MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 15

Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Linearização e Diferenciabilidade

Nesta seção apresentaremos o conceito de linearização de uma função no entorno de um ponto em que esta é diferenciável e relacionamos isto com o conceito de "diferenciabilidade" de uma função real de uma variável real.

A grosso modo, dizemos que uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é diferenciável em um ponto interior de seu domínio, $x_0 \in \text{int}\,(I)$, se f admitir uma "boa" aproximação por uma função afim, ou seja, uma função da forma $y = m \cdot x + n$, em algum entorno de x_0. A "diferencial" da função f em um ponto x_0 será, a grosso modo, a "melhor" função *linear* que aproxima o incremento $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$.

Vimos que se f é derivável em x_0 então o gráfico de f admite uma reta tangente no ponto $(x_0, f(x_0))$. Veremos que, de fato, derivabilidade em um ponto implica na diferenciabilidade.

Definição 1. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ e $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável em $x_0 \in \text{int}\,(I)$. A **linearização de f em** x_0 é:*

$$L_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Exemplo 2. *Determinar a linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ em $x_0 = 0$.*

Solução: Como:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}}$$

temos que $f(0) = \sqrt{1+0} = \sqrt{1} = 1$ e $f'(0) = \dfrac{1}{2} \cdot (1+0)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2} \cdot (1)^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{2}$

*jeancb@ime.usp.br

Assim,

$$L_0(x) = f(0) + f'(0) \cdot x = 1 + \frac{1}{2} \cdot x$$

Veja como a aproximação $\sqrt{1+x} \approx 1 + (x/2)$ é precisa para valores de x próximos de zero:

Aproximação	**|Valor real - aproximação|**
$\sqrt{1.2} \approx 1 + \frac{0.2}{2} = 1.10$	$0.00455488499 \sim 10^{-2}$
$\sqrt{1.05} \approx 1 + \frac{0.05}{2} = 1.025$	$0.0003049234041 \sim 10^{-3}$
$\sqrt{1.005} \approx 1 + \frac{0.005}{2} = 1.00250$	$0.00000311721183 \sim 10^{-5}$

Conforme nos afastamos de zero, perdemos a exatidão. Por exemplo, para $x = 2$, a linearização nos fornece 2 como uma aproximação de $\sqrt{3}$, que não é exata em *nenhuma* casa decimal. Na prática, nunca usamos a linearização para calcular uma raiz quadrada.

A utilidade da linearização está em sua capacidade de substituir fórmulas complicadas por uma mais simples ao longo de um intervalo de valores. Se precisássemos trabalhar com $\sqrt{1+x}$ para x próximo de 0 e pudéssemos tolerar o pequeno erro envolvido, em vez disso poderíamos trabalhar com $1 + (x/2)$. Portanto, precisamos saber *qual é o tamanho do erro*, o que veremos mais adiante.

Uma aproximação linear normalmente perde a exatidão longe de seu centro. A aproximação de $\sqrt{1+x}$, $1 + (x/2)$ provavelmente é imprecisa para ser usada perto de $x_0 = 3$. Nesta região precisamos da linearização para $x_0 = 3$.

Exemplo 3. *Determinar uma linearização de $f(x) = \sqrt{1+x}$ em $x_0 = 3$.*

Solução: Neste caso, temos:

$$f(3) = 2, \;\; f'(3) = \frac{1}{2} \cdot (1+x)^{-\frac{1}{2}} \bigg|_{x=3} = \frac{1}{4}$$

e portanto:

$$L_3(x) = 2 + \frac{1}{4} \cdot (x - 3)$$

Suponha que queiramos estimar $\sqrt{4.2}$. Neste caso, $\sqrt{4.2} = \sqrt{1 + 3.2}$. Quando $x = 3.2$, a linearização acima nos fornece:

$$\sqrt{1+x} = \sqrt{4.2} \approx L_3(3.2) = \frac{5}{4} + \frac{3.2}{4} = 1.250 + 0.800 = 2.050$$

Uma calculadora nos fornece o valor 2.049390153, de modo que o erro percentual cometido é

$$\frac{|2.050 - 2.049390153|}{2.049390153} = \frac{0.0006098468081}{2.049390153} = 0.0002975747723 \approx 0.03\%$$

Compare esta aproximação com aquela obtida pela linearização em torno de 1:

$$\sqrt{4.2} = \sqrt{1 + 3.2} \approx L_1(3.2) = 1 + \frac{3.2}{2} = 1 + 1.6 = 2.6$$

O erro percentual cometido aqui foi de:

$$\frac{|2.6 - 2.049390153|}{2.049390153} = 0.2686700948 \approx 27\%$$

Abaixo listamos algumas linearizações de funções em torno de $x_0 = 0$:

- Dada $f(x) = \sin(x)$, tem-se $L_0(x) = x$;
- Dada $g(x) = \cos(x)$, tem-se $L_0(x) = 1$;
- Dada $h(x) = \tan(x)$, tem-se $L_0(x) = x$;
- Dada $m(x) = e^x$, tem-se $L_0(x) = 1 + x$;
- Dada $\ell(x) = \ln(1 + x)$, tem-se $L_0(x) = x$;

