *é uma primitiva da função* $f(x) = \cos(x)$, *e toda primitiva de* $f(x) = \cos(x)$ *é da forma:*

$$G(x) = \sin(x) + c,$$

onde $c \in \mathbb{R}$ *é uma constante.*

Definição 24 (integral indefinida). *Se* F *é uma primitiva de* $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, *a função:*

$$\begin{array}{rccc} G: & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & F(x) + c \end{array}$$

onde c *é uma constante, é chamada* ***a integral indefinida de*** f, *e é denotada por:*

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

Note que da definição de integral indefinida, decorre que:

(i) $\int f(x)dx = F(x) + c \iff F'(x) = f(x)$;

(ii) $\int f(x)dx$ representa uma família de funções (a família de todas as primitivas da função f).

2.4.1 Propriedades da Integral Indefinida

Proposição 25. *Sejam* $f, g : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *funções integráveis e* $k \in \mathbb{R}$. *Então:*

(i) $\displaystyle\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx;$

(ii) $\displaystyle\int [f(x) + g(x)]dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

Demonstração. Ad (i): O resultado segue trivialmente se $k = 0$. Vamos assumir, portanto, que $k \neq 0$.

Seja $F : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma primitiva de f. Nota-se prontamente que $k \cdot F$ é uma primitiva de f, pois para todo $x \in I$, $(k \cdot F)'(x) = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$. Assim,

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot F(x) + c = k \cdot F(x) + k \cdot \frac{c}{k} = k \cdot \left[F(x) + \frac{c}{k}\right] = k \cdot \int f(x)dx.$$

Ad (ii): Sejam $F, G : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções primitivas de $f : I \to \mathbb{R}$ e de $g : I \to \mathbb{R}$, respectivamente. Então $F + G : I \to \mathbb{R}$ é uma primitiva da função $f + g : I \to \mathbb{R}$, uma vez que:

$$(\forall x \in I)([F + G]'(x) = F'(x) + G'(x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x))$$

Portanto,

$$\begin{aligned}\int [f(x) + g(x)]dx &= [F(x) + G(x)] + c = [F(x) + G(x)] + c_1 + c_2, \text{ onde } c = c_1 + c_2, \\ &= [F(x) + c_1] + [G(x) + c_2] = \int f(x)dx + \int g(x)dx\end{aligned}$$

□

O processo de integração exige muita intuição, pois conhecendo apenas a derivada de uma dada função, nós queremos descobrir a função. Podemos obter uma tabela de integrais, chamadas "integrais imediatas", a partir das derivadas das funções elementares.

2.5 Tabela de Integrais Imediatas

Aconselha-se que o leitor verifique cada uma das seguintes igualdades:

(1) $\displaystyle\int dx = x + c$

(2) $\displaystyle\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha + 1} + c$, sempre que $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

(3) $\int \frac{1}{x}dx = \ln|x| + c$

(4) $\int e^x dx = e^x + c$

(5) Sempre que $a > 0$, tem-se $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln(a)} + c$

(6) $\int \sin(x)dx = -\cos(x) + c$

(7) $\int \cos(x)dx = \sin(x) + c$

(8) $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + c$

(9) $\int \csc^2(x)dx = -\cot(x) + c$

(10) $\int \sec(x)\cdot\tan(x)dx = \sec(x) + c$

(11) $\int \csc(x)\cdot\cot(x)dx = -\csc(x) + c$

(12) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin(x) + c$

(13) $\int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+x}{1-x}\right| + c$

(14) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan(x) + c$

(15) $\int \frac{dx}{x\cdot\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arcsec}(x) + c$

(16) $\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2+1}| + c$

(17) $\int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}dx = \ln|x + \sqrt{x^2-1}| + c$

3 O Teorema da Mudança de Variável

Teorema 26 (Teorema da Mudança de Variável). *Sejam $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e $g : [c,d] \to \mathbb{R}$ uma função derivável, com $g' :]c,d[\to \mathbb{R}$ integrável e tal que $g[[c,d]] \subset [a,b]$. Então:*

