MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
Agenda 16

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

Seja $y = f(x)$ uma função que descreve quantitativamente algum aspecto de certo fenômeno. Por exemplo, y pode ser a distância percorrida por uma partícula até o instante x, ou y pode ser a velocidade de certo corpo em termos de sua posição, x.

Muitas vezes não é possível estabelecer diretamente o tipo de dependência que y guarda de x, mas é possível obter relações de x e de y com as *derivadas* de y até certa ordem.

Da relação estabelecida entre a variável independente, x, com a variável dependente y, e suas derivadas, podemos, em certos casos, determinar *de que modo* y depende de x, ou seja, encontrar uma função f tal que $y = f(x)$.

Nesta agenda, introduziremos noções básicas sobre as chamadas "Equações Diferenciais Ordinárias" (E.D.O.s) de primeira ordem, apresentando alguns métodos de resolução.

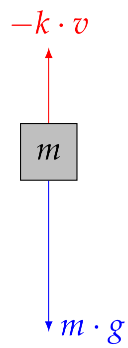
1 Noções sobre Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem

Considere o seguinte problema:

Exemplo 1. *Um corpo de massa m é abandonado de certa altura. Pede-se para estabelecer uma função que descreva como a velocidade do corpo, v, varia conforme o corpo cai, se além da força exercida pela gravidade, age sobre o corpo uma força no sentido oposto do movimento, diretamente proporcional à velocidade do corpo em cada instante.*

*jeancb@ime.usp.br

Solução: Pela segunda lei de Newton,



$$F = m \cdot \frac{dv}{dt},$$

onde $\frac{dv}{dt}$ é a aceleração do corpo (i.e., a derivada da velocidade em função do tempo) e F é a magnitude da força resultante que age sobre o corpo na direção do movimento. A força resultante, por sua vez, provém de duas forças: a força da gravidade, cuja intensidade é $m \cdot g$ (onde g é a aceleração da gravidade) e a força da resistência do ar, cuja magnitude é dada por $-k \cdot v$ – o sinal de menos se deve ao fato de esta força se dar no sentido contrário ao movimento. Desta forma, chegamos à equação:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = m \cdot g - k \cdot v$$

A relação acima conecta a função desconhecida, $v = v(t)$, com sua derivada, $\frac{dv}{dt}$. Temos aqui uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

A seguir apresentamos a definição precisa de EDO de primeira ordem:

Definição 2. *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e:*

$$F : \quad I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \quad \to \quad \mathbb{R}$$

*uma função de três variáveis. Uma **equação diferencial ordinária de primeira ordem** é uma equação da forma:*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0.$$

No problema apresentado no **Exemplo 1**, tem-se:

$$\begin{array}{rccc} F: & [0,\infty[\times\mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (t, v, v'(t)) & \mapsto & m \cdot v'(t) - m \cdot g + k \cdot v(t) \end{array}$$

e a equação é:

$$F(t, v(t), v'(t)) = 0$$

ou seja,

$$m \cdot v'(t) - m \cdot g + k \cdot v(t) = 0$$

ou ainda:

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$$

A questão natural que surge é a seguinte: podemos encontrar uma função $v = v(t)$ que satisfaça:

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)?$$

Em caso afirmativo, como fazê-lo?

Vamos generalizar esta questão na seguinte:

Pergunta: Dada uma equação diferencial ordinária de primeira ordem:

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

onde F é dada nos termos da **Definição 2**, como encontrar uma (ou várias) função (funções) derivável $y : I \to \mathbb{R}$ que satisfaça a questão acima?

Este problema é precisamente o de solucionar uma EDO. Assim, solucionar uma EDO significa encontrar uma função que a satisfaça.

Na imensa maioria das vezes, é impossível encontrar uma solução analítica para uma EDO - caso no qual lançamos mão dos "métodos numéricos" ou, se nos interessar apenas o comportamento da solução, fazemos seu "estudo qualitativo". Estes casos, no entanto, não serão tratados: lidaremos apenas com alguns métodos que nos permitem resolver certas EDOs de primeira ordem, fornecendo-nos soluções dadas analiticamente, seja de modo explícito ou implícito.