Exemplo 4. *A linearização mais importante para raízes e potências é:*

$$(1 + x)^k \approx 1 + k \cdot x, \quad \textit{onde } k \textit{ é qualquer número e } x \textit{ está próximo de } 0.$$

O fato de uma função admitir uma linearização "ótima" em um ponto é tão importante que recebe um nome especial, dado na seguinte:

Definição 5. *Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real. Dizemos que f é **diferenciável em** $x_0 \in]a, b[$ se, e somente se, existir $m \in \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Assim, intuitivamente, ser diferenciável em x_0 significa que a função pode ser aproximada por uma reta em uma vizinhança do ponto x_0 – ou seja, admite uma linearização em x_0.

No caso do cálculo em uma variável real, os conceitos de diferenciabilidade e de derivabilidade coincidem, conforme vemos no seguinte:

Teorema 6. *$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável em x_0 se, e somente se, f é derivável em x_0.*

Demonstração. Suponhamos que f é derivável em x_0. Então $f'(x_0)$ existe, e a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, f(x_0))$ é dada por:

$$y = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

Tal reta será a "aproximação" para f. De fato, temos:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} =$$

$$= \lim_{x \to x_0} \left[\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right] = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) = f'(x_0) - f'(x_0) = 0.$$

Desta forma, f é diferenciável em x_0.

Reciprocamente, suponhamos que f seja diferenciável em x_0, então existe uma reta $y = f(x_0) + m \cdot (x - x_0)$ tal que:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - y}{x - x_0} = 0$$

Assim,

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - m \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - \lim_{x \to x_0} \frac{m \cdot (x - x_0)}{(x - x_0)} = 0$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = m.$$

Assim, o limite $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ existe, de modo que f é derivável em x_0. $\square$

Definição 7. *Dada uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, a* ***diferencial*** *de f em x_0 é a única função linear, que denotamos por $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que:*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - df(x_0) \cdot (x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

Recorde, do curso de Álgebra Linear, que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de uma variável real a valores reais é linear se, e somente se existir um escalar α tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $f(x) = \alpha \cdot x$. Assim, podemos identificar a *função linear* $df(x_0) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ com um *escalar*, a saber, $f'(x_0)$, uma vez que:

$$\begin{array}{rccc} df(x_0) : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & h & \mapsto & f'(x_0) \cdot h \end{array}$$

Para funções de duas variáveis ou mais, os conceitos se distinguem.

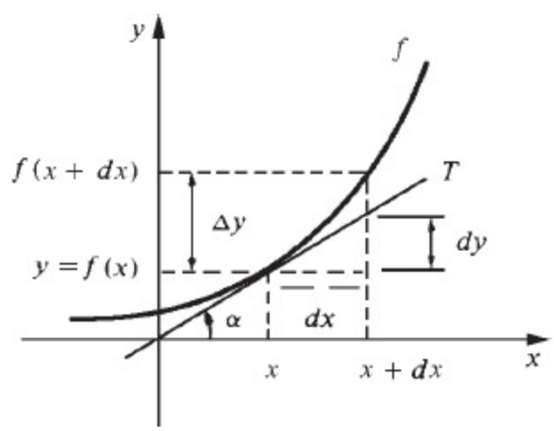
1.1 Interpretação de $\dfrac{dy}{dx}$ como um Quociente

Até aqui, $\dfrac{dy}{dx}$ tem sido considerado como uma mera notação para a derivada de $y = f(x)$. O que faremos a seguir será interpretar $\dfrac{dy}{dx}$ como um *quociente* entre dois acréscimos. Inicialmente, vamos considerar dx como se fosse um acréscimo na variável x e, em seguida, procuraremos uma interpretação para o acréscimo dy.

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

Fixemos $x_0 \in \operatorname{int}(\operatorname{dom}(f))$. Se olharmos, então, para dy como o *acréscimo na ordenada da reta tangente T acarretado pelo acréscimo de dx na abscissa x_0*, teremos:

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0) = \tan(\alpha)$$



Podemos escrever:

$$dy = f'(x_0)dx$$

Observe que:

$$\Delta y = f(x + dx) - f(x)$$

é o acréscimo sofrido pela função f quando se passa de x a $x + dx$. O acréscimo dy pode, então, ser olhado como *um valor aproximado para* Δy; evidentemente, o erro $\Delta y - dy$ que se comete na aproximação de Δy por dy será tanto melhor quanto menor for dx.

Assim, fixado x_0, podemos olhar para a *função linear* que, a cada $dx \in \mathbb{R}$ associa $dy \in \mathbb{R}$ de tal modo que $dy = f'(x_0) \cdot dx$. Tal função é a **diferencial de** f **em** x_0, ou simplesmente, **diferencial de** $y = f(x)$ em x_0.