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)dt.$$

Demonstração. Sendo f contínua, pelo **Teorema Fundamental do Cálculo** f possui uma primitiva $F : [a,b] \to \mathbb{R}$. O **Teorema Fundamental do Cálculo** nos dá:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)).$$

Por outro lado, pela **Regra da Cadeia**, tem-se $(F\circ g)'(t) = F'(g(t))\cdot g'(t) = f(g(t))\cdot g'(t)$ para qualquer $t \in [a,b]$. Deste modo,

$$\begin{array}{rccc} F\circ g: & [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & F(g(t)) \end{array}$$

é uma primitiva da função integrável:

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & [c,d] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(g(t))\cdot g'(t) \end{array}$$

Temos, portanto:

$$\int_c^d \Phi(t)dt = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)dt = F(g(d)) - F(g(c))$$

de modo que:

$$\int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_c^d f(g(t))\cdot g'(t)dt$$

□

Proposição 27. *Se $f:[-a,a]\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ é uma função par, então:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\cdot\int_0^a f(x)dx$$

Demonstração. Como f é par, tem-se:

$$(\forall x\in[0,a])(f(-x)=f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$\begin{array}{rccc} g: & [0,a] & \to & [-a,0]\subset\mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -x \end{array}$$

como $g(0)=0$ e $g(a)=-a$, segue que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(g(x))\cdot g'(x)dx = \int_a^0 f(-x)\cdot\overbrace{(-1)}^{=g'(x)}dx = -\int_a^0 f(-x)dx =$$

$$\overset{f\text{ par}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_a^0 f(x)dx = -\left(-\int_0^a f(x)dx\right) = \int_0^a f(x)dx$$

ou seja,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_0^a f(x)dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \overset{\text{aditividade}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{a} f(x)dx$$

$\square$

Proposição 28. *Se $f : [-a, a] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar, então:*

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

Demonstração. Como f é ímpar, tem-se:

$$(\forall x \in [0, a])(f(-x) = -f(x)).$$

Desta forma, fazendo a mudança de variável:

$$\begin{array}{rccc} g: & [0, a] & \to & [-a, 0] \subset \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & -x \end{array}$$

como $g(0) = 0$ e $g(a) = -a$, segue que:

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{g(-a)}^{g(0)} f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int_{a}^{0} f(-x) \cdot \overbrace{(-1)}^{=g'(x)} dx = -\int_{a}^{0} f(-x)dx =$$

$$\overset{f\text{ ímpar}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int_{a}^{0} -f(x)dx = \int_{a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

ou seja,

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{a} f(x)dx$$

Portanto, temos:

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx \overset{\text{aditividade}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx - \int_{0}^{a} f(x)dx = 0$$

Ou seja,

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

$\square$

Apêndice: Rudimentos da Teoria da Integral de Riemann

No texto acima, usamos apenas partições regulares dos intervalos a fim de tornar mais conveniente a apresentação. Neste apêndice apresentamos conceitos mais refinados da teoria de integração, e terminamos por exibir um exemplo de função que não é integrável de acordo com a nossa definição.

Sejam $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo fechado e limitado, $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada, $\mathcal{P}_{[a,b]} = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{m-1} < x_m = b\}$ uma partição qualquer de $[a, b]$. Sejam:

$$m_i(f) = \inf\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x \in [x_{i-1}, x_i]\}$$

e seja Δx_i o comprimento do intervalo $[x_{i-1}, x_i]$. As **somas inferior** e **superior** de f correspondentes à partição $\mathcal{P}_{[a,b]}$ são, respectivamente:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} m_i(f) \cdot \Delta x_i \ \text{ e } \ S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n-1} M_i(f) \cdot \Delta x_i$$

Evidentemente, como $m_i(f) \leq M_i(f)$, tem-se que $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$.

