MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
1^o semestre de 2021
Agenda 04

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Introdução

Nestas notas, introduziremos o conceito de sequência, dando alguns exemplos e provando algumas de suas propriedades.

Vamos utilizar as sequências como um primeiro "campo de testes" para o estudo de limites, uma vez que nosso cérebro tem mais familiaridade com contextos discretos (como aquele em que se insere o conjunto dos números naturais) do que com contextos contínuos (como aquele em que se insere o conjunto dos números reais).

Apresentamos, também, as noções de vizinhança (bilateral, lateral à esquerda e lateral à direita) e definiremos ponto de acumulação. Encerraremos apresentando um resultado que garante, sob certas circunstâncias, ponto de acumulação para conjuntos.

1 Preliminares

Nesta seção apresentamos três observações que, embora extremamente simples, nos auxiliarão ao longo de todo o resto do curso. Começamos com a seguinte importante propriedade dos números reais.

Recorde que, dado $x \in \mathbb{R}$, definimos $|x| = x$, se $x > 0$ e $|x| = -x$, se $x < 0$. Temos, por exemplo:

- $|5| = 5$;

*jeancb@ime.usp.br

- $|-7| = -(-7) = 7$.

Intuitivamente, o módulo de um número real nos dá sua distância da origem.

Teorema 1. *Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ quaisquer. Tem-se:*

(a) $|a+b| \leq |a| + |b|$ *(**Desigualdade Triangular**);*

(b) $||a| - |b|| \leq |a-b|$;

(c) $|a-c| \leq |a-b| + |b-c|$

Demonstração. Ad (a): Temos:

$$- |a| \leq a \leq |a| \tag{1}$$

e:

$$- |b| \leq b \leq |b| \tag{2}$$

Somando os termos correspondentes das desigualdades (1) e (2):

$$-|a| - |b| \leq a + b \leq |a| + |b|,$$

e portanto:

$$|a+b| \leq |a| + |b|.$$

Ad (b): Basta substituirmos, a por $a-b$ na desigualdade provada acima, e teremos:

$$|a| = |(a-b) + b| \leq |a-b| + |b|,$$

ou seja:

$$|a| - |b| \leq |a-b| \tag{3}$$

Substituindo agora b por $b-a$ na desigualdade triangular, obtemos:

$$|b| = |a + (b-a)| \leq |a| + |b-a|$$

$$|b| - |a| \leq |b-a|,$$

ou seja,

$$-|b-a| = -|a-b| \leq |a| - |b|$$

$$- |a-b| \leq |a| - |b| \tag{4}$$

Segue de (3) e de (4) que:

$$-|a-b| \leq |a| - |b| \leq |a-b|,$$

ou seja,

$$||a| - |b|| \leq |a-b|$$

Ad (c): Note que:

$$|a-c| = |a-b+b-c| \overset{\overset{(a)}{\uparrow}}{\leq} |a-b| + |b-c|$$

e segue o resultado. $\square$

Fato: Sejam $a \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$. Temos:

$$x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\iff |x-a| < \varepsilon$$

Com efeito, temos $x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ se, e somente se, $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$, ou equivalentemente, $-\varepsilon < x - a < \varepsilon$, o que expresso em desigualdade modular é:

$$|x-a| < \varepsilon$$

Notação: Dado um número real qualquer, x, denotamos por $\lceil x \rceil$ o **menor inteiro (estritamente) maior do que** x. Damos alguns exemplos em seguida:

- $\lceil 0.2 \rceil = 1$;
- $\lceil 10.43 \rceil = 11$;
- $\lceil 0.333\cdots \rceil = 1$;
- $\lceil e \rceil = 3$;
- $\lceil \pi \rceil = 4$.
- $\lceil 12 \rceil = 13$.

2 Sequências

Uma sequência de números reais é uma função:

Definição 2 (sequência). *Uma **sequência de números reais** é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & M \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

Costumamos denotar a sequência $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $(a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots)$ ou, mais frequentemente, por $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, cada imagem de um número natural n por a, $a_n \in \mathbb{R}$ é o que denominamos um **termo** da sequência. Assim, o conjunto dos termos da sequência é $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e a conceituação aqui envolvida é bem diferente da de sequência. Por exemplo, $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, \cdots)$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ cujos conjunto de termos é $\{1, 2\}$.

Definição 3 (subsequência). *Seja:*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array}$$

uma sequência em $\mathbb{R}$. Dada qualquer função estritamente $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} a \circ \jmath: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & k & \mapsto & a(\jmath(k)) = a_{n_k} \end{array}$$

*é uma **subsequência** de $a : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Costumamos denotar uma subsequência de $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ por $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$.*

Exemplo 4. $(1, 1, 1, \cdots)$ *é uma subsequência de* $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots)$.