Definição 8. *Dada $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ diferenciável em $x_0 \in]a, b[$, a* ***diferencial de f em*** *x_0 é:*

$$\begin{array}{rccc} df(x_0): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & dx & \mapsto & f'(x_0) \cdot dx \end{array}$$

Observação 9. *Note que acima dx não tem qualquer significado "místico" ou "infinitesimal" – simplesmente denota a variável independente da função linear $df(x_0)$, que representa um "incremento" na variável x.*

Exemplo 10. *Seja $y = x^2$. Relacionar Δy com dy em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.*

Solução: Temos:

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

de modo que a diferencial de f é:

$$\begin{array}{rccc} df(x_0): & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & dx & \mapsto & 2x_0 dx \end{array}$$

Temos, por outro lado,

$$\Delta y = (x_0 + dx)^2 - x_0^2 = 2x_0 dx + (dx)^2$$

Desta forma,

$$\Delta y - dy = (dx)^2$$

Novamente, observe que quanto *menor* for dx, *mais próximo* dy estará de Δy.

Exemplo 11. *Seja $A = \pi \cdot r^2$. Calcular a diferencial de A em um ponto r_0 e interpretar o resultado graficamente.*

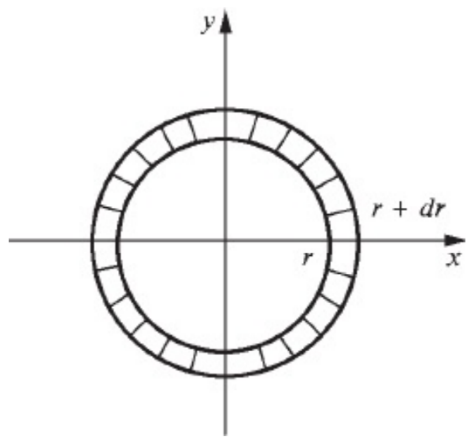
Solução: Temos:

$$\frac{dA}{dr} = A'(r) = 2 \cdot \pi \cdot r$$

de modo que a diferencial de A em $r_0 > 0$ é:

$$\begin{array}{rccc} dA: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & dr & \mapsto & 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot dr \end{array}$$

Notamos que a fórmula $A = \pi \cdot r^2$ nos fornece a área de um círculo em função do raio r. A diferencial de A em r_0, $dA(r_0) \cdot dr = 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot dr$ é, então, um valor aproximado para o acréscimo ΔA na área A correspondente ao acréscimo dr em r_0.



Observe que ΔA é a área da região hachurada e que $dA(r_0) = 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot dr$ é a área de um retângulo de comprimento $2 \cdot \pi \cdot r_0$ ($2 \cdot \pi \cdot r_0$ é o comprimento da circunferência de raio r_0) e de altura dr. O erro que se comete na aproximação é:

$$\Delta A \approx 2 \cdot \pi \cdot r_0 \cdot dr. \tag{1}$$

Temos:

$$\Delta A = \pi \cdot (r_0 + dr)^2 - \pi \cdot r_0^2 = 2 \cdot \pi \cdot r_0 + \pi \cdot (dr)^2.$$

Deste modo, o erro que se comete na aproximação (1) é igual a $\pi \cdot (dr)^2$, que é a área de um círculo de raio dr.

Exemplo 12. *Utilizando a diferencial, calcular um valor aproximado para o acréscimo Δy que a função $y = x^2$ sofre quando se passa de $x_0 = 1$ para $x_0 + dx = 1,001$. Calcular o erro.*

Solução:A diferencial de $y = x^2$ em x_0 é, como vemos,

$$\begin{array}{rccc} dy: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & dx & \mapsto & 2 \cdot x_0 \cdot dx \end{array}$$

de modo que em $x_0 = 1$, teremos:

$$dy = 2 \cdot 1 \cdot dx = 2 \cdot dx$$

Como $dx = 0,001$, segue que:

$$dy = 2 \cdot 1 \cdot (0,001) = 0,002$$

Segue que $0,002$ é um valor aproximado para Δy.

Podemos comparar a aproximação com Δy calculando o próprio Δy:

$$\Delta y = (1,001)^2 - 1^2 = 0,000001$$

Observe que $1 + dy = 1,002$ é um valor aproximado para $1,001$ com erro igual a $0,000001$.

Exemplo 13. *Utilizando a diferencial, calcular um valor aproximado para $\sqrt{1,01}$. Avaliar o erro.*

Solução: Consideraremos a função $y = \sqrt{x}$. Primeiramente vamos calcular dy para $x_0 = 1$ e $dx = 0,01$.

