MAT2456 - CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL IV
2^o SEMESTRE DE 2022
AGENDA 03

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nas agendas anteriores pudemos nos familiarizar com sequências e séries infinitas de números reais. A ideia de definir funções através de séries, ou de se exprimir funções como séries, surge naturalmente — até já fizemos isto. Consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} f: &]-1,1[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

Vimos, na agenda anterior, que sempre que $|x| < 1$, tem-se $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \dfrac{1}{1-x}$, de modo que podemos escrever a seguinte igualdade:

$$(\forall x \in]-1,1[) \left(f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \right)$$

Ao estudar o comportamento das $p-$séries, vimos que sempre que $p > 1$, a série $\sum \frac{1}{n^p}$ converge. Desta forma, podemos definir a seguinte função:

$$\begin{array}{rccc} \zeta: &]1,\infty[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \end{array}$$

conhecida como "função zeta de Riemann".

Vamos convencionar a seguinte notação: dado $X \subset \mathbb{R}$, escreveremos:

*jeancb@ime.usp.br

$$\mathcal{F}(X,\mathbb{R}) = \{X \xrightarrow{f} \mathbb{R} \mid f \text{ função}\}$$

para denotar o conjunto de todas as funções de domínio X e contradomínio $\mathbb{R}$.

Munidos desta notação, vamos generalizar o conceito de sequência numérica para "sequência de funções": uma sequência de funções será, simplesmente, uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathcal{F}(X,\mathbb{R})$:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & f_n : X \to \mathbb{R} \end{array}$$

Naturalmente, a notação para uma sequência de funções será $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$, $(f_0(x), f_1(x), f_2(x), \cdots, f_n(x), \cdots)$ ou $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, onde colocamos este x depois do f apenas para nos lembrarmos de que cada termo desta sequência é uma função (de variável x).

Dada uma sequência de funções, $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$, podemos definir a série que lhe é associada, a sequência das somas parciais:

$$(f_0(x), f_0(x) + f_1(x), f_0(x) + f_1(x) + f_2(x), \cdots, \underbrace{f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_n(x)}_{\sum_{i=0}^{n} f_i(x)}, \cdots)$$

que denotaremos por:

$$\left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n\in\mathbb{N}} \quad \text{ou} \quad \sum f_n(x)$$

Note que para cada $x_0 \in X$, temos uma série numérica, qual seja, $\sum f_n(x_0)$, que pode convergir ou divergir. O conjunto dos pontos de X tais que a série $\sum f_n(x)$ converge é denominado **domínio de convergência**, e será denotado por:

$$\mathrm{Conv}\,(f) \subset X = \{x \in X \mid \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \text{ converge}\}$$

Podemos, desta forma, definir neste conjunto uma função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{Conv}\,(f) \subset X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \end{array}$$

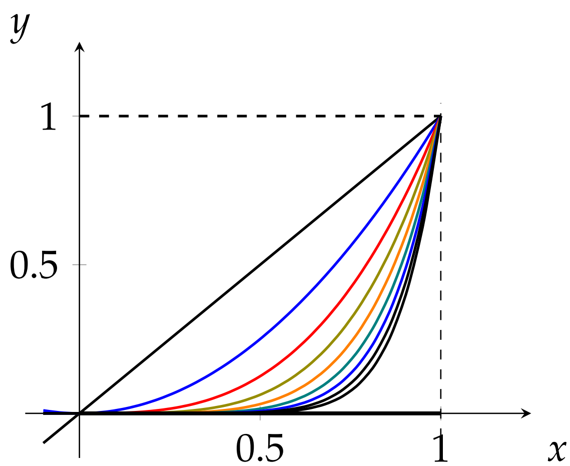
Observando que toda série de funções é, por definição, uma sequência de funções, tem-se que, dada uma sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc), pelo fato de a soma finita de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc) ser contínua (diferenciável etc), a série associada, que é a sequência de somas finitas, $(\sum_{i=0}^{n} f_i)_{n\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc). Surge, naturalmente, o questionamento: será que a função definida por meio de uma série de funções contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc) é, novamente, contínua (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc)?

Vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 1. *Consideremos a seguinte sequência de funções:*

$$\begin{array}{rccc} s: & \mathbb{N} & \to & \mathcal{F}([0,1],\mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & \begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^n \end{array} \end{array}$$

cujos gráficos estão esboçados abaixo:



Cada uma dessas funções contínua (na verdade, de classe $\mathcal{C}^\infty$ em $[0,1]$). Notamos que para qualquer $x \in [0,1[$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$$

mas que para $x = 1$,

$$\lim_{n\to\infty} 1^n = 1$$

Desta forma, ponto a ponto, concluímos que a sequência de funções contínuas $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, & se\ x \in [0,1[\\ 1, & se\ x = 1 \end{cases} \end{array}$$

que é descontínua em 1, pois $\lim_{x\to 1_-} f(x) = 0 \neq 1 = f(1)$.

O exemplo acima nos mostra que nem sempre o limite de uma sequência de funções contínuas é contínua (ou diferenciável etc). Nesta agenda, apresentaremos o conceito de convergência uniforme, que quando válida, nos garante que a função-limite herda propriedades dos termos da sequência (como continuidade, diferenciabilidade etc). Veremos, em particular, resultados que garantem a convergência uniforme de certas séries de funções (como o **Teste M de Weierstrass**), e estes resultados nos permitirão operar com séries como se fossem somas finitas de funções no que diz respeito à derivação e à integração.

Motivados pela fórmula de Taylor, vamos introduzir as séries de potências, e veremos que, a depender do caso, tais séries convergem uniformemente, o que nos permite integrá-las e derivá-las termo a termo, servindo posteriormente para resolver certos tipos de equações diferenciais ordinárias.

1 Séries de Funções

Definição 2 (**$n-$ésima soma parcial**). *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de mesmo domínio, $X \subset \mathbb{R}$. A **$n-$ésima soma parcial de** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a função:*

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x)$$

Observe que se todas as funções do conjunto $\{f_n : X \to \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$ forem contínuas (diferenciáveis, de classe $\mathcal{C}^k$ etc), então a $n-$ésima soma parcial destas funções também será contínua (diferenciável, de classe $\mathcal{C}^k$ etc).

Exemplo 3. *Dada a sequência de funções $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $f_n(x) = x^n$, a $n-$ésima soma parcial é:*

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} x^i = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n \overset{\text{soma da PG}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{(1-x^{n+1})}{1-x}$$

Definição 4 (**série de funções**). *Seja $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})^{\mathbb{N}}$ uma sequência de funções de mesmo domínio, $X \subset \mathbb{R}$. A **série de funções associada a** $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é a sequência das $n-$ésimas somas parciais de $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, ou seja:*

$$\sum f_n(x) = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} f_i(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Exemplo 5. *A série associada à sequência dada no **Exemplo 3** é a sequência das somas parciais:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}} = \left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1-x^{n+1}}{1-x}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

onde $x \in [0,1]$.

2 Convergência Pontual e Uniforme

Nesta seção vamos apresentar dois tipos de convergência de sequências (e, portanto, também de séries) de funções: a convergência pontual e a uniforme.

Definição 6 (convergência pontual). *Seja* $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções de* X *em* $\mathbb{R}$. *Dizemos que* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***converge pontualmente em** X **para*** $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *se, e somente se, para todo* $x_0 \in X$, *a sequência numérica* $(f_n(x_0))_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para* $f(x_0)$.

Exemplo 7. *A sequência* $(f_n : [0,1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = x^n$ *converge pontualmente para* $f(x) = \begin{cases} 0, & se\ x \in [0,1[\\ 1, & se\ x = 1 \end{cases}$.

Como toda série é uma sequência, temos a seguinte definição, que nada mais é do que um caso particular da definição anterior:

Definição 8 (convergência pontual de uma série de funções). *uma série de funções,* $\sum f_n(x) = (s_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x), x \in X \subset \mathbb{R}$ *converge pontualmente se, para cada* x_0 *fixado no domínio, a série numérica* $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ *convergir.*

Exemplo 9. *A série* $\left(\sum_{i=0}^{n} x^i\right)_{n\in\mathbb{N}}$, *onde* $x \in [0,1[$, *converge pontualmente para:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

De fato, dado qualquer $x_0 \in [0,1[$, *temos:*

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} x_0^i = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x_0^{n+1}}{1-x_0} = \frac{1}{1-x_0} = f(x_0)$$

Equivalentemente, uma série $\sum f_n(x)$ *converge pontualmente* se ela (enquanto sequência numérica) for de Cauchy (já que estamos trabalhando em $\mathbb{R}$, que é completo). Isto quer dizer que ela converge pontualmente se, para cada $x_0 \in I$ for verdadeiro que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon, x_0) \in \mathbb{N}$ tal que para $m > n > n_0(\varepsilon, x_0)$ tenha-se:

$$|s_m(x_0) - s_n(x_0)| < \varepsilon \Rightarrow \left| \sum_{i=1}^{m} f_i(x_0) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \right| < \varepsilon$$

Exemplo 10. *A série de funções $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n^2}$, com $x \in [0,1]$, converge pontualmente, pois é fato que para qualquer $x_0 \in [0,1]$, temos:*

$$\frac{x_0}{n^2} < \frac{1}{n^2}$$

Vimos, na Agenda 2, *que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ é convergente (por ser uma $p-$série com $p = 2 > 1$), e portanto, para cada $x_0 \in [0,1]$:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_0}{n^2}$$

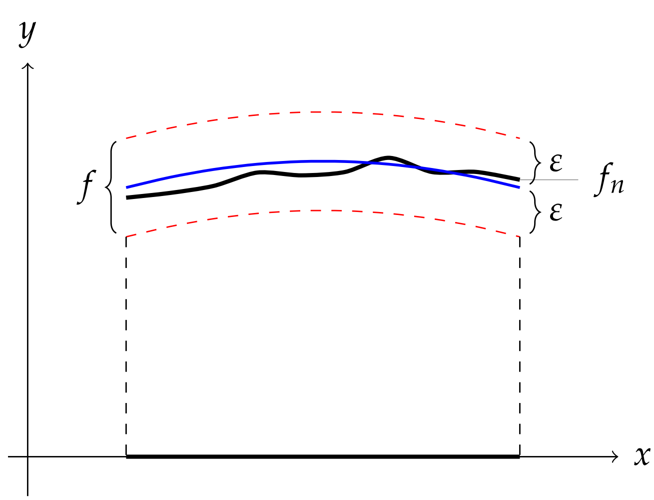
converge. Assim, a série $\sum \frac{x}{n^2}$ converge pontualmente em qualquer $x \in [0,1]$.

Definição 11 (convergência uniforme). *Sejam $(f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções e $f : X \to \mathbb{R}$ uma função fixada. Dizemos que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$* ***converge uniformemente para*** *f se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ pudermos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in X)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

Notação: *$f_n \xrightarrow{u} f$.*

Note que, para que ocorra a convergência uniforme, devemos poder aproximar *todos* os pontos dos gráficos das funções $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, tanto quanto queiramos, do gráfico de f. Isto quer dizer que dado $\varepsilon > 0$, devemos ser capazes de encontrar um índice $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para *qualquer* $x \in X$ tenhamos $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Observe a figura abaixo:



Exemplo 12. *Considere a sequência de funções* $(f_n : \left[0, \frac{1}{2}\right] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = x^n$. *Veremos que* $f_n \xrightarrow{u} 0$, *a função identicamente nula.*

De fato, observamos que para todo $n \in \mathbb{N}$, *para todo* $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ *temos* $f_n(x) \le f_n\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^n}$.

Dado $\varepsilon > 0$, *basta portanto tomarmos* $n_0(\varepsilon) = \lceil \log_2(1/\varepsilon) \rceil$, *e teremos:*

$$n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]) \left(\left| x^n - 0 \right| = x^n < \frac{1}{2^n} < \varepsilon \right)$$

Assim, $f_n \xrightarrow{u} 0$.

Observação 13. *O que significa uma sequência de funções,* $(f_n : X \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ ***não convergir uniformemente para*** $f : X \to \mathbb{R}$? *Significa que não ocorre o seguinte:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \ge n_0(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in X)(|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon))$$

Negar que "para qualquer que seja $\varepsilon > 0$*" vale certa condição é dizer que existe pelo menos um* $\varepsilon_0 > 0$ *tal que a condição não é válida.*

Por sua vez, negar que existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *a partir do qual tem-se uma condição equivale a dizer que nenhum número natural satisfaz aquela condição, ou seja, dizer que para todo número natural,* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $x_n \in X$ *que "fura" a condição dada. Mas dizer que "* x_n *fura" a condição:*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| < \varepsilon$$

equivale a dizer que:

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon_0$$

Assim, $f_n \stackrel{u}{\not\to} f$ *(*f_n *não converge uniformemente para* f*) significa que* ***existe*** $\varepsilon_0 > 0$ *tal que, para qualquer número natural,* $n \in \mathbb{N}$, *existe* $x_n \in X$ *satisfazendo:*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon_0$$

Assim,

$$f_n \stackrel{u}{\not\to} f \iff (\exists \varepsilon_0 > 0)((\forall n \in \mathbb{N})(\exists x_n \in X)(|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon_0))$$

Exemplo 14. *A sequência de funções* $(f_n : [0, 1] \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ *dada por* $f_n(x) = \frac{n \cdot x}{1+n^2 \cdot x^2}$ *converge pontualmente para* $f(x) \equiv 0$.

Note que, fixado $x_0 \in [0,1]$, temos:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} \frac{n \cdot x_0}{1 + n^2 \cdot x_0^2} = x_0 \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{n}{1 + n^2 \cdot x_0^2} = 0$$

de modo que a sequência converge pontualmente para a função identicamente nula.

Vamos demonstrar que, no entanto, a sequência não *converge uniformemente em $[0,1]$ para $f(x) \equiv 0$.*

Para fazer isto, deveremos exibir um número $\varepsilon_0 > 0$ tal que, a partir de certo índice, $n_0 \in \mathbb{N}$ sempre exista um ponto $x_n \in [0,1]$ tal que $|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$.

De fato, vamos buscar os pontos críticos de cada f_n. Para isto, devemos resolver a equação:

$$f_n'(x) = 0,$$

ou seja,

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{n \cdot x}{1 + n^2 \cdot x^2}\right) = \frac{(1 + n^2 \cdot x^2) \cdot n - n \cdot x \cdot (2 \cdot n^2 \cdot x)}{(1 + n^2 \cdot x^2)^2} = \frac{n \cdot (1 + n^2 \cdot x^2 - 2n^2 \cdot x^2)}{(1 + n^2 \cdot x^2)^2} =$$

$$= n \cdot \frac{1 - n^2 \cdot x^2}{1 + n^2 \cdot x^2} = 0$$

A igualdade ocorre se, e somente se, $1 - n^2 \cdot x^2 = 0$, ou seja, se, e somente se, $x = \pm\frac{1}{n}$.