Vale também vale o seguinte resultado mais forte:

Lema 29. *Sejam $\mathcal{P}_{[a,b]}$ uma partição do intervalo $[a, b]$ e $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ uma partição do mesmo intervalo tais que todo subintervalo determinado por $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ esteja contido em algum subintervalo da partição $\mathcal{P}_{[a,b]}$* [2]*. Então:*

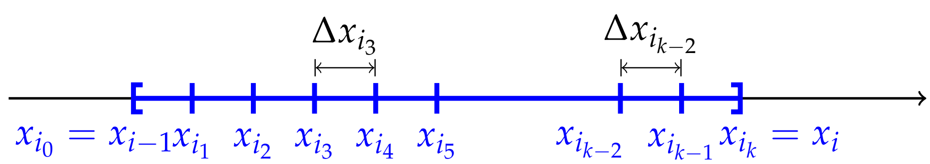
$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \ \text{ e } \ S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$$

Ou seja, ao refinarmos uma partição, as somas inferiores não diminuem e as somas superiores não aumentam.

[2] neste caso, dizemos que $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ é **mais fina do que** $\mathcal{P}_{[a,b]}$.

Demonstração. Por hipótese, cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ determinado por $\mathcal{P}_{[a,b]}$ se subdivide em vários (digamos k) subintervalos determinados por $\mathcal{P}'_{[a,b]}$, digamos

$$[x_{i-1}, x_i] = [x_{i-1} = x_{i_0}, x_{i_1}] \cup [x_{i_1}, x_{i_2}] \cdots \cup [x_{i_m}, x_{i_{m+1}}] \cup \cdots \cup [x_{i_{k-1}}, x_{i_k} = x_i]$$



Seja, para cada $\ell \in \{0, \cdots, k-1\}$:

$$\Delta x_{i_\ell} = |x_{i_{\ell+1}} - x_{i_\ell}|$$

Por propriedade de ínfimo de um conjunto, como $[x_{i_{\ell-1}}, x_{i_\ell}] \subset [x_{i-1}, x_i]$, tem-se $m_i(f) \leq m_{i_\ell}(f)$ para todo $\ell \in \{0, 1, \cdots, k-1\}$, de modo que:

$$\begin{aligned} m_i(f) \cdot \Delta x_i = m_i(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \cdots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \cdots + m_i(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} \leq \\ \leq m_{i_0}(f) \cdot \Delta x_{i_0} + m_{i_1}(f) \cdot \Delta x_{i_1} + \cdots + m_{i_{\ell-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{\ell-1}} + \cdots + m_{i_{k-1}}(f) \cdot \Delta x_{i_{k-1}} = \\ = \sum_{j=0}^{k-1} m_{i_j}(f) \cdot \Delta x_{i_j} \end{aligned}$$

Quando tomamos a soma de todos os $i \in \{1, \cdots, n\}$ do membro esquerdo da expressão acima, obtemos:

$$s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) = \sum_{i=1}^{n} m_i(f) \cdot \Delta x_i$$

enquanto que tomando a soma de todos os membros à direita da expressão acima para $I \in \{1, \cdots, n\}$, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{k-1} m_{i_j}(f) \cdot \Delta x_{i_j} = s(f, \mathcal{P}')$$

Desta forma, $s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]})$. A demonstração para somas superiores é análoga. $\square$

Corolário 30. *Se $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ são duas partições quaisquer de $I = [a, b]$, tem-se $s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]})$, ou seja, a soma inferior é sempre menor (ou igual) do que a soma superior.*

Demonstração. Seja $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$, que é uma partição mais fina do que $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e do que $\mathcal{P}'_{[a,b]}$, simultaneamente. Então:

$$s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \leq s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}).$$

□

Decorre do corolário acima que o limitante superior das somas inferiores de f é menor ou igual ao limitante inferior das somas superiores de f, ou seja,

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a,b]\} \leq \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}' \text{ partição de } [a,b]\}$$