Temos:

$$\begin{array}{rccc} dy: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & dx & \mapsto & \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot dx \end{array}$$

ou seja,

$$dy = \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \cdot dx$$

de modo que em $x_0 = 1$ tem-se:

$$dy = \frac{1}{2} \cdot dx.$$

Portanto, $dy = (0,01)/2 = 0,005$ para $dx = 0,01$. Assim, $1 + dy = 1,005$ é um valor aproximado de $\sqrt{1,01}$. O erro *estimado* é, pois, $dy = 0,005$, enquanto que o erro cometido é:

$$\Delta y = \sqrt{1,01} - \sqrt{1} \approx 1,004987562 - 1 = 0,004987562$$

1.2 Variações Absoluta, Relativa e Percentual

Conforme nos deslocamos de um ponto x_0 para um ponto $x_0 + dx$, podemos descrever a variação de f de, pelo menos, três maneiras:

	Real	**Estimada**
Variação absoluta:	$\Delta f = f(x_0 + dx) - f(x_0)$	$dt = f'(x_0) \cdot dx$
Variação relativa:	$\dfrac{\Delta f}{f(x_0)}$	$\dfrac{df}{f(x_0)}$
Variação percentual:	$\dfrac{\Delta f}{f(x_0)} \times 100$	$\dfrac{df}{f(x_0)} \times 100$

Exemplo 14. *No final da década de 1830, o fisiologista francês Jean-Marie Louis Poiseuille descobriu a fórmula que hoje empregamos para predizer quando o raio de uma artéria obstruída necessita ser expandido para que o fluxo normal de sangue seja restabelecido. Sua fórmula é:*

$$V = k \cdot r^4, \tag{2}$$

nos diz que o volume de líquido correndo por um pequeno vaso ou tubo por unidade de tempo (a vazão, V), sob pressão constante, é uma constante multiplicada pela quarta potência do raio r do duto. Vamos verificar como um aumento de 10% em r afeta a vazão V.

Primeiramente buscamos relacionar as diferenciais de V e de r, o que pode ser feito derivando os dois membros da equação (2):

$$dV = \frac{dV}{dr} \cdot dr = \frac{d}{dr}(k \cdot r^4) \cdot dr$$

$$dV = 4 \cdot k \cdot r^3 \cdot dr$$

A variação relativa de V é:

$$\frac{dV}{V} = \frac{4 \cdot k \cdot r^3}{k \cdot r^4} \cdot dr = 4\frac{dr}{r}$$

Concluímos, assim, que a variação relativa da vazão é o quádruplo da variação relativa do raio. Um aumento em r de 10% acarreta, portanto, em um aumento de 40% na vazão.

A equação $df(x_0) = f'(x_0) \cdot dx$ nos mostra o quanto o valor de f é sensível a uma variação de x, para diferentes valores de x_0. Quanto maior o valor de f' em x_0, maior é o efeito de uma determinada variação dx.

1.3 Erro na Aproximação Diferencial

Suponha que $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja uma função derivável em $x_0 \in \text{int}. I$, e que Δx seja um incremento em x. Há duas maneiras de descrever a variação de f à medida que x varia de x_0

a $x_0 + \Delta x$:

Variação real: $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$;

Estimativa diferencial: $df(x_0) = f'(x_0) \cdot \Delta x$.

É natural nos perguntarmos *como* df aproxima Δf. Medimos o erro da aproximação subtraindo $df(x_0)$ de Δf:

$$\begin{aligned}\text{Erro na aproximação } &= \Delta f - df(x_0) = \Delta f - f'(x_0) \cdot \Delta x = \underbrace{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}_{\Delta f} - f'(x_0) \cdot \Delta x = \\ &= \underbrace{\left(\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} - f'(x_0) \right)}_{=\epsilon} \cdot \Delta x = \epsilon \cdot \Delta x\end{aligned}$$

Conforme fazemos Δx tender a zero, o quociente:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

se aproxima de $f'(x_0)$, então a quantidade entre parênteses se torna um número muito pequeno (daí, a notação ϵ). Na verdade, $\lim_{\Delta x \to 0} \epsilon = 0$. Assim, quando Δx é pequeno, o erro de aproximação $\epsilon \cdot \Delta x$ é menor ainda:

$$\underbrace{\Delta f}_{\text{variação verdadeira}} = \underbrace{f'(x_0) \cdot \Delta x}_{\text{variação estimada}} + \epsilon \cdot \underbrace{\Delta x}_{\text{erro}}$$

Veremos, na próxima seção, como calcular o erro de modo refinado.

2 Fórmula de Taylor

A linearização de uma função $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivável em $x_0 \in \operatorname{int} I$ é o polinômio:

$$P_1(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0).$$

Se f tiver derivadas de ordens superiores em x_0, é razoável esperar que f admita aproximações polinomiais de ordens mais altas, uma para cada derivada disponível.

Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função, Dizemos que f é **derivável** (ou, conforme visto na seção anterior, **diferenciável**) no conjunto A se, e somente se existirem um conjunto U aberto tal que $A \subseteq U$ e uma função diferenciável em U, $\widetilde{f} : U \to \mathbb{R}$ tais que $\widetilde{f} \restriction_A = f$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "\tilde{f}"] & \\ A \arrow[u, "\iota_A^U"] \arrow[r, "f"'] & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Neste ponto convém apresentar a seguinte:

Definição 15 (classes de diferenciabilidade). *Sejam $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \text{int.}(A)$. Se tivermos $f' : \text{int.}(A) \to \mathbb{R}$ for contínua em $x_0 \in \text{int.}(A)$, dizemos que "f **é uma função de classe** $\mathcal{C}^1$ **em** x_0". Caso tenhamos $f'' : \text{int.}A \to \mathbb{R}$ também contínua em x_0, dizemos que "f **é uma função de classe** $\mathcal{C}^2$ **em** x_0". Se $f''' : \text{int.}A \to \mathbb{R}$ for contínua em x_0, dizemos que "f **é uma função de classe** $\mathcal{C}^3$ **em** x_0". Mais geralmente, se f admite todas as derivadas de ordem até n contínuas em x_0, dizemos que **"f é uma função de classe $\mathcal{C}^n$ em x_0"**. Em particular, se f admite* todas *as derivadas de* todas *as ordens contínuas em x_0, dizemos que "f **é uma função de classe** $\mathcal{C}^\infty$ **em** x_0".*

Estendemos a noção acima para subconjuntos quaisquer do domínio de f: dado $B \subseteq A$, dizemos que f é de classe $\mathcal{C}^{(n)}(B, \mathbb{R})$ se, e somente se f for de classe $\mathcal{C}^{(n)}$ em *todos* os pontos de B. Neste caso, escrevemos $f \in \mathcal{C}^{(n)}(B, \mathbb{R})$.

Nesta (última) seção veremos como estender o processo de aproximação do valor de uma função para polinômios.

Definição 16 (polinômio de Taylor de ordem n). *Seja $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in \text{int}(I)$ tais que existe $\delta > 0$ tal que $f \in \mathcal{C}^{(n)}(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[, \mathbb{R})$. Então, dado $k \in \{0, 1, \cdots, n-1, n\}$, o **polinômio de Taylor de ordem** k **em** x_0 é o polinômio:*

$$\begin{aligned} P_k(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots \\ + \cdots + \frac{f^{(k-1)}(x_0)}{(k-1)!} \cdot (x - x_0)^{k-1} + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k \end{aligned}$$

Observação: Falamos de um polinômio de Taylor de ordem k, e não de grau k porque $f^{(k)}(x_0)$ pode, eventualmente, ser 0.

Assim, como a linearização de f em x_0 nos fornece a melhor aproximação linear de f em torno de x_0, o polinômio de Taylor de ordem k fornece a melhor aproximação polinomial de grau k para f no entorno de x_0.

Com este objetivo em mente, consideremos o polinômio:

$$P_n(x) = C_0 + C_1 \cdot (x - x_0) + C_2 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + C_k \cdot (x - x_0)^k$$

Uma vez que k e x_0 nos são dados *a priori*, determinar o polinômio P_k equivale a determinar os coeficientes $C_0, C_1, \cdots, C_k$.

Vê-se que $P_k(x_0) = C_0$, e uma vez que queremos que o polinômio coincida com a função no ponto x_0, devemos ter $P_k(x_0) = C_0 = f(x_0)$.

Vamos impor que as derivadas de ordem até k do polinômio coincidam em x_0 com as derivadas de ordem até k de f. Assim,

$$P_k'(x) = C_1 + 2 \cdot C_2 \cdot (x - x_0) + 3 \cdot C_3 \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + k \cdot C_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

e fazendo $x = x_0$, obtemos:

$$P_k'(x_0) = C_1 = f'(x_0)$$

Também,

$$P_k''(x) = 2 \cdot C_2 + 3 \cdot 2 \cdot C_3 \cdot (x - x_0) + \cdots + k \cdot (k-1) \cdot C_k \cdot (x - x_0)^{k-1}$$

de modo que:

$$P_k''(x_0) = 2 \cdot C_2 = f''(x_0)$$

e assim:

$$C_2 = \frac{f''(x_0)}{2}$$

Também,

$$P_k'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot C_3 + 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) \cdot C_4 + \cdots + k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot C_k \cdot (x - x_0)^{k-3}$$

de modo que:

$$P_k'''(x_0) = 3 \cdot 2 \cdot C_3 = 3! \cdot C_3 = f'''(x_0)$$

e assim:

$$C_3 = \frac{f''(x_0)}{3!}$$

Também,

$$P_k^{(4)}(x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot C_4 + 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot (x - x_0) \cdot C_5 + \cdots + k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot (k-3) \cdot C_k \cdot (x - x_0)^{k-2}$$

de modo que:

$$P_n^{(4)}(x_0) = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot C_4 = 4! \cdot C_4 = f^{(4)}(x_0)$$

e assim:

$$C_4 = \frac{f^{(4)}(x_0)}{4!}$$

Procedendo assim, chegamos em:

$$P_k^{(k)}(x_0) = k \cdot (k-1) \cdot (k-1) \cdots 2 \cdot 1 \cdot C_k = k! \cdot C_k = f^{(k)}(x_0)$$

de onde concluímos que:

$$C_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$$

Como P_k é uma **aproximação** da função f, escreveremos:

$$\underbrace{f(x)}_{\text{valor exato}} = \overbrace{P_k(x)}^{\text{valor aproximado}} + \overbrace{R_k(x)}^{\text{resto}}$$