Definição 5 (limite de uma sequência). *Seja $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. O número $\bar{a} \in \mathbb{R}$ é o **limite da sequência** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0(\varepsilon)$ então $|a_n - \bar{a}| < \varepsilon$. Equivalentemente, $\bar{a}$ é limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon)$$

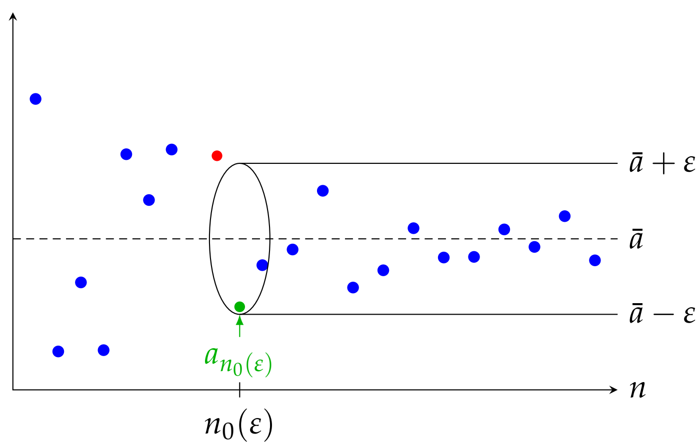
Para indicar que $\bar{a}$ é o limite da sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ escrevemos:

$$a_n \to \bar{a}$$

ou

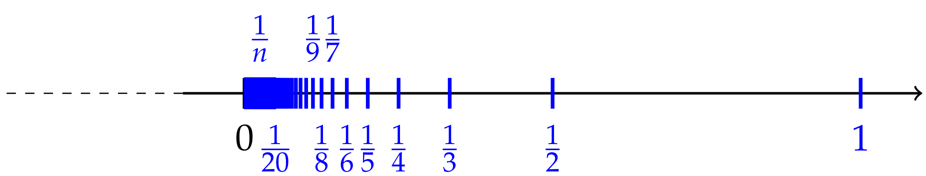
$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$$

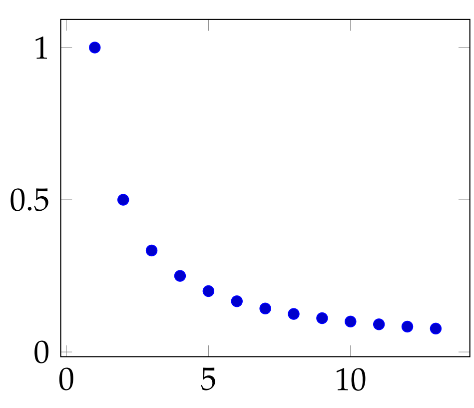
e dizemos que "$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{a}$", ou "o limite de a_n conforme n tende ao infinito é $\bar{a}$". Coloquialmente, dizemos que $\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a}$ se, e somente se, para obter valores de a_n *arbitrariamente* próximos de $\bar{a}$ bastar tomar valores de n *suficientemente* grandes.



Exemplo 6. *Considere a sequência* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. *Tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{n} > 0$, temos:

$$\left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{1}{\varepsilon} < n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, ou seja, o menor *inteiro maior do que $1/\varepsilon$. Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \leq n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

e portanto, se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

Assim, dado $\varepsilon = 0.1$, basta tomarmos $n_0(0.1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{n_0(0.1)} < 0.1$$

ou seja, $n_0(0.1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{0.1} = 10 < n_0(0.1)$$

Tomando $n_0(0.1) = 11$, teremos:

$$n \geq 11 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.1$$

Se quisermos $\varepsilon = 0.01$, basta tomarmos $n_0(0.01) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{n_0(0.01)} < 0.01$$

ou seja, tal que:

$$\frac{1}{0.01} = 100 < n_0(0.01)$$

Tomando $n_0(0.01) = 101$, teremos:

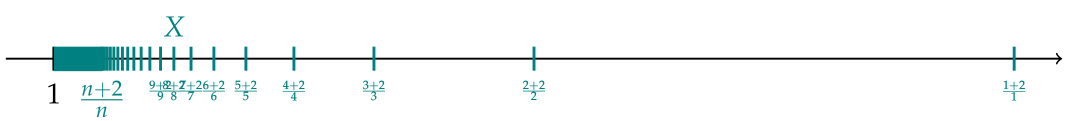
$$n \geq 101 \Rightarrow \left| \frac{1}{n} - 0 \right| < 0.01$$

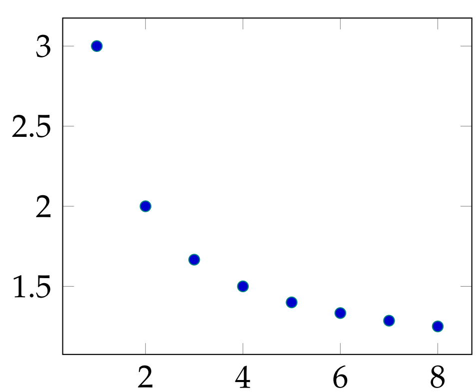
Exemplo 7. *A sequência:*

$$\left(\frac{n+2}{n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$$

converge para 1.