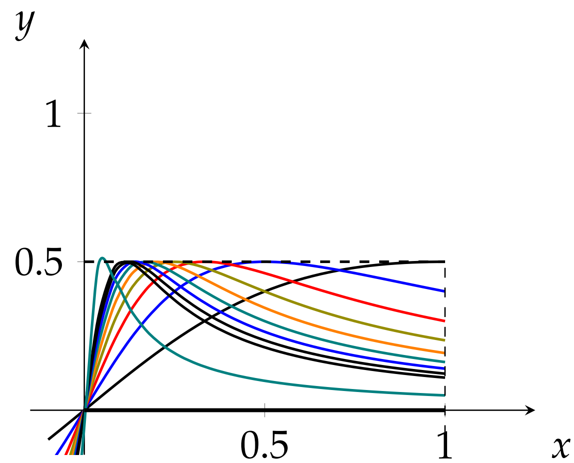
Pelo teste da derivada segunda, verificamos que $\frac{1}{n}$ é ponto de máximo de $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$. De fato,

$$f_n''(x) = n \cdot \frac{\left(-2n^2 x\right)\left(1 + n^2 x^2\right) - 2n^2 x\left(1 - n^2 x^2\right)}{\left(1 + n^2 x^2\right)^2}$$

de modo que:

$$f_n''\left(\frac{1}{n}\right) = n \frac{\left(-2n^2\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2\right) - 2n^2\left(\frac{1}{n}\right)\left(1 - n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)}{\left(1 + n^2\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)^2} = -4 \cdot n < 0$$

Veja abaixo alguns termos da sequência $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$



Observamos que:

$$f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n \cdot \frac{1}{n}}{1 + n^2 \cdot \frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Deste modo, dado $\varepsilon_0 = \frac{1}{4}$*, sempre teremos, para cada* $n > 2$*, o fato de que:*

$$\left| f_n\left(\frac{1}{n}\right) - 0 \right| = \left| \frac{n \cdot \left(\frac{1}{n}\right)}{1 + n^2 \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^2} - 0 \right| = \frac{1}{2} \geq \varepsilon_0 = \frac{1}{4}$$

ou seja, para todo $n \in \mathbb{N}$ *com* $n > 2$ *haverá* $x_n = \frac{1}{n} \in [0, 1]$ *tal que:*

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq \frac{1}{4}$$

e portanto a convergência não é uniforme.

Apresentamos, agora, uma importante caracterização da convergência uniforme para uma sequência de funções:

Proposição 15. *Seja* $(f_n : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções e* $f : X \to \mathbb{R}$ *uma função. Então:*

$$f_n \xrightarrow{u} f \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(m > n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in X)(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon))$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $f_n \xrightarrow{u} f$, dado $\varepsilon > 0$, para $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon/2)$, então $(\forall x \in X)\left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ tais que $m > n \geq n_0(\varepsilon/2)$, tem-se, portanto, para todo $x \in X$ vale:

$$|f_m(x) - f_n(x)| = |f_m(x) - f(x) + f(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ou seja,

$$(\forall x \in X)(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$$

($\Leftarrow$) Suponhamos que para qualquer $\varepsilon > 0$ exista $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m > n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in X)(|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon)$. Tem-se, então, que para qualquer $x_0 \in X$, a sequência numérica $(f_n(x_0))_{n \in \mathbb{N}}$ é de Cauchy, e portanto converge para algum valor $f(x_0) \in \mathbb{R}$, digamos.

Se a convergência não fosse uniforme, existira $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existiria $x_n \in X$ tal que:

$$|f_m(x_n) - f(x_n)| \geq \varepsilon_0$$

o que contrariaria o fato de a sequência $(f_m(x_n))_{m \in \mathbb{N}}$ convergir para $f(x_n)$ — um absurdo. Este absurdo vem de se supor que a convergência não era uniforme. Conclui-se, assim, que a convergência é, de fato, uniforme. □

Na verificação da convergência uniforme da série dada no **Exemplo 12**, usamos a estratégia de majorar a sequência de funções por uma sequência numérica convergente. É esta a ideia subjacente ao chamado **Teste** M **de Weierstrass**, que garante, sob certas condições, a convergência uniforme de certas séries de funções.

Este critério, como veremos, garante não somente a convergência uniforme, mas também a convergência absoluta (isto é, que a série dos valores absolutos converge).

Teorema 16 (Teste M de Weierstrass:). *Seja* $(f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de funções reais,* $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *uma sequência de números reais satisfazendo:*

$$(\forall x \in I)(|f_n(x)| \leq M_n)$$

onde $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ *é uma série numérica convergente. Então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

converge uniforme e absolutamente em I.

Demonstração. O teste da comparação garante que, fixado qualquer $x_0 \in I$, a série numérica:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$$

converge. Logo, a convergência pontual está assegurada, de modo que para cada $x_0 \in I$, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) \in \mathbb{R}$. Vamos escrever $f(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$.

Afirmamos que $\sum f_n$ converge uniformemente para:

$$\begin{array}{rcl} f: I & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \end{array}$$

Seja $\varepsilon > 0$ fixado. Da convegência de $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$, segue que esta é uma sequência de Cauchy, de modo que existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tal que:

$$m > n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{i=n}^{m} M_i \right| < \varepsilon$$

Logo:

$$(\forall x \in I) \left(\sum_{i=n}^{m} f_i(x) \leq \left| \sum_{i=n}^{m} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n}^{m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n}^{m} M_i < \varepsilon \right)$$

de modo que, pela **Proposição 15**, $(\sum_{i=0}^{n} f_i)_{n \in \mathbb{N}}$ converge uniformemente.

$\square$

O critério acima é muito útil, pois reduz o problema de verificar a convergência uniforme de uma *série de funções* ao problema de verificar a convergência de uma série numérica, o que já sabemos como fazer. Veremos, a seguir, o que torna a convergência uniforme tão importante.

Lema 17. *Seja $(f_n : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções contínuas definidas num conjunto $I \subset \mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f : I \to \mathbb{R}$. Então f é contínua.*

Demonstração. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, tem-se, para qualquer $x \in I$:

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| \quad (1) \end{aligned}$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer.

Como $f_n \xrightarrow{u} f$, existe $n_0(\varepsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que $n > n_0(\varepsilon/3)$ implica:

$$(\forall x \in [a,b])\left(|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

e, em particular,

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como, por hipótese, f_n é contínua, em particular em x_0, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_n(x) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n = n_0(\varepsilon/3) + 1$, onde $n_0(\varepsilon/3)$ foi construído acima, tomando $\delta > 0$ (oriundo da continuidade de f_n em x_0), teremos:

$$\begin{aligned}|f(x) - f(x_0)| &= |f(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - f(x_0)| \leq \\ &\leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon\end{aligned}$$

Concluímos, portanto, que para todo $\varepsilon > 0$ é possível construir $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

ou seja, f é contínua em x_0. Como x_0 é arbitrário, segue que f é contínua em I. □

O **Lema 17** nos permite afirmar que, sempre que $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções contínuas, $f_n \xrightarrow{u} f$ e $x_0 \in I$, podemos "comutar os limites":

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right) = \lim_{x\to x_0}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) \tag{2}$$

Proposição 18. *Suponha que as funções $f_n(x)$ sejam contínuas e que a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente. Então a soma da série $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ também é uma função contínua*

Demonstração. Seja $x_0 \in I$. O resultado é evidente se x_0 for um ponto isolado de I. Se, todavia, x_0 for um ponto de acumulação de I, por (2) podemos escrever :

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i(x) = \lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}\sum_{i=1}^{\infty} f_n(x) =$$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0) = f(x_0)$$

Logo, f é contínua para qualquer $x_0 \in I$, e segue o resultado. □

A proposição acima tem uma história interessante: em 1821, em seu *Course d'Analyse* (pp. 131 e 132), Cauchy enunciou e "demonstrou" (incorretamente, hoje sabemos), um resultado que dizia que a soma de qualquer série de funções contínuas era, novamente, uma função contínua (sem requerer a convergência uniforme, conceito que não estava disponível na época). Em 1826, Abel argumentou, usando a série:

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{\sin(nx)}{n}$$

que converge para a função periódica de período 2π que em $]-\pi,\pi[$ é igual a $f(x)=\frac{x}{2}$. Abel observou que apesar de cada termo da série acima ser coninúo, a função para a qual esta converge é descontínua (descontinuidade de salto) em pontos da forma $k\cdot\pi$, com $k\in\mathbb{Z}$. O conceito de convergência uniforme só seria introduzido em 1838, pelo matemático alemão Christof Gudermann.

Lema 19. *Se uma sequência de funções contínuas $(f_n:[a,b]\to\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, então f é integrável e vale:*

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

Demonstração. Dado $\varepsilon>0$ existe $n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ tal que $n>n_0\Rightarrow|f_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$ para todo $x\in[a,b]$, e portanto:

$$\left|\int_a^b f(x)dx-\int_a^b f_n(x)dx\right|=\left|\int_a^b[f(x)-f_n(x)]dx\right|\leq\int_a^b|f(x)-f_n(x)|dx<\varepsilon$$

para todo $n>n_0(\varepsilon)$, de onde segue o resultado. □

Proposição 20. ***[Integração termo a termo]*** *Suponha que as funções $(f_n:I\to\mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de funções integráveis em um intervalo $I\subset\mathbb{R}$ e que a série $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ convirja uniformemente. Então:*

$$\int_I\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\int_I f_n(x)dx$$

Em outras palavras, é permitido integrar termo a termo uma série uniformemente convergente.

Demonstração. De fato,

$$\int_I\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)\right)dx=\int_I\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}f_j(x)\right)dx$$

Como a convergência é uniforme, segue do Lema 19 que:

$$\int_I \left(\lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} f_j(x) \right) dx = \lim_{n\to\infty} \int_I \sum_{j=1}^{n} f_j(x) dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_I f_j(x) dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_I f_n(x)$$

$\square$

Teorema 21. *Seja (f_n) uma sequência de funções deriváveis no intervalo $[a,b]$. Se, para um certo $c \in [a,b]$ a sequência numérica $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e se as derivadas f'_n convergem uniformemente em $[a,b]$ para uma função h, então (f_n) converge uniformemente em $[a,b]$ para uma função derivável f, tal que $f' = h$.*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado.

Como $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m > n > n_1(\varepsilon) \Rightarrow |f_m(c) - f_n(c)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Sabemos que $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uniformemente convergente, então dado $\varepsilon > 0$ existe $n_2(\varepsilon)$ tal que:

$$m > n > n_2(\varepsilon) \Rightarrow (\forall x \in [a,b]) \left(|f_m(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} \right)$$

Dados $m, n \in \mathbb{N}$ quaisquer, como a função $f_m - f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ é diferenciável, pelo **Teorema do Valor Médio** existe ξ entre x e c tal que:

$$\begin{aligned} & f_m(x) - f_n(x) = f_m(c) - f_n(c) + (x-c) \cdot [f'_m(\xi) - f'_n(\xi)] \leq \\ & \leq |f_m(c) - f_n(c)| + (x-c) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |f'_m(x) - f'_n(x)| \leq |f_m(c) - f_n(c)| + (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |f'_m(x) - f'_n(x)| \end{aligned}$$

Definindo $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) + n_2(\varepsilon)$, tem-se:

$$\begin{aligned} & m > n > n_0(\varepsilon) \Rightarrow \\ & \Rightarrow (\forall x \in [a,b]) \Bigg(|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(c) - f_n(c)| + (b-a) \cdot \sup_{x\in[a,b]} |f'_m(x) - f'_n(x)| < \\ & < \frac{\varepsilon}{2} + (b-a) \cdot \frac{\varepsilon}{2 \cdot (b-a)} = \varepsilon \Bigg) \end{aligned}$$

Pela **Proposição 15**, como $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, esta sequência converge uniformemente. Seja:

$$\begin{array}{rccc} f: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lim_{n\to\infty} f_n(x) \end{array}$$

Resta mostrarmos que f é derivável e que $f' = h$.

Fixado $y \in [a,b]$, demonstraremos que $f'(y) = h(y)$.

Defina, para cada $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rccc} g_n: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f_n(x)-f_n(y)}{x-y}, & \text{se } x \neq y \\ f_n'(y), & \text{se } x = y \end{cases} \end{array}$$

Da continuidade de f_n e da diferenciabilidade de f_n em y, segue que g_n é contínua para todo $n \in \mathbb{N}$. Definimos, agora:

$$\begin{array}{rccc} g: & [a,b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \frac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{se } x \neq y \\ h(y), & \text{se } x = y \end{cases} \end{array}$$

e chamamos a atenção para o fato da continuidade de g em y ser equivalente à diferenciabilidade de f neste ponto e termos $f'(y) = h(y)$.

A fim de provarmos que g é contínua, vamos mostrar que $g_n \xrightarrow{u} g$. Para provar a uniformidade da convergência de $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, vamos utilizar a **Proposição 15**.

Temos, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$:

$$(\forall x \in [a,b]) \left(g_m(x) - g_n(x) = \left[\frac{f_m(x) - f_m(y)}{x-y} - \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y} = \right.\right.$$
$$\left.\left. = \frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)}{x-y} \right] \right)$$

Pelo **Teorema do Valor Médio**, existe $\zeta \in]a,b[$ tal que

$$\frac{(f_m - f_n)(x) - (f_m - f_n)(y)}{x-y} = (f_m' - f_n')(\zeta)$$

Agora, dado $\varepsilon > 0$, como $(f_n'(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $m > n > n_0(\varepsilon)$ garante:

$$\sup_{x\in[a,b]} |f_m'(x) - f_n'(x)| < \varepsilon$$

Logo, para $m > n > n_0(\varepsilon)$, temos:

$$(\forall x \in [a,b])(|g_m(x) - g_n(x)| = |f'_m(\zeta) - f'_n(\zeta)| \leq \sup_{x\in[a,b]} |f'_m(x) - f'_n(x)| < \varepsilon)$$

Isto prova que $(g_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e pela **Proposição 15** segue que g_n converge uniformemente. Finalmente, observe que para todo $x \in [a,b]$, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$$

pois se $x \neq y$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{f_n(x) - f_n(y)}{x-y} = \frac{1}{x-y} \cdot \left[\lim_{n\to\infty} f_n(x) - \lim_{n\to\infty} f_n(y)\right] =$$
$$= \frac{f(x) - f(y)}{x-y} = g(x)$$

e se $x = y$:

$$\lim_{n\to\infty} g_n(y) = \lim_{n\to\infty} f'_n(y) = h(y) = g(y).$$

Segue, assim, que g é contínua em y, e portanto $f'(y) = h(y)$. □

Assim, se $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções deriváveis tal que existe $c \in [a,b]$ tal que $(f_n(c))_{n\in\mathbb{N}}$ converge e tal que $(f'_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformemente para h, então

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x) = h(x) = f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right)$$

Proposição 22. *[**Derivação termo a termo**] Suponha que as funções $(f_n : I \to \mathbb{R})_{n\in\mathbb{N}}$ definidas em um intervalo I sejam continuamente deriváveis e que a série das derivadas, $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$ convirja uniformemente. Suponha ainda que, para um dado $x_0 \in I$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ convirja. Então:*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n(x)$$

Demonstração. Defina a sequência:

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

Assim,

$$s_n(x_0) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_0)$$

Logo, $s_n(x_0)$ converge, por hipótese. Observe que:

$$s'_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f'_j(x)$$

Sabemos que, por hipótese, s'_n converge uniformemente para s', logo $s_n(x)$ converge uniformemente para $s'(x)$ e recaímos nas condições do teorema anterior. Logo: s_n converge uniformemente para uma função cuja derivada á s', e concluímos que:

$$\frac{d}{dx}\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{df_j(x)}{dx}$$

$\square$

3 Séries de Potências

As técnicas de aproximação de funções por polinômios surgiram no século XVII. Na verdade, os matemáticos daquela época utilizavam as séries infinitas para representar funções, como se fossem polinômios. Uma vez que eles não possuíam qualquer teoria que tratasse da convergência — e não perceberam a necessidade desta teoria — manipulavam séries como se fossem polinômios. Era um expediente cômodo, que permitia representar funções complicadas por "polinômios infinitos". De fato, possuindo infinitos termos, estes entes eram tratados com as mesmas regras formais do cálculo algébrico. Por isso mesmo, era frequente obterem resultados estranhos e até mesmo contraditórios. Por exemplo, quando derivamos a série:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$$

como se o membro direito da igualdade fosse um "polinômio" (ou seja, termo a termo) , obtemos:

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \cdots$$

Embora esses desenvolvimentos sejam ambos válidos para $x \in \mathbb{R}$ com $|x| < 1$, a primeira série continua convergente mesmo quando $x = 1$, ao passo que a segunda não faz nenhum sentido; De fato, veja que ao substituir x por 1 na segunda igualdade obteríamos:

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots ,$$

que, conforme já vimos, *diverge* (recorde que a série de Grandi diverge).