Escrevemos então:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2} \cdot (x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!} \cdot (x - x_0)^3 + \cdots$$
$$\cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k + R_k(x)$$

ou seja,

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i + R_k(x)$$

Vamos obter agora uma expressão para $R_k(x)$, escrevendo:

$$R_k(x) = \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot Q(x)$$

de modo que:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!} \cdot (x - x_0)^i + \frac{(x - x_0)^{k+1}}{(k+1)!} \cdot Q(x)$$

Consideremos, para um dado x, a seguinte função:

$$\begin{array}{rccl} F: & [x_0, x] & \to & \mathbb{R} \\ & t & \mapsto & f(x) - f(t) - f'(t)\cdot(x-t) - \frac{f''(t)}{2}\cdot(x-t)^2 - \cdots - \frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n - \frac{(x-t)^{n+1}}{(n+1)!}\cdot Q(x) \end{array}$$

Note que $F(x_0) = F(x) = 0$, que F é derivável em $]x_0, x[$ e contínua em $[x_0, x]$. Podemos aplicar o **Teorema de Rolle** a F a fim de encontrar um certo $\xi \in]x_0, x[$ tal que $F'(\xi) = 0$.

Temos, portanto:

$$\begin{aligned} F'(t) = -f'(t) - [f''(t)\cdot(x-t) + f'(t)\cdot(-1)] - \left[\frac{f'''(t)}{2}\cdot(x-t)^2 + \frac{f''(t)}{2}\cdot 2\cdot(x-t)\cdot(-1)\right] - \\ \cdots - \left[\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^n + \frac{f^{(k)}(t)}{k!}\cdot k\cdot(x-t)^{k-1}\cdot(-1)\right] = \\ -f'(t) - f''(t)\cdot(x-t) + f'(t) + \frac{f'''(t)}{2}\cdot(x-t)^2 + f''(t)\cdot(x-t) + \cdots \\ \cdots - \frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k + \frac{f^{(k)}(t)}{(k+1)!}\cdot(x-t)^{k-1} = \\ = -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k + \frac{(x-t)^k}{k!}\cdot Q(x) = \frac{(x-t)^k}{k!}\left[Q(x) - f^{(k+1)}(t)\right] \end{aligned}$$

de modo que podemos escrever:

$$F'(t) = -\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}\cdot(x-t)^k + \frac{(x-t)^k}{k!}\cdot Q(x) = \frac{(x-t)^k}{k!}\left[Q(x) - f^{(k+1)}(t)\right]$$

Logo,

$$0 = F'(\xi) = \frac{(x-\xi)^k}{k!}\left[Q(x) - f^{(k+1)}(\xi)\right]$$

A igualdade acima se verifica se, e somente se $Q(x) = f^{(k+1)}(\xi)$. Logo, obtemos a fórmula:

$$\boxed{f(x) = \sum_{i=0}^{k} \frac{f^{(i)}(x_0)}{i!}\cdot(x-x_0)^i + \frac{f^{(k+1)}(\xi)}{(k+1)!}\cdot(x-x_0)^{k+1} \text{ para algum } \xi \in]x, x_0[}$$

conhecida como a **fórmula de Taylor**. Quando $x_0 = 0$, a fórmula acima é chamada **Fórmula de MacLaurin**.

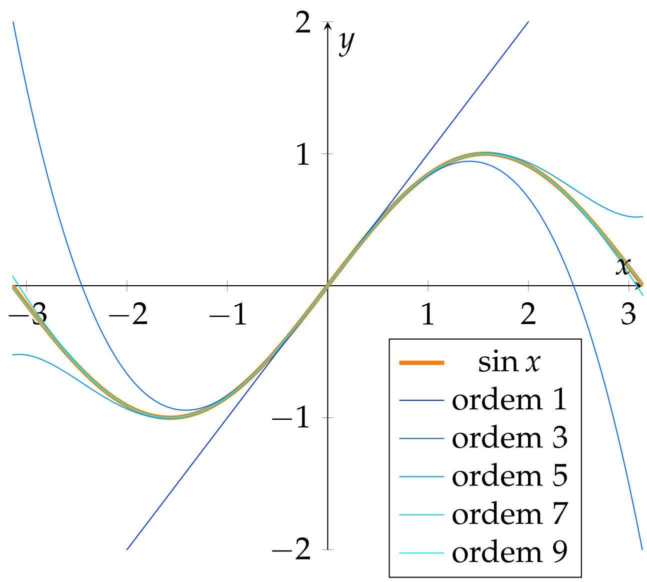
Uma vez que $\xi \in]x_0, x[$, podemos escrever $\xi = x_0 + \theta\cdot(x-x_0)$ para algum $\theta \in]0, 1[$.

Note que, munidos desta fórmula somos capazes de obter boas aproximações polinomiais de diversas funções.

