MAT2456 - Cálculo Diferencial e Integral IV
2^o semestre de 2022
Agenda 04

Prof. Jean Cerqueira Berni*

Apresentação

Nesta agenda apresentamos uma motivação para a introdução das chamadas "séries de Fourier" ao procurar soluções de uma equação diferencial que descreve o comportamento da difusão do calor ao longo de uma barra homogênea e isolada. Apresentamos a modelagem matemática detalhada do problema e, apresentando o método de Fourier, concluímos que a solução da equação do calor se escreve como uma série de senos e cossenos.

Apresentamos noções preliminares para o nosso estudo, como o de funções pares, ímpares, Riemann-integráveis e periódicas. Em seguida, deduzimos algumas relações úteis que nos permitirão calcular certas integrais de modo muito mais rápido. Introduzimos o conceito de polinômio trigonométrico e de série trigonométrica, culminando na dedução e definição dos coeficientes de Fourier de certos tipos de funções.

Nós introduzimos, sem demonstração, o **Teorema de Fourier**, que garante dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica e seccionalmente diferenciável, a convergência pontual da série de Fourier para a média dos limites laterais da função no ponto. Calculamos as séries de Fourier de algumas funções, apresentando também os primeiros polinômios trigonométricos para ilustrar como eles aproximam essas funções.

Na seção seguinte, apresentamos a definição de extensão par e ímpar de uma função definida em um intervalo da forma $[0, L]$ com $L > 0$. Posteriormente apresentamos resultados sobre a integração de séries de Fourier e a identidade de Parseval.

*jeancb@ime.usp.br

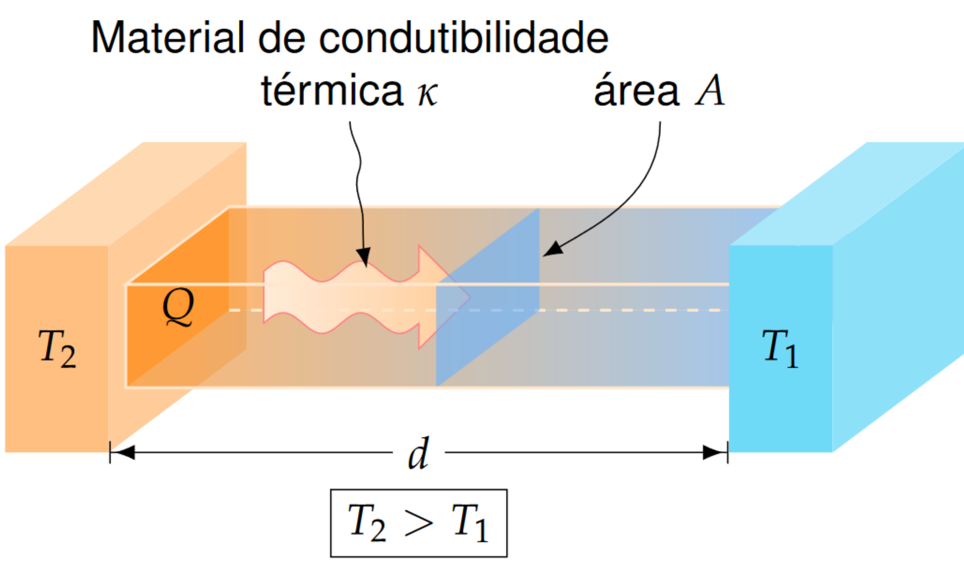
1 Motivação: Dedução da Equação do Calor

Considere uma barra condutora, de dimensão linear preponderante e dimensões seccionais insignificantes, como, por exemplo, um arame bem fino e bem extenso em comprimento, isolado termicamente do meio ambiente a não ser por suas extremidades. Se colocarmos a barra, no sentido deste seu comprimento sobre o eixo Ox, e aquecermos uma das extremidades, o fluxo de calor se dará longitudinalmente, da extremidade mais quente para a mais fria, conforme rege a Lei do Resfriamento. Deste modo, estamos tratando de um problema de condução térmica unidimensional.

Queremos estabelecer uma função:

$$\begin{array}{rccc} u: & R \subset \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,t) & \mapsto & u(x,t) \end{array}$$

que descreva a temperatura num ponto x da barra num dado instante t; esta é nossa motivação.



O matemático francês Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830) obteve, baseado em seus experimentos, uma equação que descreve a quantidade de calor transferida de uma secção transversal para outra por unidade de tempo (fluxo $\frac{Q}{\Delta t}$ de calor, cuja unidade S.I. é W, i.e., o watt [joule por segundo]) em função de suas áreas, A, que supomos constantes, da distância entre duas destas secções, d, e do módulo da diferença entre as temperaturas nestas extremidades, T_1 e T_2.

A **Lei de Fourier**, que modela este fenômeno, nos diz que, fixando um intervalo de tempo Δt, tem-se:

$$\frac{Q}{\Delta t} \propto \frac{A. \mid T_2 - T_1 \mid}{d}$$

onde Q é a quantidade de calor absorvida ou cedida por um material, medida em joules, J, A é a área da secção transversal da barra, T_1 e T_2 são as temperaturas nas extremidades e d é seu comprimento. Inserimos, ainda, uma constante de proporcionalidade denominada condutibilidade térmica, κ, podendo então escrever:

$$\frac{Q}{\Delta t} = \kappa \cdot \frac{A \cdot \mid T_2 - T_1 \mid}{d} \tag{1}$$

A **Lei de Fourier**, como vemos, é independente do tempo (uma vez que o intervalo de tempo é fixado *a priori*), de modo que precisamos de uma função que descreva de modo mais completo a situação da barra, ou seja, de uma função que descreva a temperatura (dependente do fluxo do calor, $\frac{Q}{\Delta t}$) em função do tempo e de sua coordenada espacial, x.

Definamos, agora, a função na qual estamos interessados, sempre considerando que o calor está fluindo da extremidade mais quente para a mais fria.

Recorde, do **Cálculo Diferencial e Integral II**, a seguinte:

Definição 1. *Uma função $u : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, u é de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$ se suas derivadas parciais de segunda ordem, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}$ e $\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, existirem e forem todas contínuas em $U \subset \mathbb{R}^2$.*

Seja $u = u(x,t)$ uma função de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, que descreve a temperatura da barra na sua coordenada x, no instante t.

Para contornar a dificuldade da ausência da variável tempo na **Lei de Fourier**, introduzimos a grandeza fluxo de calor através da seção transversal de coordenada x em um dado instante t como segue:

- Fixamos o tempo em (1), e fazemos $T_2 = u(x+d, t)$ e $T_1 = u(x,t)$;
- Passamos o limite da função $u(x+d,t) - u(x,t)$ quando d tende a zero em (1).

Assim, se denotarmos por $q(x,t)$ o fluxo de calor através de x no instante t, temos:

$$q(x,t) := \kappa \cdot A \cdot \lim_{d \to 0} \frac{\mid u(x+d,t) - u(x,t) \mid}{d} = \kappa \cdot A \cdot \lim_{d \to 0} \frac{u(x+d,t) - u(x,t)}{d} \tag{2}$$

Como a temperatura decresce conforme x cresce, introduzimos um sinal de menos em (2), que fica:

$$q(x,t) = -\kappa.A.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \tag{3}$$

Fixemos, agora, para $\delta > 0$, um elemento entre os pontos x_0 e $x_0 + \delta$, ao longo do eixo dos x. Calcularemos o calor que entra na secção transversal de coordenada x_0 no período de tempo, para $\tau > 0$ entre t_0 e $t_0 + \tau$.