Uma EDO em que especificamos uma restrição é denominada um "problema de valor inicial" (PVI), conforme expresso na definição abaixo:

Definição 3 (Problema de Valor Inicial de Primeira Ordem). *Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo e $F : I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função. Um* ***problema de valor inicial****, PVI, é uma equação diferencial,*

$$F(x, y(x), y'(x)) = 0,$$

sujeita a uma condição inicial, dada por uma igualdade da forma:

$$y(x_0) = y_0,$$

onde $x_0 \in I$.

Em nosso **Exemplo** , podemos colocar a condição inicial $v(0) = 0$ (ou seja, assumir que no instante $t = 0$ o corpo que cai estava em repouso). Assim,

$$\begin{cases} m \cdot \dfrac{dv}{dt} - m \cdot g = -k \cdot v \\ v(0) = 0 \end{cases}$$

é um problema de valor inicial de primeira ordem.

2 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem com Variáveis Separáveis

Definição 4. *Sejam $f : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas tais que $(\forall y \in J)(g(y) \neq 0)$. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y), \tag{1}$$

onde o membro da direita é um produto de uma função que depende apenas da variável x por uma função que depende apenas da variável y é uma ***equação diferencial ordinária de variáveis separadas****.*

Uma vez que, por hipótese, para todo $y \in J$ vale $g(y) \neq 0$, podemos reescrever (1) como:

$$\frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} = f(x) \tag{2}$$

A equação é resolvida integrando-se ambos os membros da equação com respeito à variável x:

$$\int \frac{1}{g(y)} \cdot \frac{dy}{dx} dx = \int f(x) dx$$

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx$$

que é uma expressão que relaciona a solução, y, com a variável x (e uma vez que a integral é indefinida, há uma constante arbitrária envolvida também).

Vamos começar a ilustrar a resolução de EDOs de primeira ordem de variáveis separáveis considerando um problema da Física: o decaimento radioativo de núcleos de elementos instáveis.

Dada uma amostra de um elemento radioativo, como saber o número de átomos do elemento da amostra num dado instante t?

Em 1902, enquanto estudava a radioatividade do Tório, Ernest Rutherford (1871-1937) e o químico britânico Frederick Soddy (1877-1956) descobriram que a radioatividade estava associada com alterações no núcleo do átomo, que transformavam o Tório em outro elemento químico. Eles descobriram que o Tório dá origem a outra substância que é intensamente radioativa. A radioatividade, eventualmente, faria o novo elemento desaparecer. Ao analisar este processo, Rutherford e Soddy formularam a **lei do decaimento exponencial**, que nos diz que a taxa de emissão de radioatividade depende, em cada instante, da quantidade presente. Simbolicamente, se t é o instante do tempo e $N(t)$ denota o número de núcleos de uma certa substância radioativa, a **Lei do Decaimento Exponencial** nos diz que existe uma constante $\lambda > 0$ tal que:

$$N'(t) = \frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

Note que podemos escrever a equação acima como:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N$$

que é uma EDO de primeira ordem e de variáveis separáveis. Seja N_0 a quantidade de núcleos de uma amostra radioativa no instante $t = 0$, de modo que temos o PVI:

$$\begin{cases} \dfrac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \\ N(0) = N_0 \end{cases}$$

Para resolvê-lo, primeiramente resolvemos a EDO, primeiramente separando suas variáveis:

$$\frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} = -\lambda$$

Integrando os dois membros com respeito a t, obtemos:

$$\int \frac{1}{N} \cdot \frac{dN}{dt} dt = \int (-\lambda) dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = -\lambda \cdot \int dt = -\lambda \cdot (t + C)$$

$$\ln |N| = -\lambda \cdot t - \lambda \cdot C$$

$$N(t) = e^{-\lambda \cdot t - \lambda \cdot C}$$

$$N(t) = e^{-\lambda \cdot t} \cdot \overbrace{e^{-\lambda \cdot C}}^{=k}$$

$$\therefore N(t) = k \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Se denotarmos por N_0 a quantidade de núcleos da substância no instante inicial, $t = 0$, podemos escrever:

$$N_0 = N(0) = k \cdot e^{-\lambda \cdot 0} = k \cdot 1 = k$$

$$\therefore k = N_0$$

Assim, a solução deste problema de valor inicial (PVI) é:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}$$