Observe, abaixo, uma representação dos pontos desta sequência distribuídos na reta abaixo:





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$*, existe* $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *tal que:*

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$*,* $\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} > 0$*, temos* $\frac{n+2}{n} - 1 = \frac{2}{n}$*:*

$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{2}{\varepsilon} < n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil 2/\varepsilon \rceil$*, ou seja, o* menor *inteiro maior do que* $2/\varepsilon$*. Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{2}{\varepsilon} \right\rceil \leq n \Rightarrow \frac{2}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{2}{n} < \varepsilon \iff \left|\frac{n+2}{n} - 1\right| = \frac{2}{n} < \varepsilon$$

e portanto, se $n \geq n_0(\varepsilon)$*, então:*

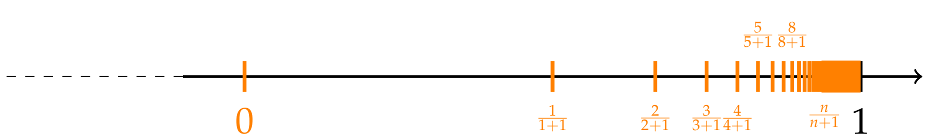
$$\left|\frac{n+2}{n} - 1\right| < \varepsilon$$

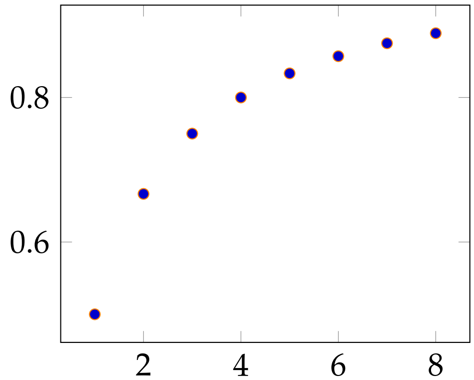
Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{n} = 1.$$

Exemplo 8. *A sequência* $\left(\frac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge para 1:*

$$X = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$





De fato, vamos argumentar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Vamos buscar, portanto, uma condição suficiente *para termos:*

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Notando que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{n+1} - 1 = \frac{n}{n+1} - \frac{n+1}{n+1} = -\frac{1}{n+1}$, temos:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| = \frac{1}{n+1}$$

Logo, vamos buscar uma condição suficiente para que:

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Basta tomarmos:

$$\frac{1}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Assim, vamos tomar $n_0(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon - 1 \rceil$, ou seja, o menor *inteiro maior do que $1/\varepsilon - 1$. Se fizermos isto, teremos a cadeia de implicações:*

$$n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \leq n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n + 1 \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

e portanto, se $n \geq n_0(\varepsilon)$, então:

$$\left| \frac{n}{n+1} - 1 \right| < \varepsilon$$

Desta forma,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1.$$

Definição 9 (soma de sequências). *Dadas duas sequências:*

$$a: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array} \qquad b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & b_n \end{array}$$

a ***soma das sequências*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***e*** $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é*

$$a+b: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n + b_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $a + b = (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definição 10 (produto de sequência por escalar). *Sejam* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e*

$$a: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & a_n \end{array}$$

uma sequência. O ***produto da sequência*** $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ***pelo escalar*** α *é*

$$\alpha \cdot a_n: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ n & \mapsto & \alpha \cdot a_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $\alpha \cdot a = (\alpha \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Proposição 11. *Sejam $\alpha \in \mathbb{R}$,*

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & a_n \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} b: & \mathbb{N} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & b_n \end{array}$$

sequências tais que:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \bar{a} \ \ e \ \ \lim_{n\to\infty} b_n = \bar{b}.$$

Então:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = \bar{a} + \bar{b}.$$

e:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot a_n = \alpha \cdot \bar{a}$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer.

Por hipótese, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que:

$$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow |b_n - \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Desta forma, escolhendo $n_0(\varepsilon) = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |(a_n + b_n) - (\bar{a} + \bar{b})| \leq |a_n - \bar{a}| + |b_n - \bar{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto prova que $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rightarrow (\bar{a} + \bar{b})$.

No caso em que $\alpha = 0$ temos a sequência identicamente nula, que converge para 0. Logo, precisamos demonstrar o resultado apenas para $\alpha \neq 0$.

Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $a_n \rightarrow \bar{a}$, por hipótese, dado $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ existe $n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Desta forma, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)$, tem-se que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow |\alpha \cdot a_n - \alpha \cdot \bar{a}|| \overset{\overset{(\mathbf{N2})}{\uparrow}}{=} |\alpha| \cdot |a_n - \bar{a}| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

□

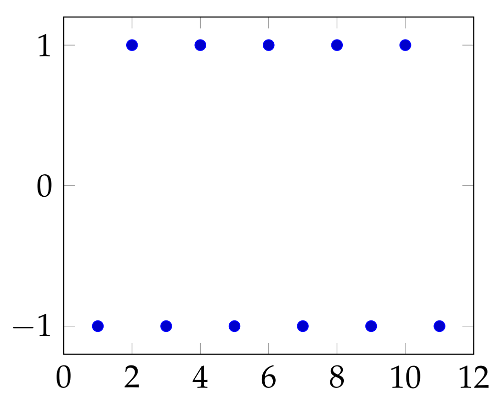
Definição 12. • ***Sequências crescentes:*** *são sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $m < n \Rightarrow a_m \leq a_n$. Se $m < n \Rightarrow a_m < a_n$, dizemos que a sequência é* <u>*estritamente*</u> *crescente.*