Fixe um ponto qualquer da barra, x_0, e defina $\Delta\overline{Q}$ como sendo a quantidade de calor que entra na região delimitada entre x_0 e $x_0 + \delta$ num intervalo de tempo arbitrário, de t_0 a $t_0 + \tau$. Esta quantidade é escrita como:

$$\Delta\overline{Q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0,t)dt - \int_{t_0}^{t_0+\tau} q(x_0+\delta,t)dt \tag{4}$$

Pela Lei de Fourier, (3), temos:

$$\Delta\overline{Q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \kappa \cdot \left[\frac{\partial u(x_0+\delta,t)}{\partial x} - \frac{\partial u(x_0,t)}{\partial x}\right] \cdot Adt$$

Usando o **Teorema Fundamental do Cálculo** em (4), temos:

$$\Delta\overline{Q} = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cdot \kappa \cdot A \cdot dxdt \tag{5}$$

Definição 2 (calor específico). *Calor específico é uma grandeza física que define a variação térmica de determinada substância ao receber determinada quantidade de calor. A unidade no S.I. é $\frac{J}{kg.K}$ (Joule por Quilograma Kelvin). Uma outra unidade mais usual para calor específico é $\frac{cal}{g.^\circ C}$ (caloria por grama grau Celsius).*

Sabemos, da Física básica, que:

$$\Delta\overline{Q} = m \cdot c \cdot \Delta\theta = \rho \cdot V \cdot c\Delta\theta = \rho \cdot V \cdot c[u(x_0,t_0+\tau) - u(x_0,t_0)]$$

Onde ρ é a densidade volumétrica da barra, c o calor específico do material que a constitui, V seu volume e $\Delta\theta$ o incremento de temperatura que o pedaço da barra sofre num dado intervalo de tempo.

Temos, então :

$$\Delta\overline{Q} = \rho \cdot V \cdot c[u(x_0,t_0+\tau) - u(x_0,t_0)]$$

Mas observe que:

$$V = A \cdot \int_{x_0}^{x_0+\delta} dx$$

Então:

$$\Delta\overline{Q} = \rho \cdot A \cdot c \cdot \int_{x_0}^{x_0+\delta} [u(x_0, t_0 + \tau) - u(x_0, t_0)]dx$$

Usando novamente o **Teorema Fundamental do Cálculo**:

$$\Delta\overline{Q} = \rho \cdot A \cdot c \cdot \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} dtdx \tag{6}$$

Comparando (6) e (5), temos que:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot c \cdot \rho \cdot A dtdx = \int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x0}^{x_0+\delta} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cdot \kappa \cdot A \cdot dxdt$$

Chegamos em:

$$\int_{t_0}^{t_0+\tau} \int_{x_0}^{x_0+\delta} \left(\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \cdot \kappa \cdot A - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \cdot c \cdot \rho \cdot A \right) dtdx = 0$$

O argumento da integral acima é contínuo, pois supusemos que $u = u(x,t)$ era de classe $\mathcal{C}^2(U, \mathbb{R})$, pelo menos. Ademais, a igualdade acima é válida para todo $t_0, \tau, x_0, \delta \in \overline{R}$. Afirmamos que o argumento da integral acima é identicamente nulo.

Suponhamos, *ab absurdo*, que este seja não-nulo. Então este argumento seria positivo ou negativo para algum $t_0, \tau, x_0, \delta \in \overline{R}$. Suponha-o, sem perda de generalidade, positivo. Como este argumento é contínuo, segue que existe uma bola aberta $B \subset \overline{R}$ na qual este é positivo, o que implica na não-nulidade da integral, contrariando o fato da igualdade acima valer para qualquer vizinhança, o que é absurdo. Logo, segue o fato. Portanto:

$$\kappa \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = c \cdot \rho \frac{\partial u}{\partial t}$$

Ou seja:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\kappa}{c \cdot \rho} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Denominamos $\frac{\kappa}{c \cdot \rho}$ por difusibilidade térmica, k, assim, podemos reescrever a equação acima como:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{7}$$

A equação (7) é conhecida por *equação do calor* ou *equação da difusão*. Nosso objetivo principal será descobrir quais funções $u(x,t)$ satisfazem (7).

Observe que qualquer constante é solução de (7), e a função $u(x,t) = c \cdot x$ também o é. Enfim, existem muitas outras; a determinação da solução procurada depende de fatores físicos. Algumas das condições que interferem fortemente na determinação da solução estão listadas abaixo:

- I- CONDIÇÃO INICIAL DO PROBLEMA
  Podemos ter uma função $f(x)$ que descreve a temperatura da barra na coordenada x no instante $t = 0$, i.e.,
  $$u(x, 0) = f(x)$$
  Onde $f : [0, L] \longrightarrow \mathbb{R}$

- II- CONDIÇÃO DE CONTORNO DO PROBLEMA
  Podem ser de vários tipos:
  TIPO 1: As temperaturas nas extremidades são conhecidas.
  $$u(0, t) = T_1$$
  $$u(L, t) = T_2$$
  Num caso mais complexo, podemos ter que a temperatura num ponto de coordenada x da barra no instante $t = 0$ pode ser expressa por uma função:
  $$u(0, t) = h_0(t)$$
  e
  $$u(L, t) = h_1(t)$$

  TIPO 2: Temos as extremidades isoladas termicamente, i.e., não há fluxo de calor nas extremidades:
  $$\frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(L, t)}{\partial x} = 0$$

  TIPO 3: Há transferência entre o meio e as extremidades. Para abordarmos este tipo precisaremos da seguinte definição:

Definição 3. *Em Física, emissividade é relação entre o poder emissivo de um corpo qualquer e a de um corpo negro. É conhecida como emissividade, e, e pode ter um máximo igual a 1, que é correspondente à de um corpo negro, e um mínimo igual a zero. Corpos que possuem emissividade inferior a um são chamados corpos cinza. Corpos onde a emissividade é também dependente da temperatura e comprimento de onda são chamados corpos não-cinza. A emissividade mede a maior ou menor tendência que determinado corpo tem em emitir radiação. O poder de emissividade está associado à natureza do corpo, à área exposta e à temperatura absoluta a que se encontra.*

$$\kappa \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = e[u(0,t) - u_0]$$
$$-\kappa \frac{\partial u(L,t)}{\partial x} = e[u(L,t) - u_0]$$

TIPO 4: Qualquer combinação dos casos anteriores.

2 Formulação Matemática do Problema

Considere o plano cartesiano de eixos x e t, onde t será a nossa coordenada temporal e x será a nossa coordenada espacial. Queremos definir uma função real $u(x,t)$ no fecho do conjunto $R = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 / 0 < t < \infty, 0 < x < L\}$, $\overline{R}$, que satisfaça:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

em R, além da condição inicial:

$$u(x,0) = f(x) \ \ \forall x \in (0,L)$$

e da condição de fronteira:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0$$

Este tipo de problema é conhecido como "problema de valores iniciais e de contorno ". Um método desenvolvido para resolver este tipo de equação foi desenvolvido por Fourier, e o veremos a seguir.

2.1 Método de Fourier

Supomos inicialmente que a função procurada, $u(x,t)$ pode ser escrita como o produto de duas funções, uma exclusivamente dependente de x e outra exclusivamente dependente de t, isto é, da forma:

$$u(x,t) = F(x) \cdot G(t) \tag{8}$$

Substituindo (8) na equação do calor, teremos:

$$F(x)G'(t) = k \cdot F''(x)G(t)$$

$$\frac{1}{k}\frac{G'(t)}{G(t)} = \frac{F''(x)}{F(x)}$$

Observe que aqui supusemos $F(x)$ e $G(t)$ nunca se anularem. Concluímos da equação acima que os quocientes não podem depender nem de x nem de t, de modo que deve ser uma constante, σ:

$$\frac{1}{k}\frac{G'(t)}{G(t)} = \sigma$$

e

$$\frac{F''(x)}{F(x)} = \sigma$$

Agora, reduzimos o problema de resolver uma E.D.P. ao problema de resolver duas E.D.O.s. Resolvamos uma delas:

$$F''(x) - \sigma F(x) = 0 \tag{9}$$

Como $u(0,t) = u(L,t) = 0$, segue que:

$$F(0)G(t) = F(L)G(t) = 0 \ \ \forall t > 0$$

o que implica $F(0) = F(L) = 0$ pois $G(t) \equiv 0$ não nos interessa. Resolvendo o P.V.C. (problema do valor de contorno):

$$\begin{cases} F''(x) - \sigma F(x) = 0 \\ F(0) = 0 \\ F(L) = 0 \end{cases}$$

teremos três possíveis valores de σ a analisar:

i) $\sigma > 0$

$$F(x) = c_1 e^{\sqrt{\sigma}x} + c_2 e^{-\sqrt{\sigma}x}$$

Para satisfazer o problema do valor inicial temos que ter:

$$\begin{cases} c_1 + c_2 = 0; \ \text{pois } F(0) = 0 \\ c_1 e^{\sqrt{\sigma}L} + c_2 e^{\sqrt{\sigma}L} = 0; \ \text{pois } F(L) = 0 \end{cases}$$

o que implica $c_1 = c_2 = 0$, e $F(x) \equiv 0$ não nos interessa.