Exemplo 5. *Resolver a equação:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{1 + x}$$

Verificamos que:

$$\frac{y}{1 + x} = y \cdot \frac{1}{1 + x},$$

de modo que se trata de uma equação de variáveis separáveis, e podemos escrever:

$$\frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{1}{1+x}$$

Integrando os dois membros da equação acima com respeito à variável x, obtemos:

$$\int \frac{1}{y(x)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{1}{1+x} dx$$

$$\ln|y(x)| = \ln|1+x| + C$$

$$y(x) = e^C \cdot (1+x) = K \cdot (1+x)$$

3 Equações Diferenciais Ordinárias de Primeira Ordem Homogêneas

Definição 6. *Uma função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **homogênea de grau** n se para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ tivermos:*

$$(\forall (x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R})(F(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^n \cdot F(x,y))$$

Exemplo 7. *A função $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$ é homogênea de grau um, uma vez que para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ e para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ vale:*

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \sqrt[3]{(\lambda \cdot x)^3 + (\lambda \cdot y)^2} = \sqrt[3]{\lambda^3 \cdot x^3 + \lambda^3 \cdot y^3} = \sqrt[3]{\lambda^3 \cdot (x^3 + y^3)} =$$

$$= \sqrt[3]{\lambda^3} \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda \cdot \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \lambda \cdot f(x,y)$$

Exemplo 8. *A função $g(x,y) = x \cdot y - y^2$ é homogênea de grau dois, pois para quaisquer que sejam $(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$g(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = (\lambda \cdot x) \cdot (\lambda \cdot y) - (\lambda \cdot y)^2 = \lambda^2 \cdot x \cdot y - \lambda^2 \cdot y^2 = \lambda^2 \cdot (x \cdot y - y^2) =$$

$$= \lambda^2 \cdot g(x,y).$$

Definição 9. *Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função homogênea de grau zero, ou seja, tal que para quaisquer $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ tem-se $f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \lambda^0 \cdot f(x, y) = f(x, y)$. Uma equação diferencial ordinária de primeira ordem da forma:*

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

*é uma **equação diferencial homogênea de primeira ordem**.*

Seja

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

uma EDO homogênea. Sabemos que, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ vale:

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = f(x, y)$$

de modo que para $\lambda = \frac{1}{x}$, temos:

$$f(x, y) = f\left(1, \frac{y}{x}\right),$$

de modo que uma função homogênea de grau zero depende apenas da razão, y/x de seus argumentos. Assim, a equação original corresponde a uma equação da forma:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(1, \frac{y}{x}\right) \tag{3}$$

Fazendo a substituição $u = \frac{y}{x}$ (ou, equivalentemente, $y = u \cdot x$), obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}[u(x) \cdot x] \overset{\substack{\text{Regra do Produto} \\ \uparrow}}{=} u(x) + \frac{du}{dx} \cdot x$$

Substituindo a expressão acima em (3), temos:

$$u(x) + \frac{du}{dx} \cdot x = f(1, u)$$

ou, equivalentemente,

$$\frac{du}{dx} \cdot x = f(1, u) - u,$$

que é uma EDO de variáveis separáveis. Integrando, obtemos:

$$\int \frac{du}{f(1, u) - u} = \int \frac{1}{x} dx + C$$

Após resolver as integrais acima, substituindo-se u por y/x obtém-se a solução.