Evidentemente, o resultado acima não pode ser aceito como verdadeiro. Não é sempre que podemos derivar uma série de funções termo a termo, conforme já vimos. Neste caso, ao derivar a série de $\ln(1+x)$ obtemos uma série divergente.

Como careciam de uma noção precisa de convergência, os matemáticos acabavam lidando com séries divergentes, às vezes sem perveber. O que faltava à Matemática dos séculos XVII e XVIIII seria suprido somente pelos matemáticos do século XIX, a começar com os trabalhos de Bolzano (1781–1827) e Cauchy (1789 – 1857).

Nesta seção veremos que uma série de potências, quando converge, o faz uniformemente em um intervalo simétrico (limitado ou toda a reta), de tal modo que podemos derivá-las e integrá-las termo a termo.

As séries de potências são o tipo mais natural de séries de funções, por diversas razões. Em primeiro lugar, são a generalização natural dos polinômios, e em segundo lugar, são claramente sugeridas pela fórmula de Taylor.

Definição 23 (série de potências). *Uma série de potências em torno de um número real, $x_0 \in \mathbb{R}$ é uma série de funções da forma:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n = a_0 + a_1 \cdot (x-x_0) + a_2 \cdot (x-x_0)^2 + \cdots + a_n \cdot (x-x_0)^n + \cdots$$

Nos pontos em que converge, $X \subset \mathbb{R}$, uma série de potências, $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ define uma função:

$$\begin{array}{rccc} f: & X & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \end{array}$$

Acerca desta função, podemos perguntar:

(a) Quais são as propriedades da função f definida por uma série de potências?

(b) Dada uma função $f : X \to \mathbb{R}$, será possível encontrar uma série de potências de tal modo que:

$$(\forall x \in X) \left(f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x-x_0)^n \right)$$

O resultados a seguir nos indicam que o conjunto de pontos para os quais uma série de potências é convergente ou é unitário ou é um intervalo.

Lema 24. *Se a série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *converge para certo* $\bar{x} \in \mathbb{R}$, *ou seja, se* $\bar{x} \in \mathbb{R}$ *é tal que* $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$, *enquanto série numérica, é convergente, então para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, *a série* $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ *converge.*

Demonstração. Se $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ é convergente, então:

$$\lim_{n\to\infty} |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| = 0$$

de modo a sequência $(|a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n|)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, digamos pela constante $M > 0$, ou seja:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| \leq M)$$

Mas observe que, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, podemos escrever, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n| \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n \leq M \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n$$

Assim, dado $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0|$, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| \leq M \cdot \underbrace{\left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n}_{<1}$$

Pelo **Critério da Comparação**, observando que $|x - x_0| < |\bar{x} - x_0| \Rightarrow \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right| < 1$ e que, portanto, a série geométrica $\sum M \cdot \left|\frac{x - x_0}{\bar{x} - x_0}\right|^n$ converge, segue que $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ converge, ou seja, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)$ não apenas converge, mas também é absolutamente convergente. $\square$

Lema 25. *Se a série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *diverge em* $\bar{x} \in \mathbb{R}$, *ou seja, se* $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ *diverge, então para todo* $x \in \mathbb{R}$ *tal que* $|x - x_0| > |\bar{x} - x_0|$, *a série (numérica)* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *diverge.*

Demonstração. (**contraposição**) De fato, seja $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| > |\bar{x} - x_0|$. Se a série $\sum |a_n \cdot (x - x_0)^n|$ converge, então pelo **Lema 24** seguiria que $\sum |a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n|$ converge. $\square$

Uma série de potências, $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, pode convergir apenas para $x = x_0$, como é o caso da série $\sum n!(x - x_0)^n$. Com efeito, se $x = x_0$, a série em apreço é $\sum 0$, que converge, mas sempre que $x \neq x_0$, $\lim_{n\to\infty} |n! \cdot |x - x_0|^n| \neq 0$. Também pode acontecer de uma série de potências convergir para todo $x \in \mathbb{R}$, como é o caso da série $\sum \frac{x^n}{n!}$.

À parte desses dois casos extremos, veremos que existe um número positivo, R, tal que se $|x - x_0| < R$, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge, e se $|x - x_0| > R$, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge.

Teorema 26. *Seja $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ uma série de potência tal que existem $\bar{x} \in \mathbb{R}$, $\bar{x} \neq x_0$ tal que $\sum a_n \cdot (\bar{x} - x_0)^n$ converge e $\bar{\bar{x}} \in \mathbb{R}$, com $\bar{\bar{x}} \neq x_0$, tal que $\sum a_n \cdot (\bar{\bar{x}} - x_0)^n$ diverge. Então existe um número positivo R tal que:*

$$\begin{cases} |x - x_0| < R \Rightarrow \sum a_n \cdot (x - x_0)^n \ \textit{converge absolutamente} \\ |x - x_0| > R \Rightarrow \sum a_n \cdot (x - x_0)^n \ \textit{diverge} \end{cases}$$

Demonstração. Considere o conjunto $S = \{y \in \mathbb{R} \mid \sum a_n \cdot (y - x_0)^n \text{ converge absolutamente}\}$. Este conjunto é não-vazio, uma vez que $\bar{x} \in S$, e limitado superiormente. Seja:

$$R = \sup\{|x - x_0| \mid x \in S\}$$

Observe que $|\bar{x} - x_0| < R$ e que $|\bar{\bar{x}} - x_0| > R$ (uma vez que se $|\bar{\bar{x}} - x_0| < R$, então existiria $y \in \mathbb{R}$, $|\bar{\bar{x}} - x_0| < y < R$ tal que $\sum a_n \cdot (y - x_0)^n$ converge absolutamente, o que pelo **Lema 24** implicaria que $\sum a_n \cdot (\bar{\bar{x}} - x_0)^n$ também convergiria absolutamente, contrariando a definição de $\bar{\bar{x}}$).

Se x é tal que $|x - x_0| < R$, pela definição de supremo existe $x' \in S$, ou seja, existe $x' \in \mathbb{R}$ tal que $\sum a_n \cdot (x' - x_0)^n$ converge e tal que $|x - x_0| < |x' - x_0| \leq R$. Pelo **Lema 24**, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge absolutamente. A série diverge para $x \in \mathbb{R}$ ral que $|x - x_0| > R$, senão, pelo mesmo lema, teria que convergir em todo $y \in \mathbb{R}$ tal que $R < |y - x_0| < |x - x_0|$, e portanto R não seria supremo do conjunto $\{|x - x_0| \mid x \in S\}$. $\square$

O número R introduzido no teorema anterior é chamado "**raio de convergência da série**".

O **Teorema 26** garante a convergência absoluta no intervalo aberto $]x_0 - R, x_0 + R[$, nada afirmando sobre os extremos, $x_0 - R$ e $x_0 + R$. Vamos ver, posteriormente, esses casos.

Há um outro modo de introduzir o conceito de raio de convergência de uma série de potências, que nos permite inclusive calculá-lo em termos dos coeficientes da série. Para tanto, aplicamos o critério da razão à série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$. Pelo **Teste da Razão**, teremos a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ absolutamente convergente sempre que:

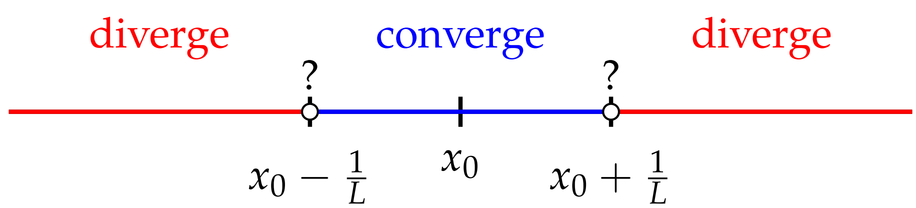
$$\lim_{n \to \infty} \frac{|a_{n+1}| \cdot |(x - x_0)^{n+1}|}{|a_n| \cdot |(x - x_0)^n|} < 1 \iff$$

$$\iff \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1 \tag{3}$$

Caso $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 0$, a desigualdade (3) *sempre* se cumpre, de modo que a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge absolutamente para *todo* $x \in \mathbb{R}$.

Caso $L = \lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} > 0$, então pelo **Teste da Razão**, a série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ convergirá absolutamente sempre que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \cdot |x - x_0| < 1 \iff |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}}$$



Note que o teste é inconclusivo sempre que o limite de $|a_{n+1}|/|a_n|$ for 1 — por isto não podemos concluir nada sobre o comportamento da série nos pontos $x_0 - \frac{1}{L}$ e $x_0 + \frac{1}{L}$ (razão pela qual colocamos uma lacuna com um ponto de interrogação sobre esses pontos na figura acima: são pontos em que a série de potências pode ou não convergir).

Finalmente, se $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$, então para todo $x \neq x_0$ teremos:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1}}{a_n \cdot (x - x_0)^n} \right| = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \infty$$

de modo que $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ diverge para todo $x \neq x_0$.

Se, no entanto, o limite $\lim_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$ não existir, podemos apelar para o **Teste da Raiz**. Caso $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ seja um número real não nulo, a convergência absoluta da série $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ fica assegurada sempre que:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[m]{|a_n| \cdot |x - x_0|^n} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 \iff |x - x_0| < \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}}$$

Se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, então para todo $x \in \mathbb{R}$ teremos:

$$0 = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} < 1$$

de modo que a série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ convergirá absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$. Finalmente, se $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, então para qualquer $x \neq x_0$ teremos $|x - x_0| \neq 0$ e, portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n \cdot (x - x_0)^n|} = |x - x_0| \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$$

de modo que a série divergirá sempre que $x \neq x_0$.

Podemos resumir a discussão acima na seguinte:

Definição 27 (raio de convergência). *Seja $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ uma série de potências tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = L = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$$

*(i) Se $L = 0$, dizemos que **o raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ é infinito**, ou seja, que a série converge para todo $x \in \mathbb{R}$;*

*(ii) Se $L > 0$, então dizemos que o **raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ é $R = \frac{1}{L}$**. Neste caso, garante-se que a série converge (pelo menos) no intervalo aberto $]x_0 - 1/L, x_0 + 1/L[$;*

*(iii) Se $L = \infty$, dizemos que **o raio de convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ é zero**. Neste caso, a série converge apenas no conjunto $\{x_0\}$.*

Definição 28 (intervalo de convergência). *O intervalo convergência da série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ é o maior intervalo centrado em x_0 restrita ao qual a série é convergente.*

Exemplo 29. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências dada por:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Solução: Aqui temos $a_n = \dfrac{1}{n}$. Calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1,$$

de modo que o raio de convergência desta série de potências é $R = 1$. Notamos que a série está centrada em $x_0 = 0$, de modo que a série converge em todo ponto do intervalo $]-1, 1[$. Falta, portanto, testar os extremos deste intervalo. Para $x = -1$, a série é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n},$$

que pelo critério de Leibniz, converge. Para $x = 1$, temos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$, que por ser a série harmônica, diverge. Logo, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ é $[-1, 1[$.

Exemplo 30. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Solução: Neste caso, $a_n = \frac{1}{n!}$. Vamos determinar o raio de convergência calculando, primeiramente:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

de onde concluímos que a série converge absolutamente para todo $x \in \mathbb{R}$, ou seja, o intervalo de convergência é $\mathbb{R}$.

Exemplo 31. *Determinar o intervalo de convergência da série de potências:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot n^n \cdot (x-5)^n$$

Solução: Neste caso $a_n = (-1)^n \cdot n^n$. Calculamos:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(-1)^n \cdot n^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n\to\infty} n^n = \infty$$

Assim, exceto quando $x = 5$, a série de potências dada é divergente. Seu intervalo de convergência, neste caso, é degenerado, consistindo apenas do conjunto $\{5\}$.

Exemplo 32. *Determinar o intervalo de convergência da série:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{2n}$$

Solução: Note que, na forma acima, a série não é de potências. No entanto, podemos convertê-la em uma série de potências fazendo a mudança de variável $y = x^2$. Temos, assim:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot y^n$$

que é uma série de potências centrada em $y_0 = 0$. Aqui $a_n = \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1} \cdot 2^{2\cdot(n+1)}}{2\cdot(n+1)}\right|}{\left|\frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2\cdot(n+1)}}{2\cdot(n+1)} \cdot \frac{2n}{2^{2n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{2^{2n}} \cdot 4 \cdot 2n}{(2n+2)\cdot \cancel{2^{2n}}} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{8n}{2n+2} = 4,$$

de modo que o raio de convergência da série (envolvendo y) é:

$$R = \frac{1}{\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}} = \frac{1}{4}$$

e a série converge em $\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right[$. Analisemos o que ocorre nos extremos: para $y = -1/4$, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot \left(-\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot (-1)^n}{2n \cdot \cancel{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$$

que diverge. Para $y = 1/4$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 2^{2n}}{2n} \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot \cancel{2^{2n}} \cdot 1}{2n \cdot \cancel{2^{2n}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n},$$

que, pelo **Teste de Leibniz**, converge. Logo, o intervalo de convergência para a série em y é:

$$\left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$$

Falta retornarmos à variável x. Temos:

$$y \in \left]-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right] \iff x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$$

Desta forma, o intervalo de convergência da série $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{2n}$ é $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Proposição 33. *Toda série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *converge uniformemente em todo intervalo da forma* $[x_0 - \rho, x_0 + \rho]$*, onde* $0 < \rho < R$.

Demonstração. De fato, para todo $x \in [x_0 - \rho, x_0 + \rho]$ tem-se:

$$|a_n \cdot (x - x_0)^n| = |a_n| \cdot |x - x_0|^n \leq |a_n| \cdot \rho^n = |a_n \cdot \rho^n|$$

e a série numérica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \rho^n$$

é convergente, pois a série de potências converge pontualmente. Pelo **Teste M de Weierstrass**, segue que a série:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

converge uniformemente. $\square$

Exemplo 34. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n} \cdot x^{2n}}{2n}$ *converge uniformemente no intervalo* $\left[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right]$.