• ***Sequências Decrescentes*** *são sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $m < n \Rightarrow a_n \leq a_m$. Se $m < n \Rightarrow a_n < a_m$, dizemos que a sequência é* <u>*estritamente*</u> *decrescente.*

Exemplo 13. *A sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ é estritamente decrescente, ao passo que a sequência*

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$$

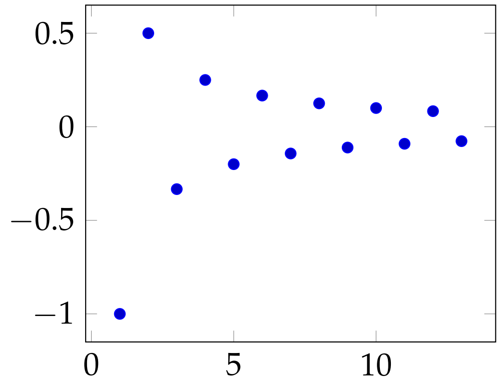
é crescente. Por sua vez, a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ não é monótona.



Exemplo 14. *A sequência:*

$$a_n = \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N}$$

converge para 0*.*



Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Como $\dfrac{1}{n} = \left| \dfrac{(-1)^n}{n} - 0 \right|$*, segue que basta tomarmos* $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \dfrac{1}{\varepsilon} \right\rceil$*, teremos:*

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow \frac{1}{\varepsilon} < n \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \iff \left| \frac{(-1)^n}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Quando uma sequência não converge, dizemos que "a sequência **diverge**".

Exemplo 15. *A sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (n)_{n\in\mathbb{N}}$:*

$$(1, 2, \cdots, n, \cdots)$$

diverge. *De fato, esta sequência se torna maior do que qualquer número que possamos imaginar, bastando tomarmos índices suficientemente grandes. Dado qualquer $M > 0$, existe sempre um número natural $n > \lceil M \rceil$, de modo que:*

$$n \geq \lceil M \rceil \Rightarrow M < n = a_n$$

Neste caso, escrevemos:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} n = \infty$$

Exemplo 16. *Uma **sequência estacionária** é uma sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de $\mathbb{R}$ tal que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow a_n = a_{n+1} = \bar{a}$. Tais sequências são, obviamente, convergentes para $\bar{a}$, o termo que se repete: de fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0$, segue-se que $a_n = \bar{a}$ e $|a_n - \bar{a}| = |\bar{a} - \bar{a}| < \varepsilon$. Em particular, sequências constantes convergem para a constante.*

Exemplo 17. *A sequência* $(x, y, x, y, x, y, \cdots)$*, onde* $x, y \in \mathbb{R}$*,* $x \neq y$*,* não *converge.*

Suponhamos, por absurdo, que a sequência convergisse para $a \in \mathbb{R}$*. Tomando-se* $\varepsilon = \frac{|x-y|}{2}$*,* $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ *deve conter todos os termos da sequência (já que existem apenas dois), de modo que* $x, y \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$*. Segue daí que:*

$$|x-y| \overset{\overset{(c)}{\uparrow}}{\leq} |x-a| + |a-y| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = |x-y|$$

e portanto:

$$|x-y| < |x-y|,$$

o que é um absurdo. Logo, como a sequência não converge para nenhum ponto de $\mathbb{R}$*, a sequência diverge.*

Proposição 18. *Se* $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência convergente em* $\mathbb{R}$*, então o seu limite é único.*

Demonstração. [Estratégia da prova: supor que existam dois limites e derivar, daí, um absurdo] Suponhamos que existam $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{R}$, $\bar{a} \neq \bar{b}$, tais que $\lim a_n = \bar{a}$ e $\lim a_n = \bar{b}$.

Como $\bar{a} \neq \bar{b}$, tem-se que $|\bar{a} - \bar{b}| > 0$, logo, tomando $\varepsilon = \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{2} > 0$, como $a_n \to \bar{a}$, existirá $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon$$

Também, como $a_n \to \bar{b}$, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{b}| < \varepsilon$$

Assim, tomando $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow (|a_n - \bar{a}| < \varepsilon) \& (|a_n - \bar{b}| < \varepsilon))$$

o que implica que, para qualquer $n \geq n_0(\varepsilon)$ vale:

$$|\bar{a} - \bar{b}| \leq |\bar{a} - a_n| + |a_n - \bar{b}| < \varepsilon + \varepsilon = \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{2} + \frac{|\bar{a}-\bar{b}|}{2} = |\bar{a} - \bar{b}|$$

ou seja,

$$|\bar{a} - \bar{b}| < |\bar{a} - \bar{b}|,$$

o que é absurdo. □

Proposição 19. *Se $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{a} \in \mathbb{N}$, então* toda *subsequência de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para $\bar{a}$.*