ii) $\sigma = 0$

$$F(x) = c_1 x + c_2$$

Com $c_2 = 0$ e $c_1 L + c_2 = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = 0$, uma solução trivial que tampouco nos interessa;

iii) $\sigma < 0$
Fazemos $\sigma = -\lambda^2$ para facilitar os cálculos. Temos:

$$F(x) = c_1 \cos(\lambda x) + c_2 \sin(\lambda x)$$

que deverá satisfazer:

$$\begin{cases} c_1 = 0 \\ c_2 \sin\,(\lambda L) = 0 \end{cases}$$

Como, novamente, não queremos uma solução identicamente nula, i.e., $c_2 = 0$, então devemos ter:

$$c_2 \sin\,(\lambda L) = 0 \text{ com } c_2 \neq 0 \Leftrightarrow \sin\,(\lambda L) = 0$$

O que implica que:

$$(\forall n \in \mathbb{Z}^*)(\lambda L = n\pi)$$

Assim, $\lambda = \frac{n\pi}{L}$:

$$\sigma = -\lambda^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

Como para cada n temos um λ diferente, então designaremos:

$$\lambda_n^2 = \frac{n^2\pi^2}{L^2}$$

que serão designados os autovalores do P.V.C.

Chegamos à conclusão de que as funções que satisfazem à E.D.O. (9) são:

$$F_n(x) = \sin\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

que serão designadas as autofunções do P.V.C.

Agora, resta-nos achar a solução geral da outra E.D.O. em t, a saber:

$$G'(t) - \sigma k G(t) = 0 \tag{10}$$

que será, para cada n:

$$G_n(t) = c_n \cdot e^{\frac{-n^2\pi^2}{L^2}kt}$$

$$u_n(x,t) = F_n(x) \cdot G_n(t)$$

Portanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ teremos uma função:

$$u_n(x,t) = c_n e^{\frac{-n^2\pi^2 k.t}{L^2}}.\sin\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Vamos definir $u(x,t)$ como sendo:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n.e^{\frac{-n^2\pi^2 k.t}{L^2}}.\sin\,\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

também é solução, onde os c_ns são constantes. Observamos que esta solução é descrita por uma série de funções e, portanto, precisaremos de critérios para decidir sua convergência. Por hipótese, $u(x,0) = f(x)$, o que implica:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

o que sugere que a função f deverá poder ser escrita como uma série de senos.

E o método de Fourier culmina na indicação deste candidato como solução.

Problema 1: Será que a função dada, $f(x)$, pode ser escrita como uma série de senos? Se não puder, então $u(x,t)$ como a encontramos não servirá como solução. Aí deveremos ver em que condições $f(x)$ pode ser escrita dessa forma, bem como obter os coeficientes c_ns para esta.

3 Preliminares: funções pares, ímpares e periódicas

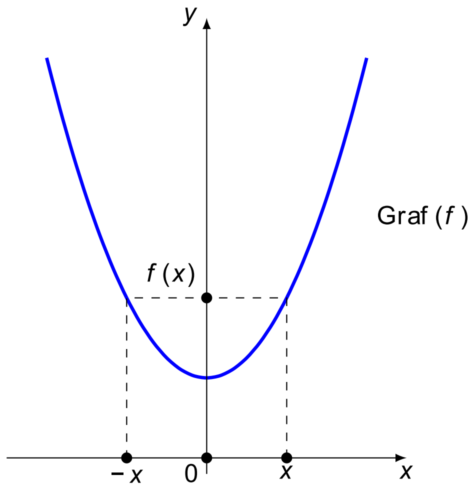
Nesta seção estudaremos alguns conceitos básicos da Análise de Fourier, que envolvem a paridade de funções, sua periodicidade e integrabilidade, entre outras coisas.

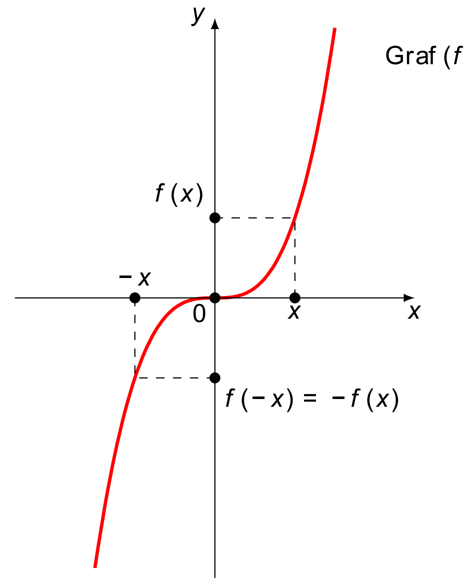
Definição 4. *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **par** se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = f(-x)).$$

*Dizemos que f é **ímpar** se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(-x) = -f(x)).$$





Exemplo 5. *(i) Dado $L > 0$, a função $f(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é par;*

(ii) A função $f(x) = x^{2n}$, com $n \in \mathbb{N}$ é par;

(iii) Dado $L > 0$, a função $f(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$ é ímpar;

(iv) Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, a função dada por $f(x) = x^{2n-1}$ é uma função ímpar.

Proposição 6. *Tem-se:*

(i) A soma de duas funções pares é uma função par e a soma de duas funções ímpares é uma função ímpar;

(ii) O produto de duas funções pares é uma função par;

(iii) O produto de duas funções ímpares é uma função ímpar;

(iv) O produto de uma função par por uma função ímpar é uma função ímpar.

Demonstração. Ad (i): Sejam $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções pares. Então:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(-x) + g(-x) = (f+g)(-x)$$

Logo, $f + g$ é uma função par.

Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ são duas funções ímpares, então:

$$(f+g)(x) = -f(-x) - g(-x) = -(f+g)(-x)$$

Logo, $f+g$ é uma função ímpar.

Ad (ii): Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções pares. Então:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=f(-x)\cdot g(-x)=(f\cdot g)(-x)$$

Logo, $(f\cdot g)$ é uma função par.

Ad (iii): Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ duas funções ímpares, então:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=-f(-x)\cdot(-g(-x))=(f\cdot g)(-x)$$

Logo, $f\cdot g$ é uma função par.

Ad (iv): Sejam $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função par e $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função ímpar. Então:

$$(f\cdot g)(x)=f(x)\cdot g(x)=f(-x)\cdot[-g(-x)]=(-f\cdot g)(-x)$$

Logo, $(f\cdot g)$ é uma função ímpar. $\square$

Recordemos a definição de integrabilidade:

Definição 7 (função Riemann-integrável). *Seja $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ uma função.*

(1) Se f é uma função limitada, então f é integrável segundo Riemann se o supremo das somas inferiores é igual ao ínfimo das somas superiores;

(2) Se f não é limitada, dizemos que f é integrável (e sua integral é chamada integral imprópria) se o intervalo $[a,b]$ puder ser decomposto em um número finito de intervalos, $I_1,\cdots,I_n$, com $I_k=[a_k,b_k]$, tais que para todos $\delta>0$ e $\delta'>0$, a função f é limitada e integrável em $[a_k+\delta,b_k-\delta']$ e os limites abaixo existem:

$$\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \delta'\to 0}}\int_{a_k+\delta}^{b_k-\delta'} f(x)dx$$

Neste caso, a integral imprópria de f é:

$$\int_a^b f(x)dx=\sum_{k=1}^{n}\int_{a_k}^{b_k} f(x)dx$$

Proposição 8. *Tem-se:*

(i) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função par que é integrável em qualquer intervalo limitado, então:*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{L} f(x)dx$$