Exemplo 35. *A série de potências* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ *converge uniformemente no intervalo* $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

Observe que o teorema anterior garante a convergência uniforme em qualquer intervalo $[x_0 - \rho, x_0 + \rho] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$, mas não neste último. Como exemplo, considere a série geométrica:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

cujo raio de convergência é $R = 1$. Mas a convergência não é uniforme em todo intervalo $]-1, 1[$. De fato, tomando:

$$s_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$$

temos:

$$\left| s_n(x) - \frac{1}{1-x} \right| = \frac{|x|^{n+1}}{1-x}$$

Observe que dado $\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n = \sqrt[n+1]{\frac{1}{2}} \in]-1, 1[$ tal que:

$$\left|s_n(x_n) - \frac{1}{1-x_n}\right|$$

$$\left|s_n(x_n) - \frac{1}{1-x_n}\right| = \frac{|x_n|^{n+1}}{1-x_n} = \frac{\sqrt[n+1]{\left(\frac{1}{2}\right)}^{n+1}}{1-\sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\cdot\left(1-\sqrt[n+1]{\frac{1}{2}}\right)} \geq \frac{1}{2}$$

e portanto a convergência não é uniforme em todo o intervalo $]-1,1[$, embora o seja em qualquer intervalo da forma $[-\rho,\rho]$, com $0<\rho<1$.

Como consequência do **Lema 17**, temos o seguinte:

Corolário 36. *Se $R>0$ é o raio de convergência da série $\sum a_n\cdot(x-x_0)^n$, então a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0-R, x_0+R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n\cdot(x-x_0)^n \end{array}$$

é contínua.

Assim, a função definida por uma série de potências no conjunto de pontos em que converge é contínua.

Teorema 37. *Se a série de potências $\sum a_n\cdot(x-x_0)^n$ tem raio de convergência $R>0$, então:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\cdot a_{n+1}\cdot(x-x_0)^n \tag{4}$$

obtida da série dada por derivação termo a termo, tem o mesmo raio de convergência, $R>0$.

Demonstração. De fato, temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-1} \text{ converge} \iff (x-x_0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^{n-1} \text{ converge}$$

O raio de convergência desta última série, $\sum_{n=1}^{\infty} n\cdot a_n\cdot(x-x_0)^n$, é o recíproco do número:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n\cdot a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}\cdot\sqrt[n]{|a_n|} = \overbrace{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}}^{=1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

de modo que o raio de convergência da nova série é:

$$\frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|n\cdot a_n|}} = \frac{1}{\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}} = R.$$

$\square$

Teorema 38. *Se a série de potências $\sum a_n \cdot (x-x_0)^n$ tem raio de convergência $R>0$, então:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n-1}}{n}\cdot(x-x_0)^n \tag{5}$$

obtida da série dada por integração termo a termo, tem o mesmo raio de convergência, $R>0$.

Demonstração. Note que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot(x-x_0)^{n+1} \text{ converge } \iff (x-x_0)\cdot\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}\cdot(x-x_0)^n \text{ converge}$$

Para concluirmos nossa tese, basta observarmos, como na demonstração do lema anterior, que:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{|a_n|}{n+1}} = \overbrace{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n+1}}}^{=1}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

$\square$

Proposição 39. *Seja* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ *uma série de potências e* $R > 0$ *seu raio de convergência. Então, se definimos:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

então:

(a) *Para todo* $x \in]x_0 - R, x_0 + R[$, $f'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$, *ou seja:*

$$\frac{d}{dx}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dx}[a_n \cdot (x - x_0)^n] = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

(b) *Para qualquer* $I = [a, b] \subset]x_0 - R, x_0 + R[$, $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot [(b - x_0)^{n+1} - (a - x_0)^{n+1}]$, *ou seja:*

$$\int_a^b \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n\right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^b [a_n \cdot (x - x_0)^n] dx$$

Demonstração. Ad (a): A soma finita de funções polinomiais é certamente continuamente derivável, e segue do **Teorema 37** que, em $]x_0 - R, x_0 + R[$, $\sum n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^n$ converge uniformemente. Aplicando a **Proposição 22** chegamos ao resultado desejado;

Ad (b): Basta aplicarmos a **Proposição 20** . $\square$

Observe que o teorema acima não nos diz nada sobre o que ocorre nas extremidades do intervalo $]x_0 - R, x_0 + R[$. Posteriormente veremos um resultado que trata da convergência da série nos extremos deste intervalo.

Proposição 40. *Sejam $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n$ uma série de potências com raio de convergência $R > 0$ e $I, J \subset \mathbb{R}$ intervalos tais que $J \subseteq]-R, R[$. Definindo:*

$$\begin{array}{rccc} f: & J \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot y^n \end{array}$$

se $u : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ for uma função tal que:

$$(\forall x \in I)(u(x) \in J)$$

então:

$$\sum a_n \cdot u(x)^n$$

converge (pontualmente) para $f \circ u : I \to \mathbb{R}$.

Demonstração. Por definição:

$$f \circ u(x) = f(u(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u(x)^n.$$

Para qualquer $x \in I$ fixado, como $u(x) \in J \subseteq]-R, R[$, segue que a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot u(x)^n$ converge para o valor $f(u(x))$. □

Vejamos algumas aplicações importantes da proposição acima, obtendo novas séries de potências a partir de séries já conhecidas.
Sabemos que a soma da série geométrica de razão t com $|t| < 1$, é:

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + \cdots + t^n + \cdots \tag{6}$$

Substituindo t por $-x$ (ou seja, tomando $u :]-1, 1[\to \mathbb{R}, t \mapsto -x$ na **Proposição 40**) em (6), obtemos:

$$\frac{1}{1-(-x)} = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots + (-1)^n \cdot x^n + \cdots$$

Se substituirmos x por $-x^2$ (ou seja, tomando $u :]-1, 1[\to]-1, 0[\subset \mathbb{R}, t \mapsto -x^2$ na **Proposição 40**) em (6), obteremos, por sua vez:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n \cdot x^{2n} + \cdots$$

Exemplo 41. *Sabemos que para todo $t \in]-1, 1[$ temos:*

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + t^3 + t^4 + t^5 + \cdots + t^n + \cdots$$

*Aplicando o item (b) da **Proposição 39**, podemos integrar os dois membros da igualdade acima em qualquer intervalo da forma $[0, x] \subset]-1, 1[$, ou seja, com $-1 < x < 1$, e obtemos:*

$$\int_0^x \frac{1}{1-t} dt = \int_0^x 1 dt + t + \int_0^x t^2 dt + \int_0^x t^3 dt + \int_0^x t^4 dt + \int_0^x t^5 dt + \cdots + \int_0^x t^n dt + \cdots$$

$$\ln(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Exemplo 42. *Sabemos que para todo $t \in]-1, 1[$ temos:*

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 - t^5 + \cdots + (-1)^n t^n + \cdots$$

*Aplicando o item (b) da **Proposição 39**, podemos integrar os dois membros da igualdade acima em qualquer intervalo da forma $[0, x] \subset]-1, 1[$, ou seja, com $-1 < x < 1$, e obtemos:*

$$\int_0^x \frac{1}{1+t} dt = \int_0^x 1 dt - t + \int_0^x t^2 dt - \int_0^x t^3 dt + \int_0^x t^4 dt - \int_0^x t^5 dt + \cdots + (-1)^n \int_0^x t^n dt + \cdots$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1} + \cdots$$

Exemplo 43. *Sabemos que para qualquer $t \in]-1, 1[$, podemos escrever:*

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \cdots + (-1)^n \cdot t^{2n} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot t^{2n}$$

*e portanto, para qualquer $\theta \in [0, 1[$, podemos aplicar o item (b) da **Proposição 39** ao intervalo $[0, \theta] \subset]-1, 1[$, obtendo:*

$$\int_0^\theta \frac{1}{1+x^2} dx = \int_0^\theta 1 dx - \int_0^\theta x^2 dx + \int_0^\theta x^4 dx - \int_0^\theta x^6 dx + \int_0^\theta x^8 dx - \int_0^\theta x^{10} dx - \cdots$$

$$\arctan(\theta) - \arctan(0) = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

$$\arctan(\theta) = \theta - \frac{\theta^3}{3} + \frac{\theta^5}{5} - \frac{\theta^7}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{\theta^{2n+1}}{2n+1} + \cdots$$

A seguir veremos resultados que nos permitem, sob certas condições, calcular o valor de uma série de potências de raio de convergência R no extremo direito de seu intervalo.

Lema 44. *Seja* $\sum a_n = (s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma série numérica tal que existe* $M \in \mathbb{R}$ *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$, $s_n \leq M$, *e seja* $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência não crescente de termos não-negativos. Então as somas reduzidas da série* $\sum a_n \cdot b_n$ *são limitadas por* $M \cdot |b_1|$.

Demonstração. Temos:

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i\right| = |s_1 \cdot b_1 + (s_2 - s_1) \cdot b_2 + \cdots + (s_n - s_{n-1}) \cdot b_n| =$$

$$|s_1 \cdot (b_1 - b_2) + s_2 \cdot (b_2 - b_3) + \cdots + s_{n-1} \cdot (b_{n-1} - b_n) + s_n \cdot b_n| \leq$$
$$\leq M \cdot [(b_1 - b_2) + (b_2 - b_3) + \cdots + (b_{n-1} - b_n) + b_n] = M \cdot b_1$$

□

Teorema 45 (Teorema de Abel). *Se a série de potências* $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, *com raio de convergência igual a* 1 *converge em* $x = x_0 + 1$, *então ela converge uniformemente em* $[x_0, x_0 + 1]$, *de modo que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [x_0, x_0+1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

é uma função contínua neste intervalo. Em particular, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0 + 1_-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(x_0 + 1)$$

Demonstração. Como, por hipótese, a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ é convergente, tem-se que $(\sum_{i=0}^{n} a_i)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{R}$ tal que para todo inteiro positivo p, vale:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\sum_{i=0}^{n+p} a_i - \sum_{i=0}^{n+1} a_i\right| = |a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

Observe que para todo $x \in [x_0, x_0 + 1]$, a sequência $b_n = (x - x_0)^n$ é não-decrescente e consiste apenas de números não negativos. Pelo **Lema 44**, tem-se:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \sum_{i=0}^{n+p} a_i \cdot (x - x_0)^i - \sum_{i=0}^{n+1} a_i \cdot (x - x_0)^i \right| = |a_{n+1} \cdot (x - x_0)^{n+1} + \cdots + a_{n+p} \cdot (x - x_0)^{n+p}| <$$

$$< \varepsilon \cdot (x - x_0)^{n+1} \leq \varepsilon$$

Segue da **Proposição 15** que a série é uniformemente convergente em $[x_0, x_0 + 1]$. Pela **Proposição 18**, segue que a função f é contínua em $[x_0, x_0 + 1]$ e, em particular, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0 + 1_-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n = f(x_0 + 1).$$

$\square$

Vamos aplicar o **Teorema de Abel** no seguinte:

Exemplo 46. *Podemos retomar o **Exemplo 43**, utilizando-nos do fato de que a série:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$$

converge, segue que:

$$\frac{\pi}{4} = \arctan(1) = \lim_{x \to 1_-} \arctan(x) = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^n \cdot \frac{1}{2n+1} + \cdots$$

Exemplo 47. *Sabemos que para todo $x \in]-1, 1[$, tem-se:*

$$\ln(1 + x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Observando que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1}$$

*é convergente (pelo **Critério de Leibniz**), podemos escrever, devido ao **Teorema de Abel**:*

$$\ln(2) = \ln(1 + 1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

Exemplo 48. *Usando o exemplo acima e o **Teorema da Estimativa** (**Teorema 56** da* Agenda 2*), obter uma aproximação para $\ln(2)$ com erro inferior a 10^{-1}.*

Solução: Pelo **Teorema da Estimativa**, temos:

$$\left|\ln(2) - \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}\cdot\frac{1}{j}\right| \leq \frac{1}{n+1}$$

Queremos erro inferior a $\frac{1}{10}$. Comparando:

$$\frac{1}{n+1} \text{ com } \frac{1}{10}$$

notamos que basta tomarmos $n = 9$. Assim,

$$\sum_{j=1}^{9}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} = \frac{1879}{2520} = 0.74563492063$$

será uma aproximação de $\ln(2)$ com erro inferior a $1/10$. O valor que encontramos na calculadora é 0.69314718056, e de fato tem-se:

$$0.74563492063 - 0.69314718056 = 0.05248774007 < 0.1$$

Observação 49. *Notamos, no exemplo anterior, que a convergência se dá de modo bastante lento: para obtermos uma aproximação de $ln(2)$ com erro inferior a $1/100$, será necessário computarmos a soma dos 99 primeiros termos da série, e assim por diante. Temos:*

$$\sum_{j=1}^{99}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69817\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{999}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69364\cdots$$

$$\sum_{j=1}^{9999}(-1)^{j-1}\frac{1}{j} = 0.69319\cdots$$

Corolário 50. *Se a série de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$, com raio de convergência igual a R converge em $x = x_0 + R$, então ela converge uniformemente em $[x_0, x_0 + R]$, de modo que:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [x_0, x_0 + R] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

é uma função contínua neste intervalo. Em particular, tem-se:

$$\lim_{x \to x_0 + R_-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot R^n$$

Demonstração. Similar à do **Teorema de Abel**, trocando-se $(x - x_0)$ por $R \cdot (x - x_0)$. $\square$

Teorema 51 (unicidade de séries de potências). *Se uma função $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ admite um desenvolvimento em série de potências em um ponto $x_0 \in I$, este desenvolvimento é único.*

Demonstração. Suponhamos que f tenha dois desenvolvimentos em série de potências numa vizinhança de $x_0 \in I$, $|x - x_0| < R$:

$$x \in]x_0 - R, x_0 + R[\Rightarrow f(x) = \sum a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum b_n \cdot (x - x_0)^n$$

Estas séries podem ser derivadas repetidamente, termo a termo em $]x_0 - R, x_0 + R[$, donde seguirá que $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n = b_n)$. $\square$

O teorema acima nos diz que, se uma função tem série de potências em torno de um ponto x_0, não importa que método empregamos para obtê-la, já que esta série é única. Muitas séries serão obtidas a partir das "séries de Taylor", como veremos posteriormente.

Os resultados vistos acima nos mostram que as funções definidas por séries de potências têm propriedades muito boas: por exemplo, são infinitamente deriváveis (se f é definida por uma série de potências e f é derivável, então f' também é definida por uma série de potências) e assim por diante.

Assim como pudemos derivar e integrar séries de potências, podemos operá-las, como segue:

Proposição 52 (soma/subtração de séries de potências e produto por escalar). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$, $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ os raios de convergência das séries de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ e $\sum b_n \cdot (x - x_0)^n$, respectivamente. Se definirmos as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R_1, x_0 + R_1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: &]x_0 - R_2, x_0 + R_2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

então a série de potências dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot (x - x_0)^n$$

converge para a função

$$\begin{array}{rccc} f \pm g: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \pm g(x) \end{array}$$

onde $R = \min\{R_1, R_2\}$. Também, se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $k \in \mathbb{N}$, então a série $\sum_{n=k}^{\infty} \alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot a_{n-k} \cdot (x - x_0)^n$ converge para $\alpha \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_0)^k$ em $]x_0 - R_1, x_0 + R_1[$.

Demonstração. Temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \pm \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (x - x_0)^k =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k \cdot (x - x_0)^k \pm \sum_{k=0}^{n} b_k \cdot (x - x_0)^k \right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) \cdot (x - x_0)^k =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) \cdot (x - x_0)^n$$

Quanto à segunda parte, fazendo $m = n + k$, temos $n = m - k$, de modo que quando $n = 0$ tem-se $m = k$. Naturalmente $\lim_{n\to\infty} m = \infty$, e portanto:

$$\alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{m=k}^{\infty} \alpha \cdot a_{m-k} \cdot (x - x_0)^m$$

Trocando m por n, segue que:

$$\alpha \cdot (x - x_0)^k \cdot \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \alpha \cdot a_{n-k} \cdot (x - x_0)^n$$

□

Exemplo 53. *Exibir a série de potências da função dada por:*

$$f(x) = \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

e determinar seu raio de convergência.