Definição 31 (integrabilidade segundo Riemann). *Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é **Riemann-integrável em** $[a,b]$ se:*

- *f é limitada em $[a,b]$;*
- $\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]}$ *partição de* $[a,b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]}$ *partição de* $[a,b]\}$

Denotamos este número dado na igualdade acima por $\int_{[a,b]} f(x)dx$ ou por $\int_a^b f(x)dx$, que denominamos **"a integral de f sobre $[a,b]$"**. A seguir, apresentamos a caracterização da integrabilidade de funções segundo Riemann:

Teorema 32. *Uma função limitada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é Riemann-integrável se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir uma partição $\mathcal{P}_{[a,b]}$ de $[a,b]$ tal que:*

$$S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$$

Demonstração. Certamente que se para todo $\varepsilon > 0$ existir uma partição $\mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon$ tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a,b]\}$$

de modo que f é integrável.

Reciprocamente, se f é Riemann-integrável em $[a,b]$, tem-se:

$$\sup\{s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a,b]\} = \inf\{S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) \mid \mathcal{P}'_{[a,b]} \text{ partição de } [a,b]\}$$

de modo que para cada $\varepsilon > 0$ existem partições $\mathcal{P}_{[a,b]}$ e $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ tais que $S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - S(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$. Se $\mathcal{P}''_{[a,b]} = \mathcal{P}_{[a,b]} \cup \mathcal{P}'_{[a,b]}$, do lema segue que $S(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}''_{[a,b]}) \leq S(f, \mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f, \mathcal{P}'_{[a,b]}) < \varepsilon$. □

Exemplo de uma função limitada que não é Riemann-integrável: considere:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0 \text{ se } x \text{ é racional} \\ 1 \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases} \end{array}$$

Se $\mathcal{P}_{[0,1]}$ é qualquer partição de $[0,1]$, cada subintervalo I_k por ela determinado tem sempre pontos x com x racional e com x irracional. Deste modo, $m_k(f) = 0$ e $M_k(f) = 1$, e portanto:

$$s(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 0 \cdot \Delta x_{i_k} = 0$$

e:

$$S(f, \mathcal{P}_{[0,1]}) = \sum_{I_k \subset [0,1]} 1 \cdot \Delta x_{i_k} = 1$$

de modo que f não é Riemann-integrável.

Uma caracterização da Riemann-integrabilidade de uma função pode ser dada em termos do "tamanho" do conjunto onde a função é descontínua. A grosso modo, se tal conjunto for "pequeno" (em um sentido que tornaremos preciso a seguir), então a função será Riemann-integrável - e se a função for Riemann-integrável, seu conjunto de descontinuidades será "pequeno".

Definição 33 (**medida nula**). *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}^2$ tem **medida nula** se para todo $\varepsilon > 0$ existe uma cobertura $\{I_1, \cdots, I_n, \cdots\}$ de A, por intervalos (abertos ou fechados), de modo que $\sum_{i=0}^{\infty} \ell(I_i) < \varepsilon$.*

Não é difícil demonstrar que, na reta, um conjunto tem medida nula se, e somente se, este conjunto for no máximo enumerável.

Definição 34 (**conteúdo nulo**). *Um subconjunto $A \subset \mathbb{R}$ tem conteúdo nulo se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ existir uma cobertura $\underline{\text{finita}}$ $\{I_1, \cdots, I_n\}$ de A por intervalos (abertos ou fechados), de modo que $\sum_{i=1}^{n} \ell(I_i) < \varepsilon$.*

Novamente, na reta, um conjunto A tem medida nula se, e somente se A for um conjunto finito.