(ii) *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função ímpar e integrável em qualquer intervalo limitado, então:*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Demonstração. Ad (i): observe que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

E também:

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{-L} f(x)dx = \int_{0}^{-L} -f(x)dx$$

Como f é par, segue que:

$$\int_{0}^{-L} -f(x)dx = \int_{0}^{-L} f(-x)dx = \int_{0}^{L} f(x)dx$$

de modo que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2. \int_{0}^{L} f(x)dx$$

Ad (ii): observe que:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx$$

E também:

$$\int_{-L}^{0} f(x)dx = -\int_{0}^{-L} f(x)dx = \int_{0}^{L} -f(x)dx$$

Somando as duas igualdades acima na integral:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x) - f(x)dx = \int_{-L}^{L} 0dx = 0$$

□

Nos termos da definição acima, podemos enunciar a seguinte:

Proposição 9. cos *é uma função par, enquanto que* sin *é uma função ímpar.*

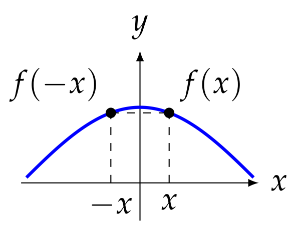
Demonstração. Devemos mostrar que dado qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $\cos(-x) = \cos(x)$. Ora, por (4), tem-se:

$$\cos(-x) = \cos(0 - x) = \cos(0) \cdot \cos(x) + \sin(0) \cdot \sin(x),$$

e como por (1) e (2) tem-se que $\sin(0) = 0$ e $\cos(0) = 1$, segue que:

$$\cos(-x) = \cos(0) \cdot \cos(x) + \sin(0) \cdot \sin(x) = 1 \cdot \cos(x) + 0 \cdot \sin(x) = \cos(x).$$

Provamos, portanto, que cos é uma função **par**. Observe, abaixo, o aspecto do gráfico da função cosseno nas proximidades da origem do plano cartesiano:



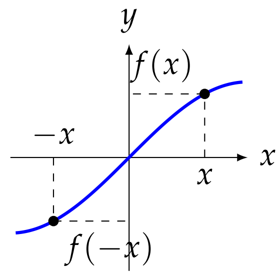
Há uma simetria especular com respeito ao eixo Oy.

Devemos mostrar, agora, que sin é uma função ímpar, ou seja, que dado qualquer $x \in \mathbb{R}$ vale $\sin(-x) = -\sin(x)$.

Por (3), tem-se:

$$\sin(-x) = \sin(0 - x) = \sin(0)\cos(x) - \sin(x)\cos(0) = 0 \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot 1 = -\sin(x),$$

e segue que sin é uma função **ímpar**. Observe, abaixo, o aspecto do gráfico da função seno nas proximidades da origem do plano cartesiano:



No caso acima, há uma simetria com respeito à origem do plano (ou seja, da reta de equação $y = x$). $\square$

Teorema 10. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável e ímpar. Dado $L > 0$, temos:*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 0$$

Demonstração. Sendo ímpar, temos:

$$(\forall x \in [-L, 0])(f(-x) = -f(x))$$

Assim,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(-x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \overset{\overset{f(-x)=-f(x)}{\uparrow}}{=} -\int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 0$$

$\square$

Teorema 11. *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função Riemann-integrável par. Dado $L > 0$, temos:*

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{L} f(x)dx$$

Demonstração. Sendo ímpar, temos:

$$(\forall x \in [-L, 0])(f(-x) = f(x))$$

Assim,

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \int_{-L}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx \overset{f(-x)=f(x)}{\overset{\uparrow}{=}}$$
$$= \int_{0}^{L} f(x)dx + \int_{0}^{L} f(x)dx = 2 \cdot \int_{0}^{L} f(x)dx$$

□

Observamos que as funções contínuas e, de um modo mais geral, seccionalmente contínuas no intervalo $[a, b]$ são limitadas e, portanto, integráveis

Definição 12 (função periódica). *Uma função* $g : \operatorname{dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é* ***periódica*** *se existir um número positivo, p, tal que:*

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(g))(x + p \in \operatorname{dom}(g) \Rightarrow g(x+p) = g(x))$$

Definição 13 (período fundamental). *Seja* $g : \operatorname{dom}(g) \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função periódica. O* ***período fundamental*** *de g é o* menor *número positivo,* p_0*, tal que:*

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(g))(x + p_0 \in \operatorname{dom}(g) \Rightarrow g(x+p_0) = g(x))$$

Exemplo 14. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

é periódica de período fundamental igual a 2π*, uma vez que:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\sin(x + 2\pi) = \sin(x))$$

e para qualquer $\alpha < 2\pi$*, tem-se:*

$$\sin(x+\alpha) = \sin(x) \cdot \cos(\alpha) + \sin(\alpha) \cdot \cos(x) \neq \sin(x)$$

Proposição 15. *Se* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é uma função periódica de período p, então para todo* $k \in \mathbb{Z}$ *tem-se:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + k \cdot p) = f(x))$$

Demonstração. Provaremos o resultado primeiramente para todo $n \in \mathbb{N}$, usando Indução Finita. O caso em que $n = 0$ é óbvio: de fato, é verdade que para todo $x \in \mathbb{R}$ vale $f(x + 0 \cdot p) = f(x + 0) = f(0)$.

Para $k = 1$ tem-se, pela definição de período:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + 1 \cdot p) = f(x + p) = f(x))$$

Hipótese de Indução: Suponhamos que sejá válido:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + (k-1) \cdot p)) = f(x)$$

e mostremos, utilizando a hipotese de indução, que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + k \cdot p) = f(x))$.

De fato, note que $x + k \cdot p = x + (k - 1 + 1) \cdot p = x + (k-1) \cdot p + 1 \cdot p = x + (k-1) \cdot p + p$, de modo que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + k \cdot p) = f(x + (k-1) \cdot p + p) = f(x + (k-1) \cdot p) \overset{\overset{\text{Hip. Ind.}}{\uparrow}}{=} f(x))$$

Logo, tem-se:

$$(\forall k \in \mathbb{N})(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + k \cdot p) = f(x)) \tag{11}$$

Seja, agora, $n \in \mathbb{Z} \setminus \mathbb{N}$, de modo que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = -k$.

Como o resultado foi demonstrado para todo número natural k, temos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + n \cdot p) = f(x - k \cdot p) \overset{\overset{(11)}{\uparrow}}{=} f(x - k \cdot p + k \cdot p) = f(x))$$

Desta forma, fica demonstrado que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + n \cdot p) = f(x))$$

□

Seja $y = f(x)$ uma função periódica de período p, ou seja, tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x + p) = f(x))$$

Vejamos, a seguir, o que ocorre ao combinarmos, de diversos modos, uma constante com a função.

Dado um número $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, podemos obter as seguintes funções:

(1)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathrm{dom}\,(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda + f(x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = \lambda + f(x+p) = \lambda + f(x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\lambda + f(x+p') = g(x+p') = g(x) = \lambda + f(x))$$

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p') = f(x)),$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

(2)

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \lambda \cdot f(x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = \lambda \cdot f(x+p) = \lambda \cdot f(x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\lambda \cdot f(x+p') = g(x+p') = g(x) = \lambda \cdot f(x))$$

Como $\lambda \neq 0$, podemos dividir os dois membros da igualdade:

$$\lambda \cdot f(x+p') = \lambda \cdot f(x)$$

por λ, de modo a concluir que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p') = f(x)),$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Observação: é comum denominarmos o número $|\lambda|$ por **amplitude** da função g.

(3)
$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x+\lambda) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá o mesmo período da função f, pois:

(i) Para qualquer $x \in \mathbb{R}$, tem-se $g(x+p) = f(x+p+\lambda) = f((x+\lambda)+p) = f(x+\lambda) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < p$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p'+\lambda) = g(x+p') = g(x) = f(x+\lambda))$$

ou seja:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+\lambda+p') = f(x+\lambda)).$$

Assim, dado qualquer $y \in \mathbb{R}$, tem-se $f(y+p') = f(y-\lambda+\lambda+p') = f(y-\lambda+\lambda) = f(y)$. Logo,

$$(\forall y \in \mathbb{R})(f(y+p') = f(y))$$

ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \operatorname{dom}(f))(x+p \in \operatorname{dom}(f) \Rightarrow f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Observação: é comum denominarmos o número λ por **constante de fase** ou **fase inicial** da função g.