Exemplo 10. *Resolver:*

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$$

Solução: Observamos, primeiramente, que a função $f(x, y) = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2}$ é tal que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ vale:

$$f(\lambda \cdot x, \lambda \cdot y) = \frac{(\lambda \cdot x) \cdot (\lambda \cdot y)}{(\lambda \cdot x)^2 - (\lambda \cdot y)^2} = \frac{\cancel{\lambda^2} \cdot x \cdot y}{\cancel{\lambda^2} \cdot (x^2 - y^2)} = \frac{x \cdot y}{x^2 - y^2} = f(x, y),$$

de modo que a EDO em apreço é homogênea. Para resolvê-la, primeiramente fazemos $\lambda = \frac{1}{x}$ para obtermos:

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{1}{x} \cdot x, \frac{1}{x} \cdot y\right) = f\left(1, \frac{y}{x}\right) = \frac{1 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)}{1^2 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}$$

Fazemos a mudança de variável $u = \frac{y}{x}$, e obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(u(x) \cdot x\right) = \frac{du}{dx} \cdot x + u = \frac{u}{1 - u^2}$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{u}{1 - u^2} - u\right) = \frac{1}{x} \cdot \left(\frac{u^3}{1 - u^2}\right),$$

que é uma EDO de variáveis separáveis. Escrevemos, então:

$$\frac{1 - u^2}{u^3} \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

e integramos os dois membros com respeito a x, obtendo:

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{1}{x} dx$$

Mas:

$$\int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{1}{u^3} du - \int \frac{1}{u} du = \int u^{-3} du - \int \frac{1}{u} du = -\frac{u^{-2}}{2} - \ln|u|$$

Assim, a equação fica:

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \int \frac{1 - u^2}{u^3} du = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{2u^2} - \ln|u| = \ln|x| + C$$

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln|x| + \ln|u| + C$$

$$-\frac{1}{2u^2} = \ln|u \cdot x| + C$$

Finalmente, voltamos à variável original:

$$-\frac{1}{2 \cdot \left(\frac{y}{x}\right)^2} = \ln\left|\frac{y}{x} \cdot x\right| + C$$

$$-\frac{x^2}{2y^2} = \ln|y| + C.$$

Desta forma, a solução da EDO é dada implicitamente pela equação acima.

4 Equações Diferenciais Ordinárias Lineares de Primeira Ordem

Definição 11. *Sejam $P : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $Q : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas. Uma* ***equação diferencial ordinária linear de primeira ordem*** *é uma equação diferencial que pode ser escrita na forma:*

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y - Q(x) = 0$$

Equivalentemente, uma EDO linear de primeira ordem é uma equação diferencial que pode ser escrita na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x), \tag{4}$$

denominada ***forma padrão****.*

Para resolver (4), vamos supor que a solução seja da forma:

$$y = u(x) \cdot v(x), \tag{5}$$

sendo uma delas arbitrária e a outra por determinar. Derivando os dois membros de (5), obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = u(x) \cdot \frac{dv}{dx} + v(x) \cdot \frac{du}{dx}$$

Substituindo a expressão acima em (4), obtemos:

$$u(x) \cdot \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dx} \cdot v(x) + P(x) \cdot u(x) \cdot v(x) = Q(x)$$

ou, equivalentemente,

$$u(x) \cdot \left(\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v(x) \right) + v(x) \cdot \frac{du}{dx} = Q(x) \tag{6}$$

Vamos escolher $v(x)$ tal que:

$$\frac{dv}{dx} + P(x) \cdot v(x) = 0 \tag{7}$$

Separando as variáveis da equação (7), obtemos:

$$\frac{1}{v(x)} \frac{dv}{dx} = -P(x)$$

Integrando os dois membros com respeito a x, obtemos:

$$\int \frac{1}{v(x)} \frac{dv}{dx} dx = -\int P(x) dx$$

$$\ln |v(x)| = -\int P(x) dx$$

$$\therefore v(x) = e^{-\int P(x) dx}$$

Substituindo $v(x)$ em (6), tem-se:

$$v(x) \cdot \frac{du}{dx} = Q(x)$$

$$\frac{du}{dx} = \frac{Q(x)}{v(x)}$$

Logo,

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C$$

$$u(x) = \int \frac{Q(x)}{v(x)} dx + C = \int \frac{Q(x)}{e^{-\int P(x) dx}} dx + C$$

$$u(x) = \int Q(x) \cdot e^{\int P(x) dx} dx + C$$

Assim, assumindo que exista, a solução geral da equação:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