Por exemplo, a fórmula de MacLaurin para $f(x) = \sin(x)$ pode ser calculada como segue: temos $f(0) = \sin(0) = 0$, $f'(0) = \cos(0) = 1$, $f''(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(3)}(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = \sin(0) = 0$, $f^{(5)}(0) = \cos(0) = 1$, $f^{(6)}(0) = -\sin(0) = 0$, $f^{(7)}(0) = -\cos(0) = -1$, $f^{(8)}(0) = \sin(0) = 0$ e $f^{(9)}(0) = \cos(0) = 1$. Assim, temos os seguintes polinômios de Taylor:

- Ordem 1: $P_1(x) = x$;
- Ordem 3: $P_3(x) = x - \dfrac{x^3}{3!}$;
- Ordem 5: $P_5(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!}$;
- Ordem 7: $P_7(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!}$;
- Ordem 9: $P_9(x) = x - \dfrac{x^3}{3!} + \dfrac{x^5}{5!} - \dfrac{x^7}{7!} + \dfrac{x^9}{9!}$;

Abaixo temos uma representação do gráfico da função seno e de seus polinômios de Taylor de ordens $1, 3, 5, 7$ e 9:



Exemplo 17. *Avaliar $\sqrt{5}$ usando o polinômio de Taylor de grau 2 (dois).*

Solução: Neste caso vamos aproximar a função $f(x) = \sqrt{x}$ em torno do ponto mais próximo de 5 onde sabemos calcular f – que, neste caso, é $x_0 = 4$. O intervalo em que faremos a aproximação é, portanto, $[4, 5]$.

Temos $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $f''(x) = -\dfrac{1}{4\sqrt{x^3}}$, de modo que:

$$f(4) = 2,\ f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4} \text{ e } f''(4) = -\frac{1}{4\sqrt{4^3}} = -\frac{1}{32}$$

O polinômio de Taylor correspondente é:

$$P_2(x) = f(4) + f'(4)\cdot(x-4) + \frac{f''(4)}{2}\cdot(x-4)^2 = 2 + \frac{1}{4}\cdot(5-4) - \frac{1}{64}\cdot(5-4)^2 = 2 + \frac{1}{4} - \frac{1}{64} =$$

$$= \frac{143}{64} = 2.234375$$

O valor encontrado em uma calculadora é 2.236067977.

Para *estimar* o erro cometido em uma aproximação por fórmula de Taylor, buscamos *maximizá-lo*. Por exemplo, o erro cometido no **Exemplo 17** é calculado usando a fórmula do erro:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\cdot(x-4)^3$$

onde ξ é um número entre x e x_0, cuja existência é garantida pelo **Teorema de Rolle**. Note que o **Teorema de Rolle** *não* nos diz *como* calcular ξ. Desta forma, o máximo que podemos fazer é encontrar um limitante superior para $R_2(x)$. Neste caso, temos:

$$f^{(3)}(\xi) = \frac{3\xi^2}{8\cdot\sqrt{\xi^9}}$$

Assim, temos:

$$|R_2(x)| = \left|\frac{3\xi^2}{8\cdot\sqrt{\xi^9}}\cdot(x-4)^3\right| = \left|\frac{3\xi^2}{8\cdot\sqrt{\xi^9}}\right|\cdot|x-4|^3$$

Vamos buscar um valor de ξ que *majore* $\left|\dfrac{3x^2}{8\cdot\sqrt{x^9}}\right|$ (e portanto $|R_n(x)|$). Sendo $g(x) = \dfrac{3x^2}{8\cdot\sqrt{x^9}}$ uma função *decrescente*, segue que $\left|\dfrac{3\xi^2}{8\cdot\sqrt{\xi^9}}\right|$ pode ser majorado tomando $\xi = 4$, ou seja:

$$\sup\left\{\left|\frac{3x^2}{8\cdot\sqrt{x^9}}\right| \mid x\in[4,5]\right\} = \frac{3\cdot 4^2}{8\cdot\sqrt{4^9}} = \frac{3}{256} = 0,01171875$$

Assim,

$$|R_2(5)| \leq \left| \frac{3 \cdot 4^2}{8 \cdot \sqrt{4^9}} \right| \cdot |5-4|^3 = 0,01171875$$

Desta forma, podemos afirmar que o

> "o erro cometido ao aproximar $\sqrt{5}$ pelo polinômio de Taylor de ordem 2 é, no máximo, $0,01171875$".

E, de fato, tem-se:

$$|f(5) - P_2(5)| = |2.236067977 - 2.234375| = 1.692977 \times 10^{-3} = 0.001692977 < 0,01171875$$

Exemplo 18. *Aproximar* $\cos(58^o)$ *utilizando o polinômio de Taylor de ordem* 4.

Solução: Neste caso vamos aproximar a função $f(x) = \cos(x)$ em torno do ponto mais próximo de $x = 58^o = \frac{29}{90}\pi$ onde sabemos calcular f – que, neste caso, é $x_0 = \frac{\pi}{3}$.