(4)
$$\begin{array}{rccc} g: & \operatorname{dom}(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(\lambda \cdot x) \end{array}$$

Neste caso, a função g terá período igual a $p/|\lambda|$, pois:

(i) Para qualquer $x \in \operatorname{dom}(f)$ tal que $x+p \in \operatorname{dom}(f)$, tem-se $g\left(x+\frac{p}{|\lambda|}\right) = f\left(\lambda \cdot \left(x+\frac{p}{|\lambda|}\right)\right) = f(\lambda \cdot x \pm p) = f(\lambda \cdot x) = g(x)$;

(ii) Se existisse um número positivo $p' < \frac{p}{|\lambda|}$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(g(x+p') = g(x))$$

então teríamos:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(\lambda \cdot x + \lambda \cdot p') = f(\lambda \cdot (x+p')) = g(x+p') = g(x) = f(\lambda \cdot x))$$

Seja $y \in \mathbb{R}$. Como $\lambda \neq 0$, podemos escrever $y = \lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot y\right)$. Assim,

$$f(y + |\lambda| \cdot p') = f\left(\lambda \cdot \left(\frac{y}{\lambda}\right) + |\lambda| \cdot p'\right) = f\left(\lambda \cdot \left(\frac{1}{\lambda} \cdot y \pm p'\right)\right) = f\left(\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} y\right) = f(y)$$

Note que como $p' < \frac{p}{|\lambda|}$, tem-se $|\lambda| \cdot p' < p$, ou seja, p não seria o *menor* número positivo tal que $(\forall x \in \mathbb{R})(f(x+p) = f(x))$ – o que é absurdo.

Exemplo 16. *Dados $L > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, o período fundamental da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \end{array}$$

é $\dfrac{2\pi}{\frac{n\pi}{L}} = \dfrac{2L}{n}$. Desta forma, quanto maior for n, menor *será o período da função f.*

Exemplo 17. *O período fundamental da função cosseno é 2π, uma vez que:* $\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$*, e podemos aplicar (1).*

Em termos gráficos, as funções periódicas repetem a curva do seu gráfico em intervalos de comprimento igual ao do seu período.

4 Algumas Identidades Úteis

Recordemos as duas fórmulas a seguir:

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) - \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \tag{12}$$

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) + \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) \tag{13}$$

Subtraindo (12) de (13), obtemos:

$$\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta) = 2 \cdot \sin(\alpha) \cdot \sin(\beta)$$

e portanto:

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2} \tag{14}$$

Somando (12) com (13), obtemos:

$$\cos(\alpha) \cdot \cos(\beta) = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2} \tag{15}$$

Teorema 18. *Sejam* $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. *Então:*

1. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = 0$

2. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = 0$

3. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ L, & se\ m = n \end{cases}$

4. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = 0$

5. $\displaystyle\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & se\ m \neq n \\ L, & se\ m = n \end{cases}$

Demonstração. Ad **1.**:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \frac{L}{n \cdot \pi} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \Bigg|_{-L}^{L} = \frac{L}{n \cdot \pi} [\sin(n \cdot \pi) + \sin(n \cdot \pi)] = 0$$

Ad **2.**:

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n \cdot \pi} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \Bigg|_{-L}^{L} = \frac{L}{n \cdot \pi} [\cos(n \cdot \pi) - \cos(n \cdot \pi)] = 0$$

Ad **3.**: se $m \neq n$, então aplicando a fórmula (15), obtemos:

$$\begin{aligned}
&\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-L}^{L} \left[\cos\left(\frac{(m+n) \cdot \pi \cdot x}{L}\right) + \cos\left(\frac{(m-n) \cdot \pi \cdot x}{L}\right)\right] dx = \\
&= \frac{1}{2} \cdot \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(m+n) \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{(m-n) \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \\
&= \frac{L}{2 \cdot (m+n) \cdot \pi} \cdot [\sin((m+n) \cdot \pi) + \sin((m+n) \cdot \pi)] + \\
&\quad + \frac{L}{2 \cdot (m-n) \cdot \pi} \cdot [\sin((m-n) \cdot \pi) + \sin((m-n) \cdot \pi)] = 0
\end{aligned}$$

Se $m = n$, no entanto, temos:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \cos^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \frac{1}{2}\left(1 + \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right)\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\int_{-L}^{L} 1 dx + \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{2\pi n x}{L}\right) dx\right) = \frac{1}{2}\left(2L + \frac{L \sin(2\pi n)}{\pi n}\right) = L$$

Ad **4.**:

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \cos\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = 0,$$

uma vez que o produto da função seno (ímpar) pela função cosseno (par) nos dá uma função ímpar.

Ad **5.**: Se $m \neq n$, usando (14), temos:

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m \cdot \pi \cdot x}{L}\right) \cdot \sin\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \int_{-L}^{L} \left[\cos\left(\frac{(n-m) \cdot \pi \cdot x}{L}\right) - \cos\left(\frac{(n+m) \cdot \pi \cdot x}{L}\right)\right] dx =$$
$$= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{L}{(n-m) \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \sin((n-m) \cdot \pi) - \frac{L}{(n+m) \cdot \pi} \cdot 2 \cdot \sin((n+m) \cdot \pi)\right] = 0$$

Se $m = n$,

$$\int_{-L}^{L} \sin^2\left(\frac{n \cdot \pi \cdot x}{L}\right) dx = \frac{1}{2}\int_{-L}^{L} \left[1 - \cos\left(\frac{2 \cdot n \cdot \pi \cdot x}{L}\right)\right] dx = L - \frac{1}{2} \cdot \frac{L}{2n\pi} \cdot 2 \cdot \sin(2n\pi) = L$$

$\square$

5 Polinômios Trigonométricos e Séries Trigonométricas

Definição 19 (polinômio trigonométrico). *Um **polinômio trigonométrico de ordem** n é uma função da forma:*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + a_2 \cdot \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + b_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \cdots$$
$$\cdots + a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

onde $a_0, a_1, \cdots, a_n, b_1, \cdots, b_n \in \mathbb{R}$ e $L > 0$.

Exemplo 20. *A função dada por:*

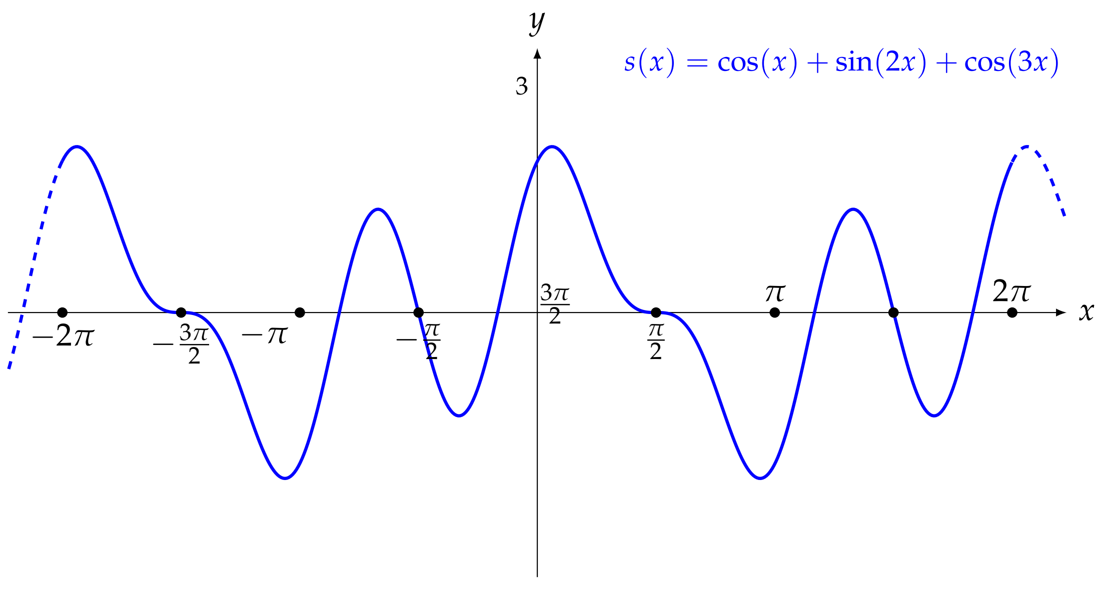
$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x) + \cos(2x) + \cos(3x) \end{array}$$

é um polinômio trigonométrico com $L = \pi$, $a_0 = 0, a_1 = a_2 = a_3 = 1$ e $b_1 = b_2 = b_3 = 0$.