é, portanto,

$$y(x) = u(x) \cdot v(x) = \left(\int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \right) \cdot e^{-\int P(x)dx}$$

ou seja,

$$\boxed{y(x) = e^{-\int P(x)dx} \cdot \int Q(x) \cdot e^{\int P(x)dx} dx + C \cdot e^{-\int P(x)dx} \qquad (8)}$$

Você não precisa memorizar a fórmula acima, porém, deve lembrar-se do termo especial:

$$\mu(x) = e^{\int P(x)dx},$$

pois ele será usado em uma maneira mais simples, embora equivalente, de resolver (4): multiplicando os dois membros de (8) por $\mu(x)$, obtemos:

$$e^{\int P(x)dx} \cdot y(x) = \int e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x) dx + C \tag{9}$$

Derivando os dois membros de (9), obtemos:

$$\frac{d}{dx} \left[e^{\int P(x)dx} \cdot y(x) \right] = e^{\int P(x)} dx \cdot Q(x)$$

ou seja,

$$e^{\int P(x)dx} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot e^{\int P(x)dx} \cdot y(x) = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x) \tag{10}$$

$$\cancel{e^{\int P(x)dx}} \cdot \left(\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y(x) \right) = \cancel{e^{\int P(x)dx}} \cdot Q(x)$$

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y(x) = Q(x)$$

Roteiro para Resolver uma EDO Linear de Primeira Ordem da forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y(x) - Q(x) = 0$$

(i) Colocar a equação na forma:

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y(x) = Q(x)$$

(ii) Multiplicar os dois membros da equação por $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$

(iii) O membro esquerdo da equação resultante será automaticamente a derivada do produto de $\mu(x)$ por $y(x)$:

$$\frac{d}{dx}\left[e^{\int P(x)dx} \cdot y(x)\right] = e^{\int P(x)dx} \cdot Q(x)$$

(iv) Integrar os dois membros da equação.

Exemplo 12. *Resolver:*

$$m \cdot v'(t) = m \cdot g - k \cdot v(t)$$

Solução: De acordo com o passo (i), colocamos a equação na forma padrão:

$$v'(t) + \frac{k}{m} \cdot v(t) = g$$

Seguindo o passo (ii), identificamos $P(t) = \frac{k}{m}$, de modo que $\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\frac{k}{m} \cdot t}$. Em seguida, multiplicamos ambos os membros da equação em sua forma padrão por $\mu(t) = e^{\frac{k}{m} \cdot t}$:

$$e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot v'(t) + \frac{k}{m} \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot v(t) = g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t}$$

Pelo passo (iii), observamos que o membro da esquerda é a derivada do produto de $\mu(t)$ por $y(t)$:

$$\frac{d}{dt}\left[e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot v(t)\right] = g \cdot e^{\frac{k}{m} \cdot t}$$

e integramos ambos os membros, obtendo:

$$\int \frac{d}{dt}\left[e^{\frac{k}{m} \cdot t} \cdot v(t)\right] dt = g \cdot \int e^{\frac{k}{m} \cdot t} dt$$

$$e^{\frac{k}{m}\cdot t}\cdot v(t)=g\cdot\left(\frac{m}{k}\cdot e^{\frac{k}{m}\cdot t}+C\right)$$

$$v(t)=\frac{m\cdot g}{k}+C\cdot g\cdot e^{-\frac{k}{m}\cdot t}$$

Exemplo 13. *Resolver:*

$$\frac{dy}{dx}-3y=6$$

Solução: A equação acima já se encontra na forma padrão, então procedemos ao passo (ii). Identificamos $P(x)=-3$ e multiplicamos os dois membros da equação por $\mu(x)=e^{\int -3dx}=e^{-3x}$:

$$e^{-3x}\cdot\left(\frac{dy}{dx}-3y\right)=e^{-3x}\cdot 6$$

De acordo com o passo (iii), observamos que o membro esquerdo resultante será a derivada de $\mu(x)$ por $y(x)$:

$$e^{-3x}\cdot\frac{dy}{dx}-3\cdot e^{-3x}\cdot y=e^{-3x}\cdot 6$$

$$\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}\cdot y(x)\right)=6\cdot e^{-3x}$$