Solução: Vimos que:

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \cdots$$

$$\ln(1-x) = -x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 - \cdots$$

e que ambas têm raio de convergência igual a 1. Pela **Proposição 52**, temos:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \ln(1+x) - \ln(1-x) &= \left(x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 + \cdots\right) - \\ &- \left(-x - \frac{1}{2} \cdot x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^3 - \frac{1}{4} \cdot x^4 - \cdots\right) = \\ &= 2 \cdot \left(x + \frac{1}{3} \cdot x^3 + \frac{1}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{7} \cdot x^7 + \cdots\right)\end{aligned}$$

e o raio de convergência desta série também é 1.

Observação 54. *Podemos obter, a partir do exemplo anterior, uma fórmula recursiva bastante cômoda para calcular* $\ln(n)$ *para qualquer* $n \in \mathbb{N}$. *Fazendo:*

$$x = \frac{1}{2n+1} \quad \textit{ou seja,} \quad \frac{1+x}{1-x} = \frac{n+1}{n}$$

Note que para qualquer $n > 0$, $|x| = \left|\frac{n+1}{n}\right| < 1$, *de modo que podemos escrever:*

$$\ln\left(\frac{n+1}{n}\right) = 2 \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \frac{1}{7 \cdot (2n+1)^7} + \cdots\right)$$

$$\ln(n+1) = \ln(n) + 2 \cdot \left(\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3 \cdot (2n+1)^3} + \frac{1}{5 \cdot (2n+1)^5} + \frac{1}{7 \cdot (2n+1)^7} + \cdots\right)$$

Para obtermos, por exemplo, $\ln(3)$*, basta tomarmos* $n = 2$ *e teremos:*

$$\ln(3) = \ln(2) + 2 \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5^3} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5^5} + \cdots \right)$$

Apresentamos a seguinte:

Definição 55 (função analítica). *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$*,* x_0 *um ponto de acumulação de* X *e* $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função de classe* $\mathcal{C}^\infty$*. Dizemos que* f *é* ***analítica em*** $x_0 \in \operatorname{int}.(X)$ *se existir* $\delta > 0$ *tal que, no intervalo* $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$*,* f *é igual a uma série de potências. Se* f *é analítica em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que* f ***é analítica em*** X*.*

Na próxima seção veremos como representar diversas funções de classe $\mathcal{C}^\infty$ como séries de potências.

4 Expansão de Funções em Séries de Potências

Nesta seção vamos responder ao segundo questionamento sobre funções representáveis por meio de séries de potências. Isto é importante porque séries de potências nos dão aproximações *calculáveis* de uma função — por exemplo, não há método de cálculo razoável para o cálculo da função arco-tangente, mas usando a série $x - x^3/3 + x^5/5 - x^7/7 + \cdots$ obtemos uma bom valor aproximado.

Na seção anterior conseguimos representar algumas funções em séries de potências, com base essencialmente no conhecimento da soma de uma série geométrica através do uso de certas manipulações algébricas do importante resultado a respeito da derivação e integração termo a termo de uma série de potências. É natural, então, procurarmos saber mais quais funções podem ser representadas assim e como obter a representação.

Começamos observando que se, em seu intervalo de convergência, tivermos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$$

então:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-1}$$

e:

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n \cdot (n-1) \cdot a_n \cdot (x - x_0)^{n-2}$$

e assim por diante. Avaliando cada uma das igualdades acima em x_0, obtemos:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= a_0 \\ f'(x_0) &= a_1 \\ f''(x_0) &= 2 \cdot a_2 \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x_0) &= n! \cdot a_n \end{aligned}$$

de modo que se $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n$, então:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Definição 56 (série de Taylor). *Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^{\infty}(I, \mathbb{R})$ e $x_0 \in I$. A **série de Taylor de f em torno de** x_0 é:*

$$T_{x_0}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

*Se $x_0 = 0$, a série é chamada **série de MacLaurin** da função.*

Do exposto acima, concluímos que, pelo **Teorema 51**, se uma função tem desenvolvimento em série de potências em torno de um ponto x_0, esta série é necessariamente sua série de Taylor.

Vamos calcular algumas séries de Taylor.

Exemplo 57. *Expandir a função $f(x) = e^x$ em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ e apresentar seu intervalo de convergência.*

Solução: Neste caso, temos:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f^{(n)}(x) = e^x)$$

de modo que para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $f^{(n)}(0) = e^0 = 1$. Assim, temos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x-0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot (x-0)^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

Para determinar o raio de convergência da série acima, calculamos:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\cancel{n!}}{(n+1)\cdot\cancel{n!}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0$$

e concluímos que a série acima converge para todo $x\in\mathbb{R}$.

Exemplo 58. *Expandir a função $f(x)=\sin(x)$ em série de Taylor em torno de $x_0=0$.*

Solução: Observamos que:

$$\begin{aligned}
f^{(0)}(x)&=\sin(x)\\
f^{(2)}(x)&=-\sin(x)\\
f^{(4)}(x)&=\sin(x)\\
f^{(6)}(x)&=-\sin(x)
\end{aligned}$$

de modo que:

$$f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cdot\sin(x)$$

Também notamos que:

$$\begin{aligned}
f^{(1)}(x)&=\cos(x)\\
f^{(3)}(x)&=-\cos(x)\\
f^{(5)}(x)&=\cos(x)\\
f^{(7)}(x)&=-\cos(x)
\end{aligned}$$

de modo que:

$$f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cdot\cos(x)$$

Segue, então, que:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!}=\begin{cases}0,\ \text{se } n=2k\\ \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!},\ \text{se } n=2k+1\end{cases}$$

Portanto, a série de Taylor de $f(x)=\sin(x)$ em torno de $x_0=0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots$$

Para determinar o raio de convergência desta série não podemos considerar a razão $|a_{n+1}|/|a_n|$, uma vez que sempre que n for par, teremos $a_n = 0$. No entanto, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} x^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot (x^{\frac{2k+1}{k}})^k \overset{\overset{y=x^{\frac{2k+1}{k}}}{\uparrow}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot y^k$$

Neste caso, temos $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot(n+1)+1)!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n+1)!}{(2n+3)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n+1)!}}{(2n+3)\cdot(2n+2)\cdot\cancel{(2n+1)!}} = 0$$

e portanto o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot y^k$ é infinito, ou seja, seu intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Consequentemente, o intervalo de convergência da série original, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1}$, também é $\mathbb{R}$.

Exemplo 59. *Expandir a função $f(x) = \cos(x)$ em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$.*

Solução: Observamos que:

$$f^{(0)}(x) = \cos(x)$$
$$f^{(2)}(x) = -\cos(x)$$
$$f^{(4)}(x) = \cos(x)$$
$$f^{(6)}(x) = -\cos(x)$$

de modo que:

$$f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cdot \cos(x)$$

Também notamos que:

$$f^{(1)}(x) = -\sin(x)$$
$$f^{(3)}(x) = \sin(x)$$
$$f^{(5)}(x) = -\sin(x)$$

$$f^{(7)}(x) = \sin(x)$$

de modo que:

$$f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \cdot \sin(x)$$

Segue, então, que:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \begin{cases} 0, \text{ se } n = 2k+1 \\ \dfrac{(-1)^k}{(2k)!}, \text{ se } n = 2k \end{cases}$$

Portanto, a série de Taylor de $f(x) = (x)$ em torno de $x_0 = 0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Para determinar o raio de convergência desta série não podemos considerar a razão $|a_{n+1}|/|a_n|$, uma vez que sempre que n for ímpar, teremos $a_n = 0$. No entanto, podemos escrever:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot (x^2)^k \overset{\overset{y=x^2}{\uparrow}}{=} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot y^k$$

Neste caso, temos $a_k = \frac{(-1)^k}{(2k)!}$, de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{(2\cdot(n+1))!}\right|}{\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(2\cdot(n+1))!} = \lim_{n\to\infty} \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)\cdot(2n+1)\cdot\cancel{(2n)!}} = 0$$

e portanto o raio de convergência de $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot y^k$ é infinito, ou seja, seu intervalo de convergência é $\mathbb{R}$. Consequentemente, o intervalo de convergência da série original, $\sum_{k=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$, também é $\mathbb{R}$.

Exemplo 60. *Expandir a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (1+x)^{\alpha} \end{array}$$

onde $\alpha \in \mathbb{R}$, em série de Taylor e determinar seu raio de convergência.

Solução: Temos:

$$f^{(0)}(x) = (1+x)^{\alpha}$$
$$f^{(1)}(x) = \alpha \cdot (1+x)^{\alpha-1}$$
$$f^{(2)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (1+x)^{\alpha-2}$$
$$f^{(3)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdot (1+x)^{\alpha-3}$$

de onde podemos inferir que:

$$f^{(n)}(x) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1)) \cdot (1+x)^{\alpha-n}$$

e portanto:

$$f^{(n)}(0) = \alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))$$

e:

$$\frac{f^{(n)}(0)}{n!} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

Logo, a série de Taylor em torno de $x_0 = 0$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!} \cdot x^n$$

Se denotarmos:

$$\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdot (\alpha-2) \cdots (\alpha-(n-1))}{n!}$$

obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} \cdot x^n$$

que generaliza a fórmula binomial, denominada **série binomial**.

Vamos determinar agora o raio de convergência desta série. Tem-se:

$$a_n = \binom{\alpha}{n}$$

Observe que:

$$\binom{\alpha}{n+1} = \frac{\alpha \cdot (\alpha-1) \cdots (\alpha-(n-1)) \cdot (\alpha-n)}{(n+1) \cdot n!} = \binom{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-n}{n+1}$$

de modo que:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left|\binom{\alpha}{n} \cdot \frac{\alpha-n}{n+1}\right|}{\left|\binom{\alpha}{n}\right|} = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{\alpha - n}{n+1}\right| = 1,$$

de modo que o raio de convergência desta série é 1.

Exemplo 61. *Usar a série binomial para calcular* $\sqrt{630}$ *aproximadamente.*

Solução: O quadrado perfeito mais próximo de 630 é 625. Escrevemos, então:

$$\sqrt{630} = \sqrt{625+5} = \sqrt{25^2 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)} = 25 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Tomando $\alpha = \frac{1}{2}$ na série binomial, obtemos:

$$(1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} \cdot x - \frac{1}{8} \cdot x^2 + \frac{1}{16} \cdot x^3 - \frac{5}{128} \cdot x^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot x^n$$

Em nosso caso, $x = \dfrac{1}{125} = 0.008$, de modo que:

$$\begin{aligned}\left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (0.008)^n = \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot (0.008) + \frac{1}{16} \cdot (0.008)^3 - \frac{5}{128} \cdot (0.008)^4 - \frac{7}{256} \cdot (0.008)^5 + \cdots = \\ &= 1 + 0.004 - 0.000008 + 0.000000032 - 0.000000000000896 \cdots\end{aligned}$$

e portanto, usando os 3 primeiros termos da série binomial, obtemos:

$$\sqrt{630} = 25 \cdot \left(1 + \frac{1}{125}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 25 + 0.1 - 0.0002 = 25.0998$$

Pelo **Teorema da Estimativa**, o erro cometido será menor que:

$$\left|\sum_{n=0}^{2} \binom{\frac{1}{2}}{n} \cdot (0.008)^n - \sqrt{630}\right| < \frac{1}{16} \cdot (0.008)^3 = 0.000008$$

Exemplo 62. *Determinar a série de MacLaurin de* $f(x) = \sin(x) + \sin(3x)$.

Solução: Para todo $t \in \mathbb{R}$ temos:

$$\sin(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} t^{2n+1} = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \frac{t^9}{9!} - \frac{t^{11}}{11!} + \cdots$$

Podemos aplicar a **Proposição 40**, substituindo t por $3x$ para obter:

$$\begin{aligned} \sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{(2n+1)!} (3x)^{2n+1} = \\ = 3x - \frac{(3x)^3}{3!} + \frac{(3x)^5}{5!} - \frac{(3x)^7}{7!} + \frac{(3x)^9}{9!} - \frac{(3x)^{11}}{11!} + \cdots = \\ = 3x - \frac{3^3}{3!} x^3 + \frac{3^5}{5!} x^5 - \frac{3^7}{7!} x^7 + \frac{3^9}{9!} x^9 - \frac{3^{11}}{11!} x^{11} + \cdots \end{aligned}$$

Pela **Proposição 52**, tem-se:

$$\begin{aligned} \sin(x) + \sin(3x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1 + 3^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1} = \\ = 4x - \frac{1+3^3}{3!} x^3 + \frac{1+3^5}{5!} x^5 - \frac{1+3^7}{7!} x^7 + \frac{1+3^9}{9!} x^9 + \cdots \end{aligned}$$

Exemplo 63. *Determinar a série de MacLaurin de $f(x) = x^3 \cdot e^x$.*

Solução: Temos:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n$$

de modo que pela segunda parte da **Proposição 52**, vale:

$$x^3 \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} x^3 \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot x^{n+3} = \sum_{m=3}^{\infty} \frac{1}{(m-3)!} x^m$$

Desta forma, podemos escrever:

$$x^3 \cdot \left(1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3!} x^3 + \cdots \right) = x^3 + x^4 + \frac{1}{2} x^5 + \frac{1}{3!} x^6 + \cdots$$

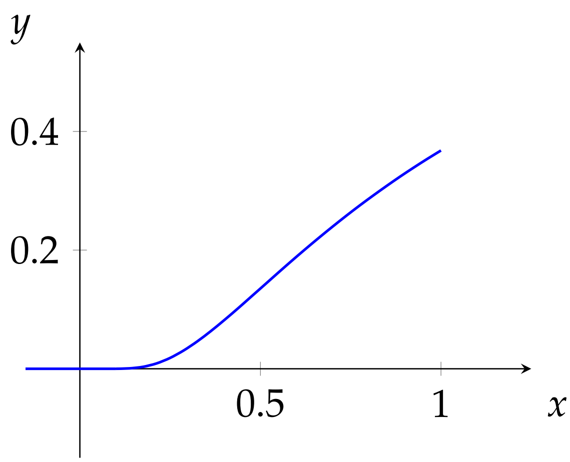
Até aqui vimos exemplos de séries de Taylor que aproximam a função em torno de um certo ponto. Nem sempre este é o caso, como veremos a seguir.

Exemplo 64. *Expandir a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, \; se \; x \leq 0 \\ e^{-\frac{1}{x}}, \; se \; x > 0 \end{cases} \end{array}$$

em série de Taylor em torno de $x_0 = 0$.