Exemplo 21. *A função dada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos(x) + \sin(2x) + \cos(3x) \end{array}$$

é um polinômio trigonométrico. De fato, neste caso tem-se $a_0 = 0, a_1 = 1, a_2 = 0, a_3 = 1, b_1 = 0, b_2 = 1, b_3 = 0$ e $L = \pi$.



Observação 22. *Sabemos que o período de* $\sin(n\pi x/L)$ *e* $\cos(n\pi x/L)$ *é* $2L/n$*. Desta forma, para qualquer polinômio trigonométrico de ordem* n*, como* $2L$ *é múltiplo inteiro de* $2L, 2L/2, 2L/3, \cdots 2L/(n-1), 2L/n$ *tem-se para todo* $x \in \mathbb{R}$*:*

$$\begin{aligned}
p_n(x+2L) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=1\cdot 2L}\right) + b_1 \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=1\cdot 2L}\right) + \\
a_2 \cos\left(\frac{2\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=2\cdot\frac{2L}{2}}\right) + b_2 \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=2\cdot\frac{2L}{2}}\right) + \cdots + \\
a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=n\cdot\frac{2L}{n}}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L} + \overbrace{2L}^{=n\cdot\frac{2L}{n}}\right) = \\
= \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right) + b_1 \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \cdots + a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) = p_n(x)
\end{aligned}$$

de modo que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(p_n(x+2L) = p_n(x))$$

Pode-se demonstrar que o período fundamental de $p_n(x)$ *é* $2L$*.*

Definição 23 (série trigonométrica). *Dado* $L > 0$*, uma* ***série trigonométrica*** *é uma série da forma:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) = \frac{a_0}{2} + \lim_{n\to\infty} s_n(x)$$

6 Coeficientes de Fourier

Se uma função real $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ puder ser escrita na forma:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{16}$$

é de se esperar que os coeficientes a_n e b_n estejam intimamente relacionados à função f. Para calculá-los, vamos *supor* que a igualdade (16) se verifique, e mais ainda, que a *série em (16) convirja uniformemente*.

Uma vez que todo polinômio trigonométrico é uma função contínua, sendo a convergência uniforme, segue que f também será contínua, e portanto, integrável. Além disso, f deve ser periódica de período $2L$, pois para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $2L$ é o período de $\cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, bem como o das demais funções que aparecem na série. Assim, usando a integração termo a termo (pois estamos supondo a convergência uniforme) no membro direito de (16), obtemos a seguinte igualdade:

$$\int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{a_0}{2}\int_{-L}^{L} dx + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + b_n \cdot \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

donde:

$$\boxed{a_0 = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)dx} \tag{17}$$

pois para qualquer $n \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

Multiplicando ambos os membros de (16) por $\cos\frac{m\pi x}{L}$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando, obtemos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = a_m \cdot L \tag{18}$$

e portanto:

$$\boxed{a_m = \frac{1}{L}\cdot\int_{-L}^{L} f(x)\cdot\cos\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx} \tag{19}$$

uma vez que para todo $n \neq m$, tem-se:

$$\int_{-L}^{L} \cos\left(\frac{m\cdot\pi\cdot x}{L}\right)\cdot\cos\left(\frac{n\cdot\pi\cdot x}{L}\right) dx = 0$$

De modo semelhante, multiplicando os dois membros de 16 por $\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)$, para $m \geq 1$ fixado, e integrando, obtemos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)\sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)dx = b_m \cdot L$$

uma vez que para qualquer $n \neq m$:

$$\int_{-L}^{L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

e portanto:

$$b_m = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx \tag{20}$$

Agora, estamos em condições de dar uma boa definição.

Definição 24 (coeficientes de Fourier). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável em cada intervalo limitado. Os números:*

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

são os chamados coeficientes de Fourier da função f.

Observação 25. *Como f é absolutamente integrável em qualquer intervalo limitado, temos em particular que $\int_{-L}^{L} |f(x)|dx < \infty$. A exigência da integrabilidade absoluta é necessária para que as expressões (19) e (20) façam sentido, pois:*

$$|a_n| = \left| \int_{-L}^{L} f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \int_{-L}^{L} |f(x)|dx$$

$$|b_n| = \left| \int_{-L}^{L} f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right| \leq \int_{-L}^{L} |f(x)|dx$$

7 Séries de Fourier

Como vimos na agenda precedente, dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ periódica, absolutamente integrável de período $2L$, podemos calcular seus coeficientes de Fourier pelas expressões:

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

e:

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

Assim, podemos escrever:

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right) \tag{21}$$

Note que acima *não* temos uma igualdade. A expressão do lado direito de (21) é a *série de Fourier de f*. Mas qual relação tem uma função com sua série de Fourier? Infelizmente nem sempre temos uma igualdade, havendo casos em que a série de Fourier pode até divergir. Há até exemplo de função contínua cuja série de Fourier diverge. A seguir, estudaremos condições suficientes para que a função f seja igual à sua série de Fourier.

Definição 26 (descontinuidade de primeira espécie). *Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in D$. Dizemos que x_0 é uma* ***descontinuidade de primeira espécie de*** *f se:*

$$\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$$

mas existem (e portanto são finitos):

$$\lim_{x \to x_{0_+}} f(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_{0_-}} f(x)$$

Definição 27 (função seccionalmente contínua). *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ será seccionalmente contínua se ela tiver apenas um número finito de descontinuidades, e todas de primeira espécie em qualquer intervalo limitado.*

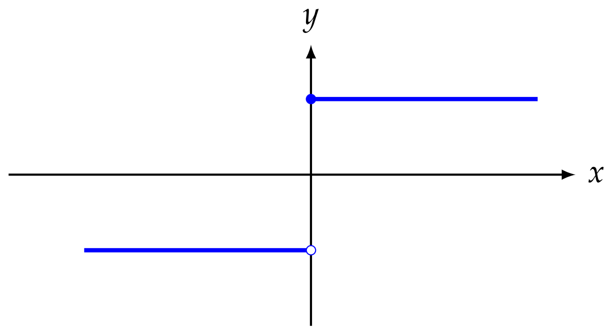
Em outras palavras, dados $a < b$, existem $a \leq a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_n \leq b$, tais que f é contínua em cada um dos intervalos abertos $]a_j, a_{j+1}[$, $j = 1, 2, \cdots, n-1$, e existem os limites:

$$\lim_{x \to a_j^+} f(x) \quad \text{e} \quad \lim_{x \to a_j^-} f(x)$$

Exemplo 28. *A função dada por:*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, \ se \ x \geq 0 \\ -1, \ se \ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

é seccionalmente contínua. De fato, $\mathbb{R} =]-\infty, 0[\cup [0, \infty[$ e $f \restriction_{]-\infty,0[}$ e $f \restriction_{]0,\infty[}$ são contínuas,



Definição 29 (função seccionalmente diferenciável). *Uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ será seccionalmente diferenciável se for seccionalmente contínua e f' for também seccionalmente contínua.*

Observemos que f' não está definida em todo ponto de f, pois nos pontos em que f é descontínua, f' não existirá, e f'' não existirá nos pontos em que f' não for contínua, logo as derivadas podem não existir mesmo em alguns pontos onde f é contínua.