De acordo com o passo (iv), integramos os dois membros da equação acima:

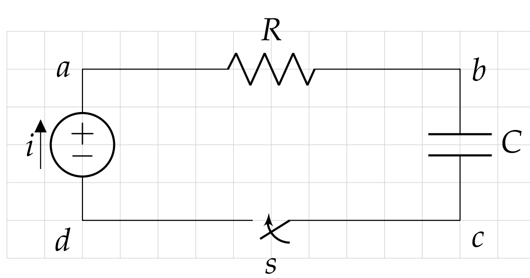
$$\int\frac{d}{dx}\left(e^{-3x}\cdot y(x)\right)dx=6\cdot\int e^{-3x}dx=6\cdot\left[-\frac{e^{-3x}}{3}+C\right]=-2\cdot e^{-3x}+6\cdot C$$

$$e^{-3x}\cdot y(x)=-2\cdot e^{-3x}+6\cdot C$$

$$y(x)=-2+6\cdot C\cdot e^{3x}$$

$$y(x)=-2+c\cdot e^{3x}$$

Exemplo 14. *Considere o seguinte circuito RC:*



*No instante $t = 0$ o capacitor está descarregado e a chave s é ligada. Pela **Lei de Ohm**, temos $U_{ab} = R \cdot i = R \cdot \frac{dq}{dt}$. Pela **Lei de Faraday**, $U_{bc} = \frac{q}{C}$. Finalmente, $U_{cd} = 0$ e $U_{da} = -V$.*

*Aplicando a **Segunda Lei de Kirchoff**, concluímos que:*

$$U_{ab} + U_{bc} + U_{cd} + U_{da} = 0$$

e portanto:

$$R \cdot \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} + (-V) = 0$$

Chegamos, portanto, à equação:

$$\boxed{\frac{dq}{dt} + \frac{1}{R \cdot C} \cdot q = \frac{V}{R}}$$

que é uma EDO linear de primeira ordem, já apresentada na sua forma padrão. Deduzir de que modo se relacionam a carga, q, armazenada no capacitor, com o instante t, desde que a chave s foi ligada.

Solução: Neste caso temos uma equação juntamente com uma restrição ($q(0) = 0$), ou seja, temos um PVI. Para resolvê-lo, solucionamos primeiramente a EDO.

A equação já está em sua forma padrão, por isto podemos começar pelo passo (ii): identificamos $P(t) = \frac{1}{R \cdot C}$, de modo que $\mu(t) = e^{\int P(t)dt} = e^{\int \frac{1}{R \cdot C}dt} = e^{\frac{t}{R \cdot C}}$. No passo (iii), multiplicamos os dois membros da equação original por $\mu(t)$, obtendo:

$$e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \frac{dq}{dt} + e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \frac{1}{R \cdot C} \cdot q = e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot \frac{V}{R}$$

Observamos, então, que o membro esquerdo da equação acima é:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot q(t)\right)$$

A equação a ser resolvida é, portanto:

$$\frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot q(t)\right) = \frac{V}{R} \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}}$$

Integrando os dois membros na variável t, obtemos:

$$\int \frac{d}{dt}\left(e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot q(t)\right) dt = \frac{V}{R} \cdot \int e^{\frac{t}{RC}} dt = \frac{V}{\cancel{R}} \cdot (\cancel{R} \cdot C) \cdot (e^{\frac{t}{R \cdot C}} + k) = V \cdot C \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} + V \cdot C \cdot k$$

$$e^{\frac{t}{R \cdot C}} \cdot q(t) = V \cdot C \cdot e^{\frac{t}{R \cdot C}} + V \cdot C \cdot k$$

$$\therefore q(t) = V \cdot C \cdot (1 + k \cdot e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

Para determinar k, vamos utilizar o fato de que no intante $t = 0$ a carga é nula, ou seja, $q(0) = 0$. Assim, obtemos:

$$0 = q(0) = V \cdot C \cdot (1 + k \cdot e^{-\frac{0}{R \cdot C}}) = V \cdot C \cdot (1 + k)$$