3.1 A oscilação de uma função

Definição 35 (**oscilação**). *Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função. A **oscilação de f em** $[a,b]$ é:*

$$\omega(f,[a,b]) = M_{[a,b]}(f) - m_{[a,b]}(f)$$

Se f não for contínua em x_0, a medida da descontinuidade de f em x_0 pode ser dada de forma precisa. Sejam, para $\delta > 0$:

$$M(f,x_0,\delta) = \sup\{f(x) \mid x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$$

e

$$m(f,x_0,\delta) = \inf\{f(x) \mid x \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$$

*A **oscilação de f em x_0** é:*

$$\omega(f,x_0) = \lim_{\delta\to 0_+}[M(f,x_0,\delta) - m(f,x_0,\delta)] = \inf_{\delta>0}\omega(f,x_0,\delta)$$

Proposição 36. *Sejam $[a,b]$ um intervalo e $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função limitada. Tem-se, para qualquer $x_0 \in]a,b[$:*

$$\omega(f,x_0,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$$

Demonstração. Dados $x, y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$, podemos escolher a notação de modo que $f(y) \leq f(x)$. Temos:

$$m(f,x_0,\delta) \leq f(y) \leq f(x) \leq M(f,x_0,\delta)$$

o que nos dá:

$$|f(x)-f(y)| = f(x)-f(y) = f(x)+(-f(y)) \leq M(f,x_0,\delta) - m(f,x_0,\delta)$$

Assim, $M(f,x_0,\delta) - m(f,x_0,\delta)$ é cota superior de $\{|f(x)-f(y)| \mid x,y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$. Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar $x_1, x_2 \in]x_0-\delta, x_0+\delta[$ tais que $f(x_1) > M(f,x_0,\delta) - \frac{\varepsilon}{2}$ e $f(x_2) < m(f,x_0,\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $-f(x_2) > -m(f,x_0\delta) - \frac{\varepsilon}{2}$. Segue-se que $|f(x_1)-f(x_2)| \geq f(x_1)-f(x_2) = f(x_1)+(-f(x_2)) > (M(f,x_0,\delta) - m(f,x_0,\delta)) - \varepsilon$. Isto mostra que $M(f,x_0,\delta) - m(f,x_0,\delta)$ é a menor cota superior de $\{|f(x)-f(y)| \mid x,y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}$, de modo que:

$$\omega(f,x_0,\delta) = \sup\{|f(x)-f(y)| \mid x,y \in]x_0-\delta, x_0+\delta[\}.$$

□

Observação 37. *Em virtude da **Proposição 36**, como a oscilação é o supremo de um conjunto de números não negativos, tem-se sempre $\omega(f,x_0,\delta) \geq 0$.*

Proposição 38. *Uma função limitada $f:[a,b]\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ é contínua em $x_0 \in [a,b]$ se, e somente se, $\omega(f,x_0) = 0$.*

Demonstração. Suponha f contínua em x_0, de modo que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ implica $|f(x) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja:

$$(\forall x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[) \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Em particular, para qualquer $\eta > 0$ com $0 < \eta < \delta$, vale:

$$(\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < f(x) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \right)$$

Por definição de supremo, como $f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}$ é cota superior para $f(x)$ em $]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$, tem-se:

$$(\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left(f(x) \leq M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2}) \right)$$

Analogamente, para o ínfimo, temos:

$$(\forall x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[) \left(f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \leq f(x) \right)$$

e portanto:

$$\begin{cases} M(f, x_0, \eta) \leq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} \\ f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} < m(f, x_0, \eta) \end{cases}$$

Segue, portanto, que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $0 < \eta < \delta$ implica $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} - f(x_0) = \varepsilon$, ou seja, $\lim_{\delta \to 0}[M(f, x_0, \delta) - m(f, x_0, \delta)] = 0$, de modo que $\omega(f, (x_0, y_0)) = 0$.

Reciprocamente, se $\omega(f, x_0) = 0$, então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que se $0 < \eta < \delta$ então $M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon$.