Demonstração. Sejam $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, em $\mathbb{R}$, convergente para $\bar{a}$, e seja $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente, e considere a subsequência:

$$\begin{array}{rccc} a \circ \jmath : & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & k & \mapsto & a(\jmath(k)) = a_{n_k} \end{array}$$

que denotaremos por $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Devemos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - \bar{a}| < \varepsilon)$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Como, por hipótese, $a_n \to \bar{a}$, dado este $\varepsilon > 0$ existirá $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_n - \bar{a}| < \varepsilon)$$

Como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, sua imagem, $\jmath[\mathbb{N}] \subset \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente. Isto significa que, dado $n_0(\varepsilon)$ existem infinitos elementos de $\jmath[\mathbb{N}]$ que são maiores do que $n_0(\varepsilon)$. Seja:

$$k_0(\varepsilon) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \jmath(k) \geq n_0(\varepsilon)\}$$

Assim, como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, tem-se:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow \jmath(k) \geq \jmath(k_0(\varepsilon)) \geq n_0(\varepsilon)$$

ou seja,

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow n_k \geq n_0(\varepsilon)$$

e portanto:

$$|a_{n_k} - \bar{a}| < \varepsilon$$

Desta forma, segue que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow |a_{n_k} - \bar{a}| < \varepsilon)$$

ou seja,

$$a_{n_k} \to \bar{a}.$$

□

3 Vizinhança (ou "Entorno") de Um Ponto

Uma noção fundamental da topologia de $\mathbb{R}$ é a de "vizinhança". Esta noção procura codificar o que entendemos, intuitivamente, pelo conjunto dos pontos "imediatamente" próximos de certo ponto.

Definição 20 (vizinhança completa [ou bilateral]). *Seja $x_0 \in \mathbb{R}$ qualquer. Uma* ***vizinhança de*** *x_0 é qualquer intervalo aberto ao qual x_0 pertence. Assim, qualquer vizinhança de x_0 é da forma:*

$$\mathcal{V}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) =]x_0 - \varepsilon_1, x_0 + \varepsilon_2[\text{ para certos } \varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$$

Os números ε_1 e ε_2 são chamados de ***raios*** *da vizinhança. Quando $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, temos uma* ***vizinhança simétrica de*** *x_0* ***de raio*** *ε e escrevemos:*

$$\mathcal{V}(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[$$

Podemos expressar a pertinência de um ponto a uma vizinhança (na reta) mediante inequações:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathcal{V}(x_0, \varepsilon_1, \varepsilon_2) \iff (x_0 - \varepsilon_1 < x < x_0 + \varepsilon_2)).$$

No caso de uma vizinhança simétrica,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathcal{V}(x_0, \varepsilon) \iff (x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon)).$$

No Cálculo Diferencial, frequentemente nos interessa estudar o comportamento de funções nas proximidades de certos pontos. A fim de traduzirmos a pertinência de elementos a vizinhanças em termos de inequações modulares - com as quais é mais simples de se trabalhar em diversos sentidos - vamos, por conveniência, nos restringir ao uso das chamadas "vizinhanças simétricas".

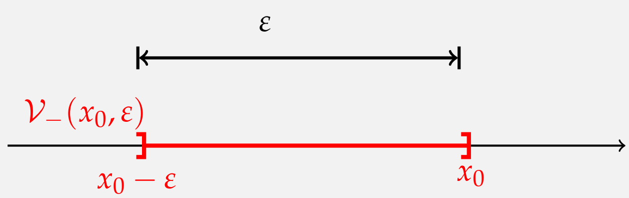
3.1 Vizinhanças Laterais

Na reta, podemos nos aproximar de um ponto tanto pela esquerda, quanto pela direita. Os entes matemáticos que nos ajudarão a tornar precisas essas noções são dados a seguir.

Definição 21 (vizinhança lateral à esquerda). *Sejam* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon > 0$. *Um intervalo da forma:*

$$\mathcal{V}_-(x_0, \varepsilon) =]x_0 - \varepsilon, x_0]$$

é chamado uma ***vizinhança lateral à esquerda de*** x_0 ***com raio*** ε.



Assim,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathcal{V}_-(x_0, \varepsilon) \iff (x_0 - \varepsilon < x \leq x_0))$$

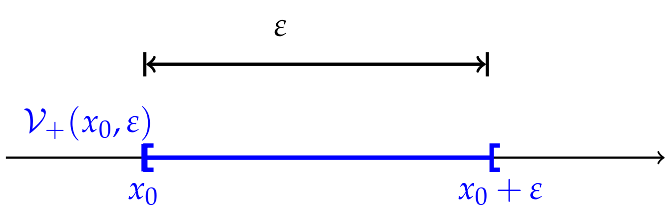
Definição 22 (vizinhança lateral à direita). *Sejam* $x_0 \in \mathbb{R}$ *e* $\varepsilon > 0$. *Um intervalo da forma:*

$$\mathcal{V}_+(x_0, \varepsilon) = [x_0, x_0 + \varepsilon[$$

é chamado uma ***vizinhança lateral à direita de*** x_0 ***com raio*** ε.