Mas $V \cdot C \cdot (1 + k) = 0$ ocorre se, e somente se, $k = -1$. Assim, a solução deste PVI é:

$$q(t) = V \cdot C \cdot (1 - e^{-\frac{t}{R \cdot C}})$$

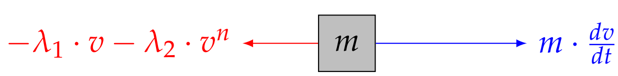
4.1 Equações de Bernoulli

Considere o fenômeno do movimento de um corpo de massa m em um meio cuja resistência, F, depende da velocidade do corpo: $F = \lambda_1 \cdot v + \lambda_2 \cdot v^n$. A equação do movimento assume, então, a forma:

$$m \cdot \frac{dv}{dt} = -\lambda_1 \cdot v - \lambda_2 \cdot v^n,$$

ou:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda_1}{m} \cdot v = -\frac{\lambda_2}{m} \cdot v^n$$



Deste problema segue a:

Definição 15. *Sejam $P : I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $Q : J \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas, $n \neq 0, n \neq 1$. Uma **equação diferencial ordinária de Bernoulli** é uma equação da forma:*

$$\frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y = Q(x) \cdot y^n$$

Para resolver esta equação, dividimos seus dois membros por y^n, e obtemos:

$$\frac{1}{y^n} \cdot \frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{-(n-1)}} \cdot P(x) = Q(x)$$

$$y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx} + P(x) \cdot y^{-n+1} = Q(x) \tag{11}$$

Na sequência, fazemos a substituição:

$$z = y^{-n+1}$$

de modo que:

$$\frac{dz}{dx} = (-n+1) \cdot y^{-n} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Substituindo $\frac{dz}{dx}$ em (11), obtemos:

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1) \cdot P(x) \cdot z = (-n+1) \cdot Q(x),$$

que, por sua vez, é uma equação diferencial ordinária linear de primeira ordem – que vimos como resolver na seção anterior.

Ao final da resolução, retornamos à variável original fazendo $z = y^{-n+1}$.

Exemplo 16. *Resolver a EDO:*

$$x \cdot \frac{dy}{dx} + y = x^2 \cdot y^2$$

Primeiramente, reescrevemos a equação como:

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x} \cdot y = x \cdot y^2$$

Como $n = 2$, fazemos a mudança de variável $y = u^{-1}$, obtendo pela **Regra da Cadeia**,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{u^2} \cdot \frac{du}{dx}$$

e substituímos na EDO, obtendo:

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x} \cdot u = -x$$

O fator integrante desta equação em, digamos $]0, \infty[$, é:

$$e^{-\int \frac{1}{x} dx} = e^{-\ln(x)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \frac{1}{x}$$

Integrando ambos os membros de:

$$\frac{d}{dx}[x^{-1} \cdot u] = -1,$$

obtemos:

$$x^{-1} \cdot u = -x + C \cdot x$$

Como $u = \frac{1}{y}$, segue que:

$$\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{y} = -x + C$$

$$\therefore y(x) = \frac{1}{-x^2 + C \cdot x}$$

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo: Funções de Uma Variável**, Volume 1, 4^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 1981.

[2] Flemming, D.M. e Gonçalves, M. B., **Cálculo: Funções, limite, derivação e integração**, 6^a edição revista e ampliada. Editora Pearson Prentice Hall, São Paulo, 2006.

[3] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[4] Finney, Ross L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.**, volume 1/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.

[5] Finney, Ross L. **Cálculo de George B. Thomas Jr.**, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo: Addison Wesley, 2003.

[6] Rutherford's Nuclear Model, https://www.britannica.com/science/atom/Rutherfords-nuclear-model, acesso em 30/6/2021.

[7] Zill, D. G. **Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem**; tradução: Cyro de Carvalho Patarra; revisão técnica: Antônio Luiz Pereira. Editora Pioneira Thomson Learning, 2003.