Como para todo $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ tem-se $f(x) \leq M(f, x_0, \eta)$ e $-f(x_0) \leq -m(f, x_0, \eta)$. Tem-se, assim:

$$f(x) - f(x_0) < M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Também valem que $f(x_0) \leq M(f, x_0, \eta)$ e $m(f, x_0, \eta) \leq f(x)$, logo:

$$f(x_0) - f(x) \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta)$$

donde segue que:

$$m(f, x_0, \eta) - M(f, x_0, \eta) \leq f(x) - f(x_0)$$

Assim, para todo $x \in]x_0 - \eta, x_0 + \eta[$ vale:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq M(f, x_0, \eta) - m(f, x_0, \eta) < \varepsilon.$$

Segue, portanto, que f é contínua em x_0.

$\square$

Lema 39. *Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado e $x_0 \in]a,b[$. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada e $\omega(f,x_0) < c$, então existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f,x) < c$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$.*

Demonstração. Pela definição de limite, como $\omega(f,x_0) = \lim_{\eta \to 0} \omega(f,x_0,\eta) < c$, existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f,x_0,\delta) < \delta$. Dado qualquer $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, tomamos $\zeta > 0$ com $]x - \zeta, x + \zeta[\subset]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$ e obtemos:

$$\omega(f,x) \leq \omega(f,x,\eta) \leq \omega(f,x_0,\delta) < c$$

$\square$

Lema 40. *Seja $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado. Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é limitada, dado $\varepsilon > 0$, tem-se que o conjunto:*

$$B = \{x_0 \in [a,b] \mid \omega(f,x_0) \geq \varepsilon\}$$

é fechado em $\mathbb{R}$.

Demonstração. Mostraremos que $\mathbb{R} \setminus B$ é aberto.

Note que:

$$B = [a,b] \cap \{x \in \mathrm{dom}\,(f) \mid \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$$

e portanto:

$$\mathbb{R} \setminus B = (\mathbb{R} \setminus R) \cup \{x \in \mathrm{dom}\,(f) \mid \omega(f,x) < \varepsilon\}$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R} \setminus B$, tem-se $x \notin [a,b]$ ou $\omega(f,x) < \varepsilon$. No primeiro caso, como $[a,b]$ é fechado e portanto $\mathbb{R} \setminus [a,b]$ é aberto, existe um intervalo aberto C que contém x tal que $C \subset \mathbb{R} \setminus [a,b] \subset \mathbb{R} \setminus B$.

Tomemos $x_0 \in \{(x,y) \in \mathrm{dom}\,(f) \mid \omega(f,x) < \varepsilon\}$. Pelo **Lema 39**, tem-se que existe $\delta > 0$ tal que $\omega(f,x) < \varepsilon$ para todo $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Segue disto que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \{x \in \mathrm{dom}\,(f) \mid \omega(f,x) < \varepsilon\}$, de modo que este conjunto é aberto e seu complementar, $\{x \in \mathrm{dom}\,(f) \mid \omega(f,x) \geq \varepsilon\}$ é fechado. Segue que $\mathbb{R} \setminus B$, por ser união de intervalos abertos, é aberto, e portanto B é fechado. $\square$

Lema 41. *Sejam $\varepsilon > 0$, $[a,b]$ um intervalo fechado e limitado e seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ uma função limitada tal que para todo $x \in [a,b]$ tenhamos $\omega(f,x) < \varepsilon$. Então existe uma partição $\mathcal{P}_{[a,b]}$ de $[a,b]$ com $S(f,\mathcal{P}_{[a,b]}) - s(f,\mathcal{P}_{[a,b]}) < \varepsilon \cdot |b-a|$.*