Solução: Apresentamos, abaixo, o gráfico da função:



Pode-se demonstrar que:

$$f^{(n)}(x) = \begin{cases} 0, \text{ se } x < 0 \\ e^{-\frac{1}{x}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right), \text{ se } x > 0 \end{cases}$$

onde $p_n(y)$ é um polinômio na indeterminada y. Por exemplo, no caso da derivada primeira, verifica-se que $p_1(y) = y^2$. Para determinar o valor da derivada na origem, é necessário calcular suas derivadas laterais. A $n-$ésima derivada lateral à esquerda de f é:

$$f_-^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0_-} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0_-} 0 = 0$$

A $n-$ésima derivada lateral à direita em 0, por sua vez, é:

$$f_+^{(n)}(0) = \lim_{x \to 0_+} f^{(n)}(x) = \lim_{x \to 0_+} e^{-\frac{1}{x}} \cdot p_n\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{y \to \infty} e^{-y} \cdot p_n(y) = \lim_{y \to \infty} \frac{p_n(y)}{e^y} = 0$$

Desta forma, para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $f^{(n)}(0) = 0$, e a série de Taylor de f em torno de 0 é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} 0 \cdot x^n$$

Resta claro que a função f é diferente de sua série de Taylor em qualquer intervalo centrado em $x_0 = 0$.

Vimos, acima, um exemplo de função de classe $\mathcal{C}^\infty$ que não é analítica no ponto 0.

4.1 Aplicação da Série de Taylor ao Cálculo de Derivadas

Se $n, k \in \mathbb{N}$, então a $k-$ésima derivada de x^n é 0 em $x = 0$, exceto se $n = k$, caso em que a derivada é $k!$:

$$\frac{d^k}{dx^k}(x^n)\bigg|_{x=0} = \begin{cases} 0, \text{ para } k \neq n \\ k!, \text{ para } k = n \end{cases} \tag{7}$$

Por exemplo, se $n = 3$, então x^3 e suas duas primeiras derivadas, $(x^3)' = 3x^2$ e $(x^3)'' = 6x$ se anulam em $x = 0$, enquanto que $(x^3)^{(3)} = 6 = 3!$ e todas as derivadas de ordem mais alta são zero para todo $x \in \mathbb{R}$. Portanto, se a série de potências:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n \tag{8}$$

tiver um raio de convergência não-nulo, então:

$$f^{(k)}(0) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot \left[\frac{d^k}{dx^k}(x^n)\right]_{x=0} = a_k \cdot k! \tag{9}$$

Assim, se conhecemos a série de MacLaurin de uma função, podemos facilmente calcular suas derivadas em $x = 0$.

Exemplo 65. *Vimos que para todo $\theta \in]-1, 1[$, temos:*

$$\arctan(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} \cdot \theta^{2n+1} \tag{10}$$

Usar esta série para calcular $\displaystyle\frac{d^9}{d\theta^9}(\arctan(\theta))\bigg|_{\theta=0}$.

Solução: A fórmula (9) mostra que $f^{(9)}(0) = 9! \cdot a_9$, onde a_9 é o coeficiente de θ^9 na série de potências de f. Obtemos a potência θ^9 na série (10) fazendo $n = 4$. Desta forma, $a_9 = \dfrac{(-1)^4}{2 \cdot 4 + 1} = \dfrac{1}{9}$ e:

$$\frac{d^{(9)}}{d\theta^9}(\arctan(\theta))\bigg|_{\theta=0} = \frac{1}{9} \cdot 9! = 8!$$

5 Polinômio de Taylor

Os polinômios são certamente as funções mais simples e elementares, por isso mesmo era natural, desde o início do Cálculo, que os matemáticos procurassem representar com polinômios funções mais complexas. Comecemos observando que os coeficientes de um polinômio qualquer:

$$p(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots + a_n \cdot x^n \tag{11}$$

são dados em termos de suas derivadas na origem, pois:

$$a_i = \frac{p^{(i)}(0)}{i!},$$

como é fácil ver. Portanto:

$$p(x) = p(0) + p'(0) \cdot x + \frac{p''(0)}{2!} \cdot x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n \tag{12}$$

Fixado um valor x_0, a substituição de x por $x_0 + \Delta x$ em $p(x)$ nos conduz a um novo polinômio na variável Δx, $q(\Delta x) = p(x_0 + \Delta x)$, de mesmo grau que $p(x)$. Portanto, de (12) podemos concluir que:

$$q(\Delta x) = q(0) + q'(0) \cdot \Delta x + \frac{q''(0)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{q^{(n)}(0)}{n!} \cdot \Delta x^n \tag{13}$$

Pela **Regra da Cadeia**, vê-se facilmente que $q^{(i)}(0) = p^{(i)}(x_0)$ para todo $i \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Fazendo esta substituição em (13) e lembrando que $q(\Delta x) = p(x_0 + \Delta x)$, obtemos:

$$p(x_0 + \Delta x) = p(x_0) + p'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{p''(x_0)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{p^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot \Delta x^n \tag{14}$$

que é a fórmula de Taylor para um polinômio qualquer, $p(x)$. É importante observar que vários matemáticos do século XVII, dentre os quais Isaac Newton, usaram essa fórmula para qualquer função, não se restringindo a polinômios. Assim, por exemplo, no caso da função $f(x) = \ln(1 + x)$, a fórmula (14), com $x_0 = 0$, nos dá:

$$\ln(1 + x) = x - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x^3 - \cdots - (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \cdot x^n$$

É claro que os matemáticos do século XVII sabiam muito bem que isso não estava certo; para remediar, tomavam n cada vez maior.

A fórmula (14) é válida no caso de uma função f qualquer, possuindo derivadas até a ordem n no ponto x_0, desde que completada com um termo adicional, R_n, denominado **resto de ordem** n:

$$f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot \Delta x + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot \Delta x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot \Delta x^n + R_n(\Delta x) \tag{15}$$

Este resto é definido pela própria fórmula: ele é a diferença entre $f(x_0 + \Delta x)$ e o polinômio de ordem n em Δx que precede R_n no segundo membro, o chamado **polinômio de Taylor de ordem** n da função f referente ao ponto x_0. Explicitamente,

Definição 66. *Sejam $X \subset \mathbb{R}$ uma vizinhança de 0 e $f \in \mathcal{C}^\infty(X, \mathbb{R})$. O **polinômio de Taylor de ordem** $n \in \mathbb{N}$ **de** f **em torno de** x_0 é:*

$$p_n(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Observe que o $n-$ésimo polinômio de Taylor de uma função de classe $\mathcal{C}^\infty$ é a $n-$ésima soma parcial da série de Taylor, ou seja:

$$\lim_{n \to \infty} p_n(x) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

Teorema 67 (Fórmula de Taylor com resto de Lagrange). *Sejam $[a, b] \subset \mathbb{R}$ um intervalo e $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função $(n+1)$ vezes diferenciável em $[a, b]$. Se $x_0 \in I$ e $x \in [a, b]$, temos:*

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x)$$

onde $R_{n,x_0}(x)$ (o "resto") pode ser escrito como:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

onde ξ é um número conveniente entre x_0 e x.

Demonstração. Faremos a demonstração supondo $x > x_0$. Para $x < x_0$, o procedimento é análogo.

Sejam $p_n(t)$ o polinômio de Taylor de ordem n de f no ponto x_0 e $R_{n,x_0}(t)$ o resto correspondente. Então:

$$(\forall t \in [a, b])(f(t) = p_n(t) + R_{n,x_0}(t))$$

de modo que para $t = x$ temos:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) + \cdots + \frac{f''(x_0)}{2!} \cdot (x - x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n + R_{n,x_0}(x)$$

Consideremos a seguinte função:

$$\begin{array}{rcl} g: \ [x_0, x] & \to & \mathbb{R} \\ t & \mapsto & f(x) - f(t) - f'(t) \cdot (x-t) - \cdots - \dfrac{f^{(n)}(t)}{n!} \cdot (x-t)^n - R_{n,x_0}(x) \cdot \dfrac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}} \end{array}$$

Como f é $(n+1)-$vezes diferenciável em $]a, b[$, $f^{(n)} : [a, b] \to \mathbb{R}$ é contínua, e portanto g também é contínua, em particular, em $]x_0, x[$. Sendo $f^{(n)}$ também derivável, tem-se, em particular, que g é derivável em $]x_0, x[$. Observando que:

$$\begin{aligned} g(x_0) = f(x) - f(x_0) - f'(x_0) \cdot (x - x_0) - \cdots \\ \cdots - \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n - R_{n,x_0}(x) \cdot \frac{\cancel{(x - x_0)^{n+1}}}{\cancel{(x - x_0)^{n+1}}} = 0 \end{aligned}$$

e que:

$$\begin{aligned} g(x) = f(x) - f(x) - f'(x) \cdot (x - x) - \cdots \\ \cdots - \frac{f^{(n)}(x)}{n!} \cdot (x - x)^n - R_{n,x}(x) \cdot \frac{\cancel{(x - x)^{n+1}}}{(x - x_0)^{n+1}} = 0 \end{aligned}$$

segue do **Teorema de Rolle** que existe $\xi \in]x_0, x[$ tal que $g'(\xi) = 0$.

Derivando g e calculando em ξ, obtemos:

$$R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x - x_0)^{n+1}$$

$$g'(t) = -f'(t) - \overbrace{\left[f''(t)\cdot(x-t) - f'(t)\right]}^{=\frac{d}{dt}(f'(t)\cdot(x-t))} - \overbrace{\left[\frac{f^{(3)}(t)}{2!}\cdot(x-t)^2 - f''(t)\cdot(x-t)\right]}^{=\frac{d}{dt}\left(\frac{f''(t)}{2}\cdot(x-t)^2\right)} -$$

$$- \overbrace{\left[\frac{f^{(4)}(t)}{4!}\cdot(x-t)^3 - \frac{f^{(3)}(t)}{2!}\cdot(x-t)^2\right]}^{=\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(3)}(t)}{3!}\cdot(x-t)^3\right)} - \cdots - \overbrace{\left[\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n + \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}\cdot(x-t)^{n-1}\right]}^{=\frac{d}{dt}\left(\frac{f^{(n)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n\right)} -$$

$$- \overbrace{\left[(n+1)\cdot\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot(x-t)^n\right]}^{=\frac{d}{dt}\left(R_{n,x_0}(x)\cdot\frac{(x-t)^{n+1}}{(x-x_0)^{n+1}}\right)}$$

$$\Rightarrow g'(t) = -\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}\cdot(x-t)^n - (n+1)\cdot\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot(x-t)^n$$

$$\Rightarrow 0 = g'(\xi) = -\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}\cdot(x-\xi)^n - (n+1)\cdot\frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot(x-\xi)^n$$

$$\iff \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)\cdot n!}\cdot\cancel{(x-\xi)^n} = \frac{R_{n,x_0}(x)}{(x-x_0)^{n+1}}\cdot\cancel{(x-\xi)^n}$$

$$\iff R_{n,x_0}(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}$$

$\square$

Se fizermos a hipótese adicional de que $f^{(n+1)}$ seja limitada em algum intervalo aberto contendo x_0, digamos, $]x_0-\delta, x_0+\delta[$, por uma constante $M > 0$, então obtemos a seguinte estimativa:

$$|R_{n,x_0}(x)| = \left|\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\cdot(x-x_0)^{n+1}\right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!}\cdot|x-x_0|^{n+1} \le \frac{M\cdot|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

Exemplo 68. *No caso da função $f(x) = e^x$, vimos que sua série de Taylor em torno de 0 é dada por:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}\cdot x^n = 1 + x + \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \cdots$$

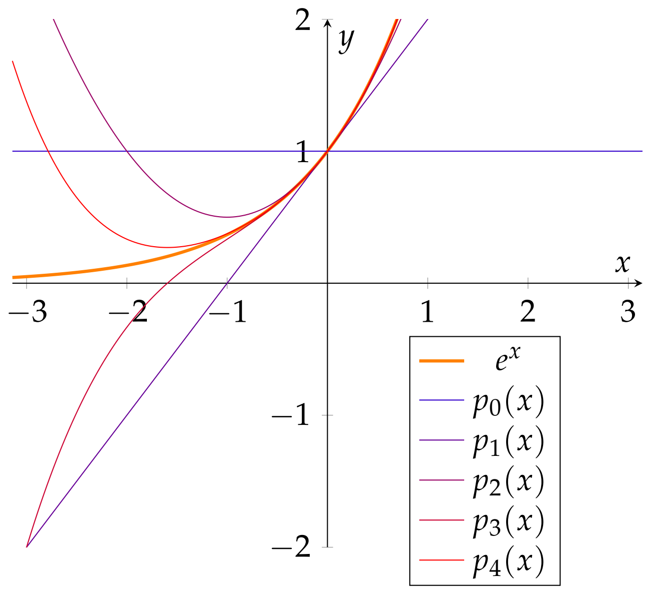
de modo que o polinômio de Taylor de ordem m é dado por:

$$p_m(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \cdots + \frac{1}{m!} \cdot x^m$$

Observe abaixo os primeiros 5 polinômios de Taylor de $f(x) = e^x$, e veja como suas formas se aproximam do gráfico de f para ordens cada vez mais elevadas dos polinômios. Temos:

$$\begin{cases} p_0(x) = 1 \\ p_1(x) = 1 + x \\ p_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 \\ p_3(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 \\ p_4(x) = 1 + x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 \end{cases}$$

Note, também, que quanto mais nos aproximamos do centro da série de Taylor da função, melhor o polinômio a aproxima.



Se quisermos uma aproximação para e com exata até, por exemplo, a sétima casa decimal, devemos requerer um erro inferior a 10^{-8}. Podemos fazer como segue:

Para $x \in [-1, 1]$, $|f^{(n)}(x)| = |e^x| \leq |e^1| \leq 3$. Logo, o erro cometido ao aproximar $e = e^1$ por seu polinômio de Taylor de ordem n é majorado por:

$$|R_{n,1}(x)| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-0)^{n+1} \right| = \frac{|f^{(n+1)}(\xi)|}{(n+1)!} \cdot |x-0|^{n+1} \leq \frac{3}{(n+1)!} \cdot |x-0|^n$$

Para obtermos $|R_{n,1}(1)| < 10^{-8}$, basta garantirmos que:

$$\frac{3}{(n+1)!} \cdot |1-0|^n < 10^{-8}$$

ou, equivalentemente,

$$10^8 < \frac{(n+1)!}{3}$$

Para $n = 10$, temos $(n+1)! = 11! = 39\,916\,800$, e $11!/3 = 13\,305\,600 > 10^8$, de modo que basta avaliarmos o polinômio de Taylor de ordem 10 em $x = 1$:

$$e = e^1 \approx p_{10}(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!} + \frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} = \frac{9\,864\,101}{3\,628\,800} = 2.718281801$$

De fato, o valor encontrado em uma calculadora é:

$$2.718281828$$

e o erro cometido é, portanto:

$$|2.718281801 - 2.718281828| = 0.00000002731266 = 2.73 \cdot 10^{-8}$$

Exemplo 69. *No caso da função $f(x) = \sin(x)$, vimos que sua série de Taylor é dada por:*

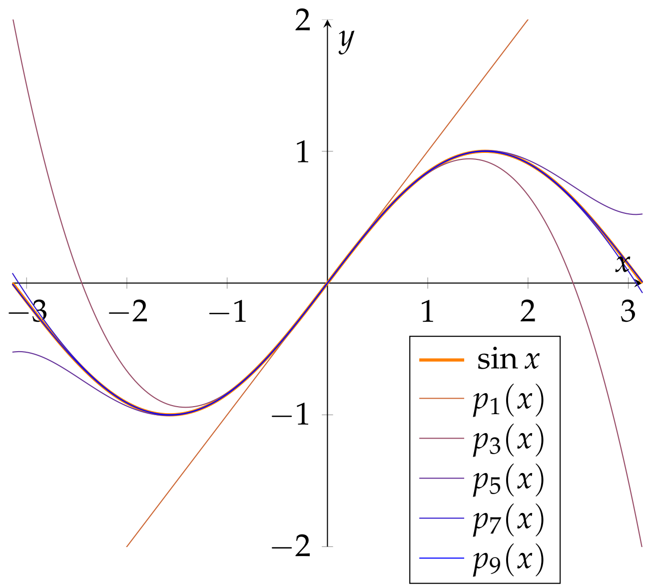
$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} \cdot x^{2k+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

de modo que o polinômio de Taylor de ordem m desta função será:

$$p_m(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \pm \frac{x^m}{m!}$$

ou seja,

$$\begin{cases} p_0(x) = 0 \\ p_1(x) = p_2(x) = x \\ p_3(x) = p_4(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 \\ p_5(x) = p_6(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 \\ p_7(x) = p_8(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 \\ p_9(x) = p_{10}(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \frac{1}{9!} \cdot x^9 \end{cases}$$



O exemplo acima nos esclarece por que dizemos "ordem" de um polinômio de Taylor em vez de "grau": observamos, por exemplo, que como $f^k(0) = 0$ sempre que k é par, tem-se para todo $n \in \mathbb{N}$, $p_n(x) = p_{n+1}(x)$.