Desta forma,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(x \in \mathcal{V}_+(x_0, \varepsilon) \iff (x_0 \leq x < x_0 + \varepsilon))$$



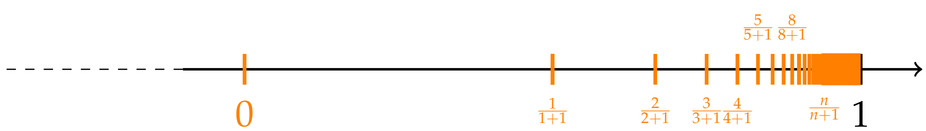
4 Ponto de Acumulação

Definição 23 (ponto de acumulação à direita). *Sejam $x_0 \in \mathbb{R}$ e $A \subseteq \mathbb{R}$. Diz-se que x_0 **é um ponto de acumulação à direita de** X se, e somente se, qualquer vizinhança lateral à esquerda de x_0 contém infinitos pontos de X diferentes de x_0. Simbolicamente, x_0 é ponto de acumulação à direita de X se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\mathcal{V}_-(x_0, \varepsilon) \cap X \setminus \{x_0\} =]x_0 - \varepsilon, x_0] \cap X \setminus \{x_0\} \neq \varnothing)$$

Exemplo 24. *O número 1 é ponto de acumulação à direita do conjunto:*

$$X = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$



Para verificar isto, devemos constatar que para qualquer $\varepsilon > 0$ existe um elemento de X em $]1 - \varepsilon, 1[$. Equivalentemente, devemos verificar que para qualquer $\varepsilon > 0$ é possível encontrar $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{n_0}{n_0 + 1} \in]1 - \varepsilon, 1]$$

$$1 - \varepsilon < \frac{n_0}{n_0 + 1} \leq 1.$$

Como para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $n/(n+1) \leq 1$, as desigualdades acima são verdadeiras se, e somente se:

$$1 - \varepsilon < \frac{n_0}{n_0 + 1}$$

Somando -1 aos dois membros da desigualdade, obtemos:

$$-\varepsilon < \frac{n_0}{n_0 + 1} - 1 = \frac{n_0}{n_0 + 1} - \frac{n_0 + 1}{n_0 + 1} = -\frac{1}{n_0 + 1}$$

$$\frac{1}{n_0 + 1} < \varepsilon.$$

*Assim, dado $\varepsilon > 0$, pela **Propriedade Arquimediana** de $\mathbb{R}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Como $n_0 < n_0 + 1$, tem-se:

$$\frac{1}{n_0+1} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon.$$

e portanto:

$$-\varepsilon < -\frac{1}{n_0+1}$$

$$1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n_0+1}$$

$$1-\varepsilon < 1-\frac{1}{n_0+1} = \frac{n_0+1}{n_0+1} - \frac{1}{n_0+1} = \frac{n_0}{n_0+1}$$

e portanto:

$$1-\varepsilon < \frac{n_0}{n_0+1} \leq 1.$$

Proposição 25. *Se x_0 é um ponto de acumulação à direita de X, então em qualquer vizinhança à direita de x_0 existem infinitos elementos de X diferentes de x_0, e reciprocamente.*

Demonstração. De fato, dado $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n} > 0$, e como x_0 é ponto de acumulação à direita de X, dado este $\varepsilon_n > 0$ existe $x_n \in \mathcal{V}_+(x_0, \varepsilon_n) \cap X \setminus \{x_0\}$. □

Proposição 26. *Se x_0 é um ponto de acumulação à esquerda de X, então em qualquer vizinhança à esquerda de x_0 existem infinitos elementos de X diferentes de x_0, e reciprocamente.*

4.1 Limites Superior e Inferior de Uma Função

Dada uma função de uma variável real a valores reais, $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, temos que f é limitada superiormente ou inferiormente se, e somente se, $\operatorname{im}(f) = f[A] = \{f(x) \in \mathbb{R} \mid x \in A\}$ é um conjunto limitado superior ou inferiormente, respectivamente.

Em se tratando de fnções limitadas, temos as seguintes definições:

Definição 27 (limite superior de uma função). *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais limitada superiormente. O **limite superior de f em A** é:*

$$\limsup f := \sup_{x \in A} f(x) := \sup f[A]$$

Coloquialmente, o limite superior de uma função é o **maior ponto de acumulação de seu conjunto imagem**.

Definição 28 (limite inferior de uma função). *Seja $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função de uma variável real a valores reais limitada inferiormente. O* ***limite inferior de f em A*** *é:*

$$\liminf f := \inf_{x \in A} f(x) := \inf f[A]$$

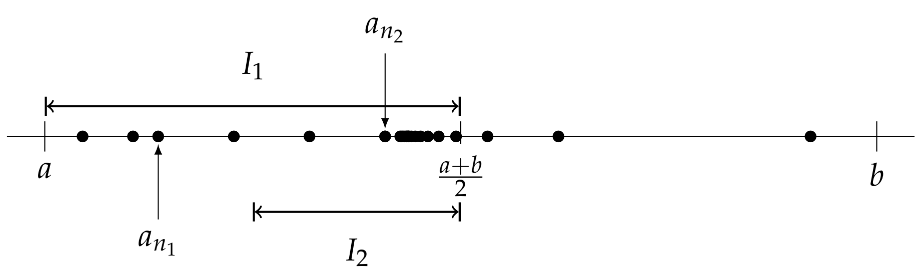
Coloquialmente, o limite inferior de uma função é o **menor ponto de acumulação de seu conjunto imagem**.