Demonstração. Dado qualquer $x \in [a,b]$, existe um intervalo fechado R_x que contém x em seu interior e tal que $M_{R_x}(f) - m_{R_x}(f) < \varepsilon$, de modo que $\{\mathrm{int}(R_x) \mid x \in [a,b]\}$ constitui uma cobertura aberta de $[a,b]$. Sendo $[a,b]$ compacto (fechado e limitado), uma quantidade finita de conjuntos da forma $\mathrm{int}(R_x)$ recobre $[a,b]$, digamos $\{\mathrm{int}(R_{x_i}) \mid i \in \{1, \cdots, n\}\}$. Seja $\mathcal{P}_{[a,b]}$ uma partição de $[a,b]$ tal que cada subintervalo S determinado por $\mathcal{P}_{[a,b]}$ está contido em algum $\text{int}(R_{x_i})$ para $i \in \{1, \cdots, n\}$. Tem-se, então, $M_S(f) - m_S(f) < \varepsilon$, de modo que $S(f, \mathcal{P}) - s(f, \mathcal{P}) = \sum_S [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell(S) < \varepsilon \cdot \ell(R)$.

$\square$

O teorema a seguir nos dá uma condição suficiente para que uma função seja Riemann-integrável, a saber, que o conjunto de suas descontinuidades tenha medida nula.

Teorema 42. *Sejam I um intervalo e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função limitada. Se* $\text{Desc}\,(f)$ *tem medida nula então f é Riemann-integrável em I.*

Demonstração. Suponhamos que $\text{Desc}\,(f)$ tenha medida nula. Dado $\varepsilon > 0$, seja $B_\varepsilon = \{x \in [a, b] \mid \omega(f, x) \geq \varepsilon\}$. Então $B_\varepsilon \subset B$, de modo que B_ε também tem medida nula. Uma vez que B_ε é fechado e limitado, segue que B_ε é compacto, e portanto tem conteúdo nulo. Assim, existe uma coleção finita de intervalos fechados, $U_1, \cdots, U_n$ tais que $B_\varepsilon \subset \cup_{i=1}^n \text{int.}\,(U_i)$ e que $\sum_{i=1}^n \ell(U_i) < \varepsilon$.

Seja $\mathcal{P}$ uma partição de I tal que cada subintervalo S determinado por $\mathcal{P}$ esteja em um dos dois seguintes grupos:

(1) S_1, que consiste dos subintervalos S tais que $S \subset U_i$ para algum $i \in \{1, \cdots, n\}$;

(2) S_2, que consiste dos subintervalos S tais que $S \cap B_\varepsilon = \varnothing$.

Como f é limitada, seja $M > 0$ tal que:

$$(\forall x \in I)(|f(x)| < M).$$

Tem-se $M_S(f) - m_S(f) < 2M$ para cada S. Portanto,

$$\sum_{S \in S_1} [M_S(f) - m_S(f)] \cdot \ell.(S) < 2M \sum_{i=1}^n \ell.(U_i) < 2M\varepsilon$$

Se $S \in S_2$, tem-se para todo $x \in S$, $\omega(f, x) < \varepsilon$. Pelo **Lema 41**, existe uma partição $\mathcal{P}'_{[a,b]}$, mais fina do de $\mathcal{P}_{[a,b]}$ tal que:

$$\sum_{S' \subset S} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell(S') < \varepsilon \cdot \ell.(S),$$

para $S \in S_2$. Então:

$$S(f,\mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f,\mathcal{P}'_{[a,b]}) = \sum_{S' \subset S \in S_1} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell.(S') + \\ + \sum_{S' \subset S \in S_2} [M_{S'}(f) - m_{S'}(f)] \cdot \ell.(S') < 2M\varepsilon + \sum_{S \in S_2} \varepsilon \cdot \ell.(S) \leq \\ \leq 2M\varepsilon + \varepsilon \cdot \ell.([a,b])$$

Como M e $\ell.([a,b])$ são números fixados, isto mostra que se pode encontrar uma partição $\mathcal{P}'_{[a,b]}$ com $S(f,\mathcal{P}'_{[a,b]}) - s(f,\mathcal{P}'_{[a,b]})$ tão pequeno quanto se queira. Desta forma, f é Riemann-integrável. $\square$

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[2] Flemming, D.M. e Gonçalves, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6^a edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Spivak, M., **Cálculo en Variedaes**, Editorial Reverté S.A. Barcelona, 2017.