Exemplo 70. *Determinar o polinômio de Taylor de grau 6 da função $f(x) = \sin(2x)$ no ponto $x_0 = \frac{\pi}{4}$. Usar este polinômio para determinar um valor aproximado para $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Fazer uma estimativa para o erro.*

Solução: Primeiramente, calculamos:

$$\begin{cases} f(x) = \sin(2x) \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \\ f'(x) = 2 \cdot \cos(2x) \Rightarrow f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f''(x) = -4 \cdot \sin(2x) \Rightarrow f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -24 \\ f^{(3)}(x) = -8 \cdot \cos(2x) \Rightarrow f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -8 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f^{(4)}(x) = 16 \cdot \sin(2x) \Rightarrow f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 16 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 16 \\ f^{(5)}(x) = 32 \cdot \cos(2x) \Rightarrow f^{(5)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = 32 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \\ f^{(6)}(x) = -64 \cdot \sin(2x) \Rightarrow f^{(6)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -64 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -264 \end{cases}$$

Assim, o polinômio de Taylor de ordem 6 é:

$$
\begin{aligned}
p_6(x) = f\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f'\left(\frac{\pi}{4}\right)}{1!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{f''\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{f^{(3)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{3!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^3 + \\
+\frac{f^{(4)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{4!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + \frac{f^{(5)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{5!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^5 + \frac{f^{(6)}\left(\frac{\pi}{4}\right)}{6!}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6 = 1+0+\frac{(-24)}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \\
+0+\frac{16}{4!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 + 0 + \frac{-264}{6!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6 = \\
= 1 - \frac{2^2}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$p_6(x) = 1 - \frac{2^2}{2!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\cdot\left(x-\frac{\pi}{4}\right)^6$$

Usando $p_6(x)$ para determinar $\sin(\pi/3)$, obtemos pela **Fórmula de Taylor**:

$$
\begin{aligned}
\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = p_6\left(\frac{\pi}{6}\right) + R_{6,\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \\
= 1 - \frac{2^2}{2!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^2 + \frac{2^4}{4!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^4 - \frac{2^6}{6!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^6 + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^7 = \\
= 0.86602526 + \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^7
\end{aligned}
$$

para algum $\xi \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right]$. Como $f^{(7)}(x) = -128\cdot\cos(2x)$ e $(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right])|\cos(2x)| \leq 1$, podemos escrever:

$$(\forall x \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right])\left(|f^{(6+1)}(x)| = |-128\cdot\cos(2x)| \leq 128\right)$$

donde concluímos que:

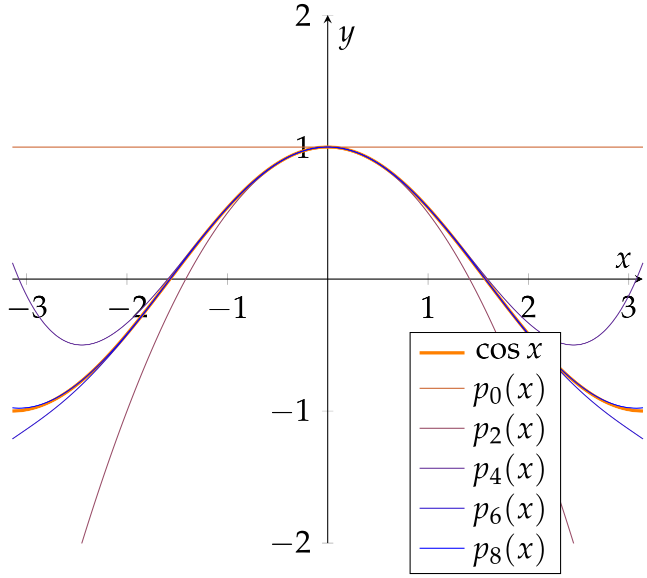
$$|R_{6,\frac{\pi}{6}}\left(\frac{\pi}{6}\right)| \leq \left|\frac{128}{7!}\cdot\left(\frac{\pi}{6}-\frac{\pi}{4}\right)^7\right| \approx 2.1407\cdot 10^{-6}$$

Exemplo 71. *No caso da função $f(x) = \cos(x)$, vimos que sua série de Taylor é dada por:*

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\cdot x^{2k} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

de modo que o polinômio de Taylor de ordem m desta função será:

$$p_m(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots \pm \frac{x^m}{m!}$$



Exemplo 72. *Usar o polinômio de Taylor de ordem 4 para obter uma aproximação de* $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$ *e estimar o erro obtido.*

Solução: Vimos, no exemplo anterior, que:

$$p_4(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!},$$

de modo que pela **Fórmula de Taylor**, podemos escrever:

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = f\left(\frac{\pi}{6}\right) = p_4\left(\frac{\pi}{6}\right) + R_{4,0}\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^2}{2!} + \frac{\left(\frac{\pi}{6}\right)^4}{4!} + R_{4,0}\left(\frac{\pi}{6}\right) + 0.86606 + R_{4,0}\left(\frac{\pi}{6}\right)$$

Como $f^{(5)}(x) = -\sin(x)$ e $(\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{6}\right])(|-\sin(x)| \leq 1)$, podemos afirmar que o resto, $R_6\left(\frac{\pi}{6}\right)$, satisfaz:

$$\left|R_6\left(\frac{\pi}{6}\right)\right| = \left|\frac{f^{(4+1)}(\xi)}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5\right| = \frac{|-\sin(\xi)|}{5!} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \leq \frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{6}\right)^5 \approx 0.000327$$

Exemplo 73. *Apresentar a série de MacLaurin de* e^{-x^2}*, bem como seu raio de convergência.*

Solução: Neste caso, aplicamos a **Proposição 40** fazendo $u(x) = -x^2$ e $g(y) = e^y$. Como para todo $y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$g(y) = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{y^5}{5!} + \cdots$$

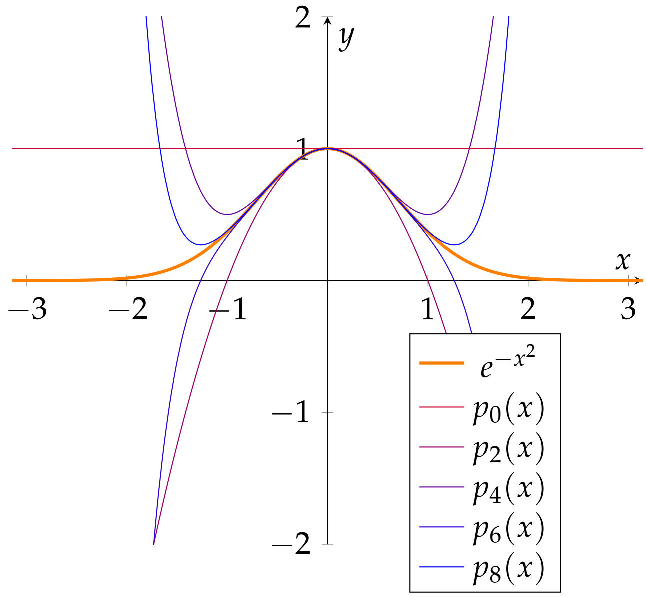
e portanto:

$$e^{-x^2} = g(u(x)) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{n!}$$

Seus primeiros polinômios de Taylor são:

$$\begin{cases} p_0(x) = p_1(x) = 1 \\ p_2(x) = p_3(x) = 1 - x^2 \\ p_4(x) = p_5(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} \\ p_6(x) = p_7(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} \\ p_8(x) = p_9(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} \\ p_{10}(x) = p_{11}(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \frac{x^8}{4!} - \frac{x^{10}}{5!} \end{cases}$$

O intervalo de convergência é o mesmo de g, ou seja, é $\mathbb{R}$.



Exemplo 74. *Obter uma estimativa de:*

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

utilizando um polinômio de Taylor de ordem 6 *e estimando o erro.*

Solução: Vimos que o polinômio de Taylor de ordem 6 é:

$$p_6(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!},$$

de modo que pela **Fórmula de Taylor**, podemos escrever:

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + R_{7,0}(x)$$

onde:

$$|R_{7,0}(x)| = \frac{|f^{(6+1)}(\xi)|}{7!} \cdot |x|^7$$

Temos $f^{(7)}(x) = -2\left(64e^{-x^2}x^7 - 672e^{-x^2}x^5 + 1680e^{-x^2}x^3 - 840e^{-x^2}x\right)$, que em $[0,1]$ pode ser majorado por:

$$|f^{(7)}(x)| = |-2\left(64e^{-x^2}x^7 - 672e^{-x^2}x^5 + 1680e^{-x^2}x^3 - 840e^{-x^2}x\right)| \leq$$
$$\leq 2 \cdot (|64| + |672| + |1680| + |840|) = 6512$$

de modo que:

$$(\forall x \in [0,1])(|f^{(7)}(x)| \leq 6512)$$

de modo que:

$$|R_{7,0}(x)| = \left| \frac{f^{(7)}(\xi)}{7!} \cdot x^7 \right| \leq \frac{6512}{7!} \approx 1.2920$$

Pela aproximação:

$$e^{-x^2} \approx p_6(x) = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}$$

segue que:

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!}\right) dx = \left[x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{10} - \frac{x^7}{42}\right]_0^1 = \frac{26}{35} = 0.7428571429$$

O valor encontrado em uma calculadora científica é 0.74682413.

A partir da estimativa para o resto da aproximação polinomial dada no **Teorema 67**, obtemos uma condição que garante que uma função coincide com sua série de MacLaurin.

Proposição 75. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de classe $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Se existir $\rho > 0$ tal que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tivermos:*

$$(\forall x \in [-\rho, \rho])(|f^{(n)}(x)| \leq M_n)$$

e:

$$\lim_{n\to\infty} M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!} = 0,$$

então para todo $x \in [-\rho, \rho]$, teremos:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot x^n$$

e portanto $p_n \xrightarrow{u} f$ neste intervalo.

Demonstração. Vamos considerar apenas o caso em que $x \in [0, \rho]$, sendo que o caso em que $x \in [-\rho, 0]$ é análogo. Temos:

$$(\forall x \in [0, \rho]) \left(-M_n \leq f^{(n)}(x) \leq M_n\right)$$

Integrando a desigualdade acima de 0 a $t \in [0, \rho]$, obtemos:

$$\int_0^t M_n dx \leq \int_0^t f^{(n)}(x) dx \leq \int_0^t M_n dx,$$

de modo que:

$$-M_n \cdot t \leq f^{(n-1)}(t) - f^{(n-1)}(0) \leq M_n \cdot t.$$

Trocando t por x, obtemos:

$$(\forall x \in [0, \rho]) \left(-M_n \cdot x \leq f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) \leq M_n \cdot x\right)$$

Integrando a desigualdade acima de 0 até $t \in [0, \rho]$, obtemos:

$$\int_0^t -M_n \cdot x dx \leq \int_0^t [f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)] dx \leq \int_0^t M_n \cdot x dx,$$

de modo que:

$$-M_n \cdot \frac{t^2}{2} \leq f^{(n-2)}(t) - f^{(n-2)}(0) \cdot t \leq M_n \cdot \frac{t^2}{2}$$

Trocando t por x, tem-se:

$$(\forall x \in [0,\rho])\left(-M_n \cdot \frac{x^2}{2} \leq f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0)x \leq M_n \cdot \frac{x^2}{2}\right)$$

Integrando os membros das desigualdades acima, obtemos:

$$\int_0^t -M_n \cdot \frac{x^2}{2}dx \leq \int_0^t [f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(0)x]dx \leq \int_0^t M_n \cdot \frac{x^2}{2}dx$$

$$-M_n \cdot \frac{t^3}{3!} \leq f^{(n-3)}(t) - f^{(n-3)}(0) \cdot t - f^{(n-2)}(0)\frac{t^2}{2} \leq M_n \cdot \frac{t^3}{3!}$$

Trocando t por x, segue que:

$$(\forall x \in [0,\rho])\left(-M_n \cdot \frac{x^3}{3!} \leq f^{(n-3)}(x) - f^{(n-3)}(0) - f^{(n-3)}(0) \cdot x - f^{(n-2)}(0) \cdot \frac{x^2}{2} \leq M_n \cdot \frac{x^3}{3!}\right)$$

Depois de repetir este procedimento n vezes (integrar a desigualdade anterior de 0 até $t \in [0,\rho]$ e depois substituir t por x), obtemos as seguintes desigualdades:

$$(\forall x \in [0,\rho])\left(-M_n \cdot \frac{x^n}{n!} \leq f(x) - f(0) - f'(0) \cdot x - \cdots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1} \leq M_n \cdot \frac{x^n}{n!}\right)$$

Colocando o sinal de menos em evidência no termo do meio, obtemos:

$$(\forall x \in [0,\rho])\left(-M_n \cdot \frac{x^n}{n!} \leq f(x) - \overbrace{\left(f(0) + f'(0) \cdot x + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!} \cdot x^{n-1}\right)}^{=p_{n-1}(x)} \leq M_n \cdot \frac{x^n}{n!}\right)$$

e como $x \in [0,\rho]$, tem-se:

$$-M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!} \leq f(x) - p_{n-1}(x) \leq M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!}$$

de modo que:

$$(\forall x \in [0,\rho])\left(|f(x) - p_{n-1}(x)| \leq M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!}\right)$$

Agora temos também, por hipótese:

$$\lim_{n\to\infty} M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!} = 0$$

de modo que dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, e portanto:

$$(\forall x \in [0, \rho]) \left(|f(x) - p_{n-1}(x)| \leq M_n \cdot \frac{\rho^n}{n!} < \varepsilon \right),$$

e a convergência é, de fato, uniforme. □

6 Multiplicação, Divisão e Composição de Séries de Potências

Grande parte da utilidade das séries de potências está no fato de que, nos intervalos de convergência, elas podem ser adicionadas, multiplicadas, divididas, compostas, derivadas e integradas, realizando-se as operações "como se fossem polinômios" (somas finitas) em vez de séries infinitas. Nesta seção, descreveremos resultados-chave relativos a essas operações com séries de potências.