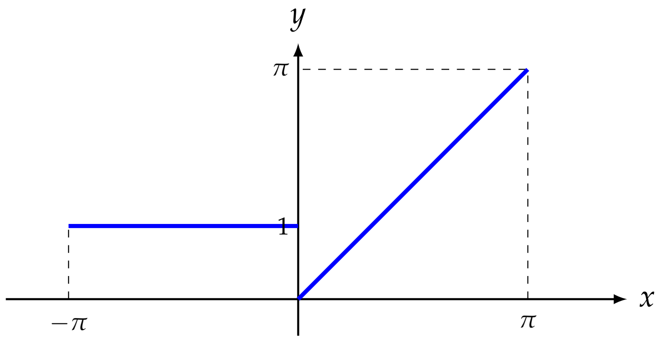
Enunciamos (sem demonstração) a seguir o Teorema de Fourier, que nos diz quais as condições suficientes para a convergência da série de Fourier de uma função f.

Teorema 30. ***(Teorema de Fourier)*** *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função seccionalmente diferenciável de período $2L$. Então a série de Fourier da função f, dada em 16, converge em cada ponto x_0 para $\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right]$, i.e.,*

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_0^+} f(x) + \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right] = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x_0}{L}\right)\right) \tag{22}$$

Exemplo 31. *Encontre a expansão em série de Fourier da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [-\pi, 0[\cup]0, \pi[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, \ se \ -\pi < x < 0 \\ x, \ se \ 0 < x < \pi \end{cases} \end{array}$$



Solução: Observamos que, neste caso, $L = \pi$. Temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0} dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} xdx = 1 + \frac{\pi}{2}.$$

$$\begin{aligned}
a_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\cos(nx)dx &= \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\cos(nx)dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} x\cdot\cos(nx)dx = \\
&= \frac{1}{n\pi}\sin(nx)\Big|_{-\pi}^{0} + \frac{1}{\pi}\cdot\left[\frac{x}{n}\cdot\sin(nx)\Big|_{0}^{\pi}\right] - \frac{1}{n\pi}\cdot\int_{0}^{\pi}\sin(nx)dx = \\
&= \frac{1}{n^2\cdot\pi}\cos(nx)\Big|_{0}^{\pi} = \frac{1}{\pi n^2}\cdot(\cos(n\pi)-1) = \frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}
\end{aligned}$$

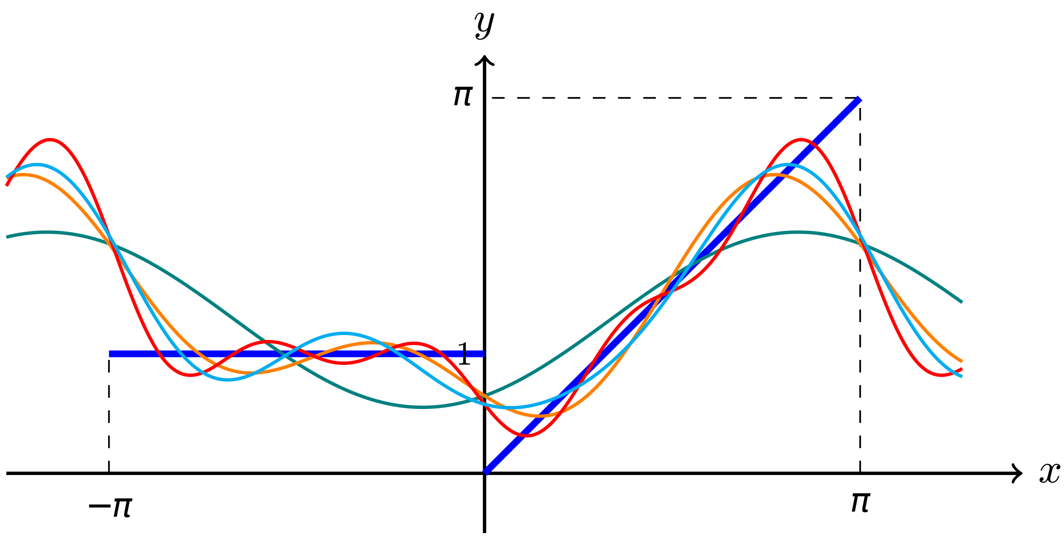
De modo análogo, calculamos:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cdot\sin(nx)dx = \frac{1}{\pi}\cdot\int_{-\pi}^{0}\sin(nx)dx + \frac{1}{\pi}\cdot\int_{0}^{\pi} x\cdot\sin(nx)dx = \frac{(-1)^n\cdot(1-\pi)-1}{n\pi}$$

Desta forma, a série de Fourier desta função é:

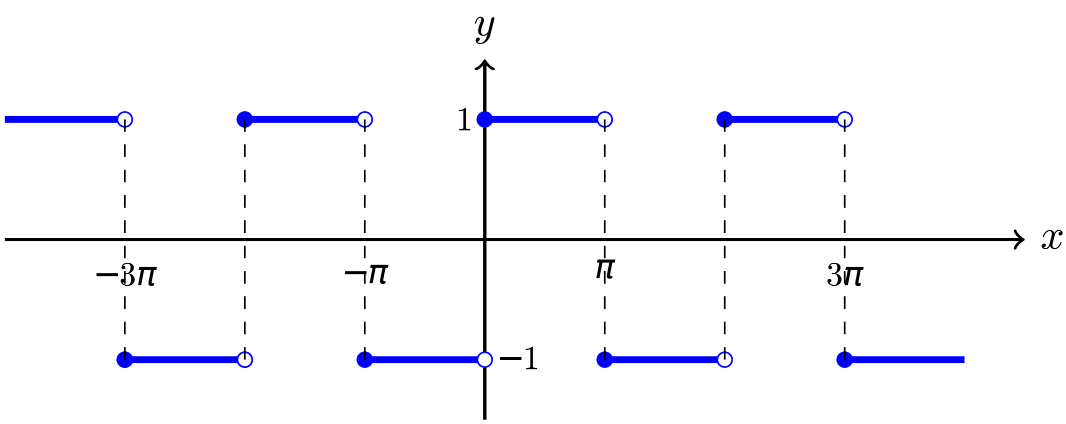
$$f(x) = \frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cdot\cos(nx) + \frac{(-1)^n\cdot(1-\pi)-1}{\pi\cdot n}\cdot\sin(nx)\right)$$

Apresentamos abaixo o gráfico dos 4 primeiros polinômios trigonométricos e como eles aproximam a função:



Exemplo 32. *Exibir a série de Fourier da extensão periódica da função:*

$$f: \begin{array}{ccc} [-\pi,\pi[& \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} -1, & se\ x \in [-\pi,0[\\ 1, & se\ x \in [0,\pi[\end{cases} \end{array}$$



Solução: Temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \cdot \int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} -1dx + \int_{0}^{\pi} 1dx \right) = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{1}{\pi} \cdot \left(\int_{-\pi}^{0} -\sin(nx)dx + \int_{0}^{\pi} \sin(nx)dx \right) = \frac{2-2(-1)^n}{\pi n}$$

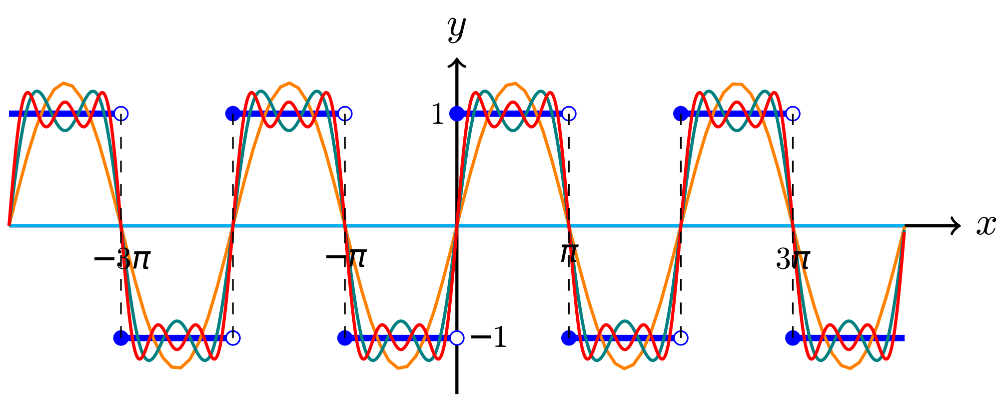
$$\frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1+(-1)^{n+1}}{n} \right] \cdot \sin(n \cdot x)$$

Observamos que a extensão periódica de f é seccionalmente diferenciável e contínua em cada intervalo da forma $]k \cdot \pi, (k+1) \cdot \pi[, k \in \mathbb{Z}$ e que, portanto, pelo **Teorema de Fourier**, para todo $x \in]-\pi, 0[\cup]0, \pi[$, temos:

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{1 + (-1)^{n+1}}{n} \right] \cdot \sin(n \cdot x)$$

e em $x = 0$, temos a série identicamente nula, que converge para $0 = \frac{-1+1}{2}$.