4.2 Existência de Pontos de Acumulação: o Teorema de Bolzano-Weierstrass

O teorema a seguir é de extrema importância para o estudo do Cálculo Diferencial, poderoso o suficiente para nos garantir resultados sobre existência de certos objetos matemáticos que veremos posteriormente.

Teorema de Bolzano-Weierstrass: Todo conjunto $X \subseteq \mathbb{R}$ limitado com infinitos números reais admite, pelo menos, um ponto de acumulação em $\mathbb{R}$.

Demonstração. **Ideia da demonstração:** Observe a figura abaixo:



Esta figura nos servirá como um "guia". Sendo o conjunto X limitado, ele "cabe" em um intervalo da forma $[a, b]$, para certos $a, b \in \mathbb{R}$. Como o conjunto X é infinito, em pelo menos uma das metades do intervalo $[a, b]$ haverá uma infinidade de pontos – na figura, é o intervalo I_1 que contém uma infinidade de pontos. Analisamos, na sequência, as metades de I_1, e escolhemos aquela que contiver uma quantidade infinita de pontos – na figura é o intervalo I_2. Repetimos o processo de modo a obter uma sequência de intervalos encaixados, $I_1 \supseteq I_2 \supseteq \cdots \supseteq I_n \supseteq \cdots$. Pelo **Teorema dos Intervalos Encaixados**[1], apresentado no Material Suplementar das Semanas 01, 02 e 03, seguirá que existe um único ponto que pertence

[1]Veja a p. 15 de https://www.ime.usp.br/~jeancb/Material%20Suplementar%20Semana%2001.pdf

a todos estes intervalos. Este será o ponto de acumulação do conjunto X.

Neste caso, nós vamos procurá-lo analisando, em um primeiro momento, em qual das metades do intervalo há infinitos elementos. O processo é repetido para o intervalo que contém infinitos elementos e assim sucessivamente.

Uma vez que X é limitado[2], existem $a, b \in \mathbb{R}$ tais que $a < b$ e:

$$X \subseteq [a, b].$$

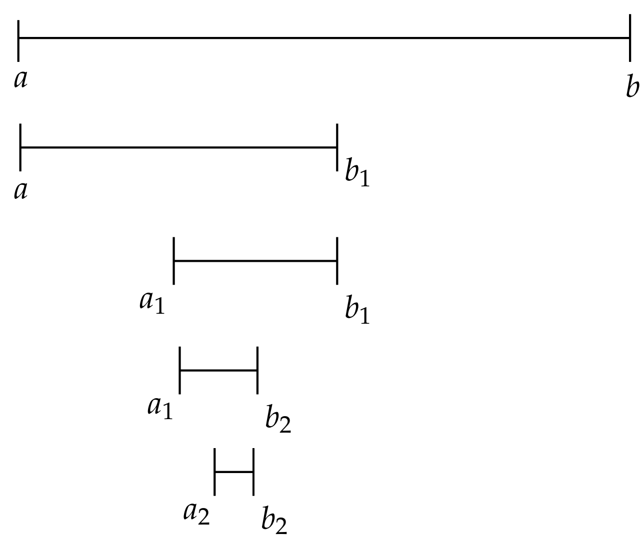
Sendo X infinito, dividindo o intervalo $[a, b]$ pelo ponto médio em dois subintervalos, $[a_1, b_1], [a_2, b_2]$ ao menos um deles conterá infinitos números de X (de fato, um dos dois intervalos, ao menos, deve conter infinitos elementos de X. Se isto não se verificasse, cada subintervalo teria somente um número <u>finito</u> de elementos de X, o que implicaria que X teria uma quantidade finita de elementos, contrariando a hipótese de que X é um conjunto infinito). Sem perda de generalidade, suponhamos que $[a_1, b_1]$ seja um subintervalo de $[a, b]$ com infinitos elementos de X. Este intervalo, evidentemente, tem comprimento igual a $(b - a)/2$.

Com um processo análogo, dividimos o subintervalo $[a_1, b_1]$ em dois subintervalos de comprimento $(b - a)/2^2$, $[a_{1_1}, b_{1_1}]$ e $[a_{1_2}, b_{1_2}]$, sendo que pelo menos um destes intervalos deverá ter infinitos elementos de X. Prosseguindo com este raciocínio, ao final de n passagens obteremos um intervalo $[a_n, b_n]$ de comprimento $(b - a)/2^n$ com infinitos elementos de X.