Consideremos o problema de multiplicar duas séries de potências:

$$a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + \cdots \quad \text{e} \quad b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot x^2 + \cdots \tag{16}$$

Aplicando o procedimento formal algébrico, como se as séries fossem polinômios, o resultado seria a nova série de potências:

$$\begin{aligned} & a_0 \cdot b_0 + (a_0 \cdot b_1 + a_1 \cdot b_0) \cdot x + (a_0 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_0) \cdot x^2 + \cdots = \\ & \quad = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0) \cdot x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i} \right) \cdot x^n \end{aligned} \tag{17}$$

A justificativa do porquê de multiplicarmos séries de potências como fizemos em (17) está no seguinte:

Teorema 76. *Se $A = \sum a_n$ e $B = \sum b_n$ são duas séries absolutamente convergentes, então a chamada série produto, $\sum c_n$, onde $c_n = \sum_{i=0}^{n} a_i \cdot b_{n-i}$, também é absolutamente convergente e, além disso:*

$$A \cdot B = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 \cdot b_n + a_1 \cdot b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} \cdot b_1 + a_n \cdot b_0)$$

Demonstração. Sejam A_n e B_n as $n-$ésimas somas parciais de $\sum a_n$ e $\sum b_n$, respectivamente, ou seja:

$$A_n = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$
$$B_n = b_0 + b_1 + \cdots + b_n$$
e seja C_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum c_n$. Analigamente, sejam A'_n e B'_n as $n-$ésimas somas parciais reduzidas de $\sum |a_n|$ e $\sum |b_n|$, respectivamente, e seja C'_n a $n-$ésima soma parcial de $\sum c'_n$, onde $c'_n = |a_0| \cdot |b_n| + |a_1| \cdot |b_{n-1}| + \cdots + |a_n| \cdot |b_0|$. Para cada índice $n \in \mathbb{N}$ dado, seja m o maior inteiro menor do que $n/2$, ou seja, $m \leq n/2 < m+1$.

É fácil ver que o produto $A'_n \cdot B'_n$ contém todos os termos $|a_i| \cdot |b_j|$ que aparecem em C'_n; e todos os termos do produto $A'_m \cdot B'_m$ aparecem em C'_n. Portanto, tem-se:

$$A'_m \cdot B'_m \leq C'_n \leq A'_n \cdot B'_n$$

Como $\lim_{m\to\infty} n = \infty$, segue do **Teorema do Confronto** que $(C'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $A' \cdot B'$.

Observe que $(\forall n \in \mathbb{N})(|c_n| \leq c'_n)$, de modo que a série produto, $\sum c_n$, é absolutamente convergente. Seja C o valor para o qual a série $\sum c_n$ converge. Resta provarmos que $C = A \cdot B$. Para isto, observe que cada termo da diferença $A'_n \cdot B'_n - C'_n$ é o módulo do termo correspondente à diferença $A_n \cdot B_n - C_n$, portanto:

$$0 \leq |A_n \cdot B_n - C_n| \leq |A'_n \cdot B'_n - C'_n|$$

Como $\lim_{n\to\infty} |A'_n \cdot B'_n - C'_n| = 0$, segue do **Teorema do Confronto** que $\lim_{n\to\infty} |A_n \cdot B_n - C_n| = 0$, ou seja, $A \cdot B = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot \lim_{n\to\infty} B_n = \lim_{n\to\infty} A_n \cdot B_n = \lim_{n\to\infty} C_n = C$.

□

Conforme mencionamos anteriormente, o **Teorema 76** justifica o produto de série de potências dado em (76), pressupondo, evidentemente, que as séries $\sum a_n \cdot x^n$ e $\sum b_n \cdot x^n$ tenham raios de convergência positivos. A série do produto converge pelo menos no domínio $|x| < R$, sendo R o menor dos raios de convergência dessas séries.

Teorema 77 (produto de séries de potências). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$, $R_1 > 0$ e $R_2 > 0$ os raios de convergência das séries de potências $\sum a_n \cdot (x - x_0)^n$ e $\sum b_n \cdot (x - x_0)^n$, respectivamente. Se definirmos as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: &]x_0 - R_1, x_0 + R_1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: &]x_0 - R_2, x_0 + R_2[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot (x - x_0)^n \end{array}$$

então a série de potências dada por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{n} a_j \cdot b_{n-j} \right) \cdot (x - x_0)^n$$

converge para a função

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: &]x_0 - R, x_0 + R[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

onde $R = \min\{R_1, R_2\}$.

Exemplo 78. *Dar os termos até grau 5 da série de MacLaurin de* $\sin(x) \cdot \cos(x)$.

Solução: Temos, para todo $x \in \mathbb{R}$:

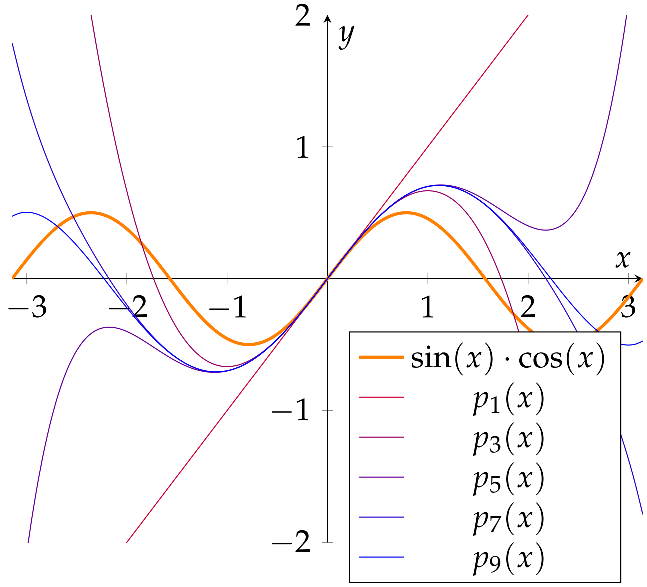
$$\sin(x) = x - \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 - \frac{1}{7!} \cdot x^7 + \cdots = x - \frac{1}{6} \cdot x^3 + \frac{1}{120} \cdot x^5 - \frac{1}{5040} \cdot x^7 + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 - \frac{1}{6!} \cdot x^6 + \cdots = 1 - \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{24} \cdot x^4 - \frac{1}{720} \cdot x^6 + \cdots$$

de modo que:

$$\sin(x)\cdot\cos(x) = \left(x - \frac{1}{3!}\cdot x^3 + \frac{1}{5!}\cdot x^5 - \frac{1}{7!}\cdot x^7 + \cdots\right)\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{4!}\cdot x^4 - \frac{1}{6!}\cdot x^6 + \cdots\right) =$$
$$= x\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) - \frac{1}{6}\cdot x^3\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) +$$
$$+ \frac{1}{120}\cdot x^5\cdot\left(1 - \frac{1}{2}\cdot x^2 + \frac{1}{24}\cdot x^4 - \frac{1}{720}\cdot x^6 + \cdots\right) - \cdots =$$
$$= x - \frac{1}{2}\cdot x^3 + \frac{1}{24}\cdot x^5 - \cdots - \frac{1}{6}\cdot x^3 + \frac{1}{12}\cdot x^5 - \cdots + \frac{1}{120}\cdot x^5 - \cdots =$$
$$= x - \frac{2}{3}\cdot x^3 + \frac{2}{15}\cdot x^5 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

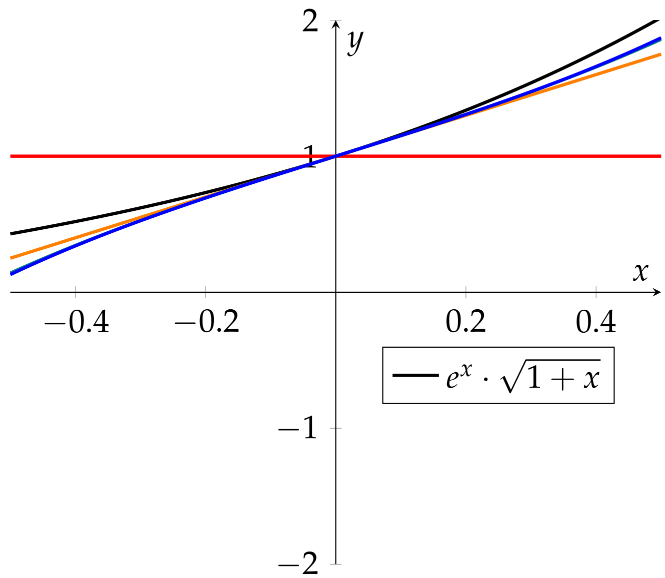
Uma vez que as duas séries convergem para todo $x \in \mathbb{R}$, o intervalo de convergência da série acima é $\mathbb{R}$.



Exemplo 79. *Obter o desenvolvimento do produto* $e^x\cdot\sqrt{1+x}$ *em série de potências de* x *em torno de* 0.

Solução: Temos:

$$e^x\cdot\sqrt{1+x} = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots\right)\cdot\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + \frac{x^3}{16} + \cdots\right) =$$
$$= 1 + \frac{3}{2}\cdot x + \frac{7}{8}\cdot x^3 + \frac{17}{48}\cdot x^5 + \cdots$$



Como se vê no exemplo acima, não é fácil obter uma forma geral simples para o termo genérico deste desenvolvimento, É importante observar, todavia, que é sempre possível calcular os primeiros coeficientes da série, o que muitas vezes é suficiente para as aplicações.

Com o **Teorema 76**, podemos obter a série de potências de uma função $1/f$ conhecendo a série de potências de f. Assim, colocando $1/f = q = \sum a_n \cdot x^n$, determinamos os coeficientes q_n a partir da relação $f \cdot q = 1$. Devemos ter $a_0 \cdot q_0 = 1$ e, para todo $n \in \mathbb{N}$

$$a_0 \cdot q_n + a_1 \cdot q_{n-1} + \cdots + a_n \cdot q_0 = 0$$

Daqui obtemos todos os coeficientes q_n:

$$\begin{cases} q_0 = \dfrac{1}{a_0} \\ a_0 \cdot q_1 + a_1 \cdot q_0 = 0 \Rightarrow q_1 = -\dfrac{a_1 \cdot q_0}{a_0} \\ a_0 \cdot q_2 + a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_0 = 0 \Rightarrow q_2 = -\dfrac{a_1 \cdot q_1 + a_2 \cdot q_0}{a_0} \end{cases}$$

e assim por diante.

Exemplo 80. *Obter a série de potências de*

Um procedimento análogo a esse permite obter o desenvolvimento, em potências de x, de um quociente do tipo f/g (desde que, evidentemente, $g(0) = b_0 \neq 0$):

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_0 + a_1 \cdot x + \cdots}{b_0 + b_1 \cdot x + \cdots} = \frac{a_0}{b_0} + \cdots$$

Exemplo 81. *Dar os termos até grau 6 da série de MacLaurin de $f(x) = \sec(x)$. Determinar, ainda o raio de convergência.*

Solução: Temos $\sec(x) = \dfrac{1}{\cos(x)}$, e sabendo que:

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

podemos escrever $\cos(x) = 1 - z$, onde:

$$z = \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + \cdots$$

de modo que:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)} = \frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + z^3 + \cdots$$

para valores de z com $|z| < 1$. Temos:

$$z^2 = \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{24} + \text{ termos de grau mais alto}$$

$$z^3 = \frac{x^6}{8} + \text{ termos de grau mais alto}$$

O cálculo acima mostra que $\sec(x) = 1 + \dfrac{1}{2} \cdot x^2 + \dfrac{5}{24} \cdot x^4 + \dfrac{61}{720} \cdot x^6 + \cdots$

O raio de convergência desta série de potências é 1.

Exemplo 82. *Dar os termos até grau 6 da série de Maclaurin de $f(x) = \dfrac{x^2}{\cos(x)}$. Determinar, ainda o raio de convergência.*

Solução: Dividimos x^2 pela série de potências de $\cos(x)$ “como se fossem polinômios”:

$$\begin{array}{rr|l}
 & x^2 & 1 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{24}x^4 - \cdots \\ \cline{3-3}
- & x^2 - \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{24}x^6 - \cdots & x^2 + \frac{1}{2} \cdot x^4 + \frac{5}{24}x^6 + \cdots \\ \cline{1-2}
 & \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{24}x^6 - \cdots & \\
- & \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{4}x^6 - \cdots & \\ \cline{1-2}
 & \frac{5}{24}x^6 - \cdots &
\end{array}$$

O cálculo acima mostra que $x^2/\cos(x) = x^2 + \frac{1}{2}x^4 + \frac{5}{24}x^6 + \cdots$

O raio de convergência desta série de potências é $\pi/2$, uma vez que a série de potências de $\cos(x)$ converge para todo x e zera em $\pm\pi/2$.

Podemos aplicar a **Proposição 39** para obter novas séries de MacLaurin a partir de séries já conhecidas.

7 Funções Definidas por Séries

Até agora só temos obtido desenvolvimentos em séries de potências de funções conhecidas, ou então, dada uma série de potências, temos procurado identificá-la com o desenvolvimento de alguma função já conhecida anteriormente.

Mas a importância das séries de potência não reside apenas nisso. Elas são usadas para definir funções novas, do mesmo modo que a integral é assim utilizada. De fato, podemos imaginar uma série de potências qualquer, como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{3n^2 + 4n + 1}$$

Pelo **Teste da Razão**, é fácil ver que essa série converge quando $|x| < 1$; logo, ela define uma função f com domínio $]-1, 1[$. Uma função dada dessa maneira só muito raramente poderá ser identificada com funções já conhecidas. Um importante exemplo de função oriundo da Física dada por uma série é a função de Bessel de ordem zero, dada por:

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{x^{2n}}{4^n \cdot (n!)^2}$$

Em geral, uma série define uma função totalmente nova. E essa possibilidade de criar novas funções através das séries de potências é extremamente importante para as aplicações. Para resolver equações diferenciais, por exemplo, as séries de potências são um recurso muito poderoso e, frequentemente, nos conduzem à construção de novas funções, que não podem ser expressas em termos de funções já conhecidas mas que, no entanto, devem ser estudadas pela sua grande importância prática.

As séries de potências são também usadas para definir as funções que já nos são familiares, como a exponencial, o seno e o cosseno. Estas três funções, por exemplo, costumam ser definidas por suas séries de potências. Esse procedimento é preferível em Análise Matemática, pois evita, então, a necessidade de utilizar conceitos geométricos na definição dessas funções.

As funções que admitem desenvolvimentos em séries de potência formam uma classe importante, a das chamadas **funções analíticas**. Assim, são analíticas as funções trigonométricas, a função exponencial, o logaritmo e as demais funções que já nos são familiares e que admitem um desenvolvimento em série de potências.

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo das Funções de Uma Variável**, volume 2, 7ª edição, Edgard Blücher, 1999.

[2] Ávila, G., **Introdução à Análise Matemática**, Edgard Blücher, 1999.

[3] Boulos, P.; Abud, Z. I., **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume 2, Makron Books, São Paulo, 2000.

[4] Figueiredo, D. G., **Análise I**, 2^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[5] Flemming, D. M., Gonçalves, M. B. **Cálculo A** – Funções, limite, derivação e integração, 6^a edição revista e ampliada. Editora Pearson. São Paulo, 2006.

[6] Gouvêa, F. Q., **Séries Infinitas**, Notas de aula. São Paulo, 1982.

[7] Granville, W. A., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Editora Científica. Rio de Janeiro, 1961.

[8] Hyslop, J. M., **Infinite Series**, 5th edition, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1970.

[9] Lima, E.L., **Curso de Análise**, volume 1, 14^a edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2016.

[10] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.