Temos $f'(x) = -\sin(x)$, $f''(x) = -\cos(x)$, $f'''(x) = \sin(x)$ e $f^{(4)}(x) = \cos(x)$ de modo que:

$$f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}, f''\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, f'''\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{e} \quad f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos(60^o) = \frac{1}{2}$$

O polinômio de Taylor correspondente é:

$$P_4(x) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

Assim,

$$\begin{aligned} P_4\left(\frac{29}{90}\pi\right) = f\left(\frac{\pi}{3}\right) + f'\left(\frac{\pi}{3}\right) \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \\ + \frac{f'''\left(\frac{\pi}{3}\right)}{3!} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{3}\right)}{4!} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^4 \end{aligned}$$

$$P_4\left(\frac{29}{90}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right) - \frac{1}{2 \cdot 2} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{3! \cdot 2} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{4! \cdot 2} \cdot \left(\frac{29}{90}\pi - \frac{\pi}{3}\right)^4$$

$$P_4\left(\frac{29}{90}\pi\right) = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right) - \frac{1}{4} \cdot \left(-\frac{\pi}{90}\right)^2 + \frac{\sqrt{3}}{12}\left(-\frac{\pi}{90}\right)^3 + \frac{1}{48}\left(-\frac{\pi}{90}\right)^4 = 0.529919202$$

O valor encontrado em uma calculadora é 0.5299192642.

Vamos estimar o erro cometido no **Exemplo 18**, em que calculamos o cosseno de 58^o com o polinômio de Taylor de grau 4.

Solução: Neste caso temos $f(x) = \cos(x), x_0 = \frac{\pi}{3}$ e $n = 4$, e o intervalo em questão é $\left[\frac{29\pi}{90}, \frac{\pi}{3}\right]$. A fórmula do erro é, portanto:

$$R_4(x) = -\frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \cdot (x - x_0)^5 = \frac{\sin(\xi)}{5!} \cdot \left(x - \frac{\pi}{3}\right)^5$$

Podemos *majorar* $g(x) = \dfrac{\sin(x)}{5!}$ no intervalo $\left[\dfrac{29\pi}{90}, \dfrac{\pi}{3}\right]$ por:

$$\sup\left\{\left|\frac{\sin(x)}{5!}\right| \mid x \in \left[\frac{29\pi}{90}, \frac{\pi}{3}\right]\right\} = \left|\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)}{5!}\right| = \frac{\sqrt{3}}{240}$$

Assim, certamente teremos $\left|-\dfrac{\sin(\xi)}{5!}\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$, e segue que o erro pode ser estimado por:

$$|R_4(x)| \leq \frac{\sqrt{3}}{240} \cdot \left|x - \frac{\pi}{3}\right|^5$$

Logo,

$$\left|R_4\left(\frac{29\pi}{90}\right)\right| \leq \frac{\sqrt{3}}{240} \cdot \left|\frac{29\pi}{90} - \frac{\pi}{3}\right|^5 = \frac{\sqrt{3}}{240}\left(\frac{\pi}{90}\right)^5 = 3.74012573 \times 10^{-10}$$

Na verdade,

$$|R_4(x)| = 6.22 \times 10^{-8}$$

Exemplo 19. *Sabendo que $e \leq 3$, calcular o valor de e com erro inferior a $0,000\,001 = 10^{-6}$.*

Solução: Consideraremos a função $f(x) = e^x$, $x_0 = 0$ e o intervalo em apreço será $[0, 1]$. Sabemos que $f'(x) = e^x, \cdots, f^{(n)}(x) = e^x, \cdots$. Tomando a expansão em fórmula de MacLaurin (em torno do zero), obtemos:

$$e^x = f(x) = f(0) + f'(0) \cdot (x - 0) + \frac{f''(0)}{2!} \cdot (x - 0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot (x - 0)^n + R_n(x) =$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_n(x)$$

onde $R_n(x) = \dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}$. Queremos que o erro seja inferior a $0,000\,001$, ou seja, queremos encontrar $n \in \mathbb{N}$ tal que:

$$|R_n(x)| < 0,000\,001.$$

Vamos, portanto, encontrar um valor que limite $\left|\dfrac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right|$ superiormente. Sabemos que $f^{(n+1)}(x) = e^x$, e que esta função é crescente no intervalo $[0,1]$. Assim, temos:

$$\left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\right| \leq \frac{3}{(n+1)!}$$

Para termos $|R_n(1)| < 0,000\,001$, basta impormos:

$$\frac{3}{(n+1)!} < 0,000\,001$$

ou seja, que:

$$3\,000\,000 < (n+1)!$$

Tomando $n = 9$, temos $(n+1)! = 10! = 3\,628\,800 > 3\,000\,000$, logo basta tomarmos $n = 9$. Assim, ao aproximarmos e por:

$$P_9(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} = 2.718281526$$

Assim, uma estimativa de e com erro inferior a $0,000\,000\,1 = 10^{-7}$ é 2.71828156.

Observação: com o auxílio de uma calculadora obtemos $|P_9(1) - e| \approx 2.6845904 \times 10^{-7} = 0,000\,000\,268\,459\,04 < 0,\ 000\,001$.

3 Aplicações

Exemplo 20. *Calcular* $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ *com erro inferior a* $0,\ 000\,01 = 10^{-5}$

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[2] Flemming, D.M. e Gonçalves, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6^a edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Finney, Ross L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.**, volume 1/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.

[5] Finney, Ross L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.**, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.