Deste modo, obtemos uma sequência de intervalos encaixados, cada um dos quais com infinitos elementos de X:

$$[a, b] \supset [a_1, b_1] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$$

Ademais, dado $\varepsilon > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b_n - a_n < \varepsilon$.



[2]cf. **Definição 4** do Material Suplementar

Heurística: Tem-se:

$$\frac{b-a}{2^n} < \frac{\varepsilon}{2} \iff \frac{b-a}{2^{n-1}} < \varepsilon \iff \frac{b-a}{\varepsilon} < 2^{n-1} \iff \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) < n-1$$

e basta tomarmos:

$$n \in \mathbb{N} \text{ tal que } n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) + 1$$

e teremos:

$$b_n - a_n < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, esta família de intervalos encaixados, cada um dos quais com infinitos elementos de X, satisfaz as cláusulas (i) e (ii) do **Teorema dos Intervalos Encaixados** (cf. p. 2 do Material Suplementar). Deste modo, existe um único elemento α tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \leq \alpha \leq b_n)$$

Concluímos portanto que, para todo $\varepsilon > 0$, $\mathcal{V}(\alpha, \varepsilon) \supset [a_n, b_n]$ para $n > \log_2\left(\frac{b-a}{\varepsilon}\right) + 1$, e $[a_n, b_n]$ contém, por construção, infinitos elementos de X. Segue, portanto, que α é um ponto de acumulação de X, ou seja, $\alpha \in X'$.

□

5 O número e

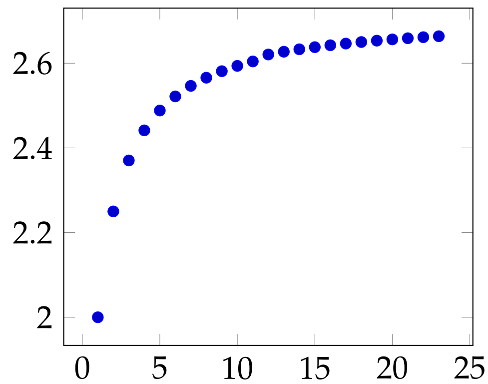
Munidos do **Teorema de Bolzano-Weierstraß**, podemos garantir a existência do número e, como segue.

Consideremos a sequência:

$$\begin{array}{rccc} a: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n \end{array}$$

Afirmamos que esta sequência tem por limite um certo número que é maior do que 2 e menor do que 3.

Observe, abaixo, o gráfico da sequência:



O gráfico acima nos sugere a sequência converge para algum número maior do que 2.6. Veremos, no teorema a seguir, que é precisamente este o caso.

Teorema 29. *A sequência* $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ *converge para um número entre* 2 *e* 3.

Demonstração. Pelo Teorema Binomial, tem-se:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^3+\cdots$$

$$\cdots+\frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdots[n-(n-1)]}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\cdot\left(\frac{1}{n}\right)^n$$

que pode ser escrito, alternativamente, como:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\cdot\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)+\cdots$$

$$\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right)$$

Vamos mostrar agora que sempre que $n<m$ teremos:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{m}\right)^m$$

De fato, passando de n para $n+1$, tem-se $1-\frac{1}{n}<1-\frac{1}{n+1}$, e cada parcela da soma acima cresce:

$$\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{1\cdot 2}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) < \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) <$$
$$< \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)$$

Note, ainda, que mais uma parcela positiva é somada para obtermos $\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n}$, a saber $\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots(n+1)}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)$. Segue, portanto, que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}$$

de modo que se $n < m$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n+k=m$, e portanto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n} < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < \cdots < \left(1+\frac{1}{n+k}\right)^{n+k} = \left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}$$

Assim, concluímos que há pelo menos um elemento de X para cada número natural, sendo X um conjunto infinito.

Se mostrarmos que X é um conjunto limitado, a existência do ponto de acumulação seguirá do **Teorema de Bolzano-Weierstraß**.

Mostremos, agora, a limitação de X: tem-se, para qualquer $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(1-\frac{1}{n}\right) < 1$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right) < 1$$

$$\vdots$$

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right) < 1$$

e portanto:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+1+\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n}$$

Note também que:

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} < \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} < \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdots n} < \frac{1}{2^{n-1}}$$

donde segue que, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}}_{\text{soma da P.G. de razão } \frac{1}{2}}$$

Logo:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1+\left[1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right] = \ = 1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 1+\left[2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right] < 3$$

Como já sabemos que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se $2 \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, segue que dado qualquer elemento x de X tem-se $2 \leq x < 3$. Logo $X \subset [2,3[$, e X é limitado. A existência do ponto de acumulação decorre do **Teorema de Bolzano Weierstraß.** $\square$

Definição 30. *Seja e o único número real (cuja existência é garantida pelo teorema acima) tal que:*

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Pode-se demonstrar que e é um número irracional, e seu valor com dez algarismos significativos é:

$$e = 2.7182818284\cdots$$

Referências

[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, 1^a edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, 5^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[3] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.

[4] https://www.wikiwand.com/en/Bolzano%E2%80%93Weierstrass_theorem