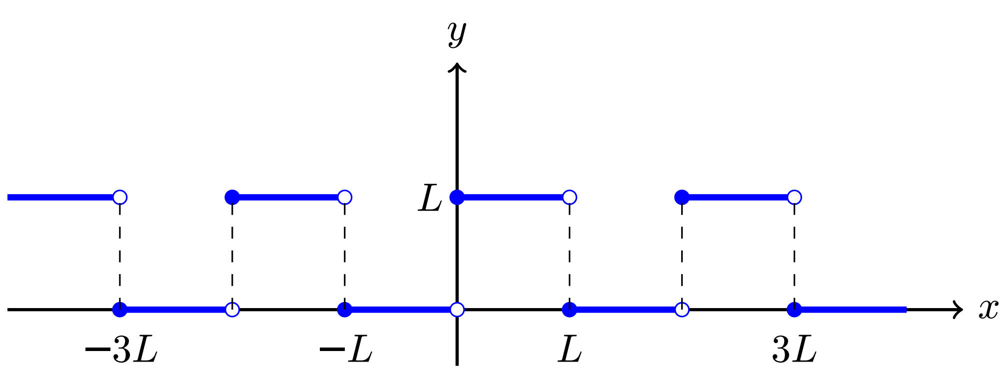
Observe, abaixo, o gráfico da extensão periódica de f juntamente com os polinômios trigonométricos $s_0(x) = 0$, $s_1(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x)$, $s_3(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin(3x)$ e $s_5(x) = \frac{4}{\pi} \cdot \sin(x) + \frac{4}{3\pi} \cdot \sin(3x) + \frac{4}{5\pi} \cdot \sin(5x)$:



Exemplo 33. *Dado $L > 0$, obter a série de Fourier da extensão periódica da função dada por:*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 0, & se \;\; x \in [-L, 0[\\ 1, & se \;\; x \in [0, L[\end{cases} \end{aligned}$$

onde $k \in \mathbb{Z}$.



Solução: Notamos que a estensão periódica da função acima é seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Assim, calculamos:

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{0} f(x)dx + \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{0} 0dx + \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} 1dx = \frac{L}{L} = 1$$

$$\begin{aligned} a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \\ = \frac{1}{L} \cdot \left[\int_{-L}^{0} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \\ = \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{n\pi} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \\ = \frac{1}{L} \cdot \left[\int_{-L}^{0} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx + \int_{0}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \right] = \\ = \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L} \cdot \int_{0}^{L} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{L}{n\pi} \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \Big|_0^L = \\ = -\frac{L}{n\pi} \cdot \cos(n\pi) + \frac{L}{n\pi} \cdot \cos(0) = \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n\pi} \cdot L \end{aligned}$$

de modo que:

$$f(x) \sim \frac{L}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n\pi} \cdot L \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Pelo **Teorema de Fourier**, temos:

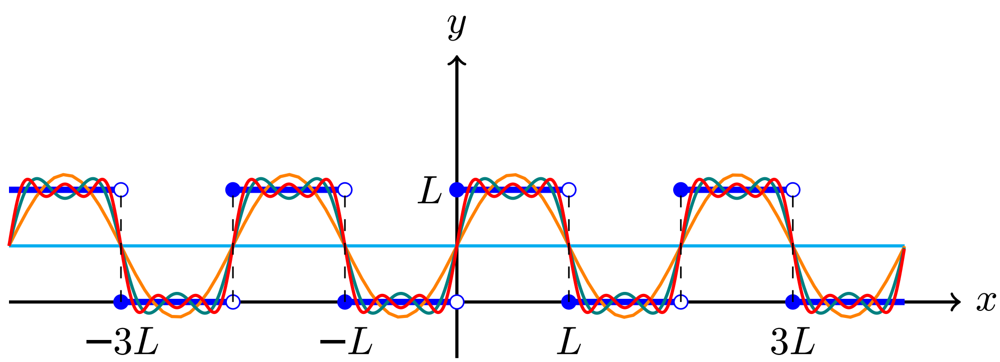
$$(\forall x \in]-L, 0[\cup]0, L[) \left(f(x) = \frac{1}{2} + \frac{L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

e:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right) = \frac{1}{2}$$

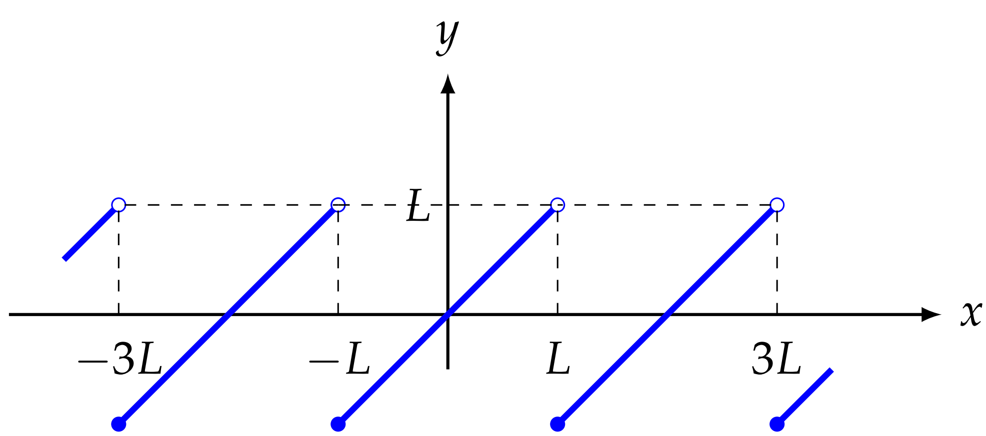
alguns dos primeiros polinômios trigonométricos que "aproximam" a função $\widetilde{f}$ e como o fazem:

$$
\begin{aligned}
s_0(x) &= \tfrac{1}{2}\\
s_1(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\\
s_3(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \tfrac{2}{3\pi}\cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)\\
s_5(x) &= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{\pi}\cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \tfrac{2}{3\pi}\cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \tfrac{2}{5\pi}\cdot \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right)
\end{aligned}
$$



Exemplo 34. *Exibir a série de Fourier da extensão periódica da função dada por:*

$$
\begin{array}{rccc}
f: & [-L, L[& \to & \mathbb{R}\\
 & x & \mapsto & x
\end{array}
$$



Solução: Notamos que a estensão periódica da função acima é seccionalmente diferenciável e periódica de período $2L$. Assim, calculamos:

$$
a_0 = \frac{1}{L}\cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx = \frac{1}{L}\cdot \int_{-L}^{L} x dx = \frac{1}{L}\cdot \left[\frac{x^2}{2}\right]_{-L}^{L} = \frac{1}{L}\cdot\left(\frac{L^2}{2} - \frac{L^2}{2}\right) = 0
$$

$$
a_n = \frac{1}{L}\cdot \int_{-L}^{L} f(x)\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{1}{L}\cdot \int_{-L}^{L} x\cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0
$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} x \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = -\frac{1}{L} \cdot \frac{2\,(-1)^n\, L^2}{\pi n} = -\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \frac{2L}{\pi} \cdot \frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

de modo que:

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Pelo **Teorema de Fourier**, temos:

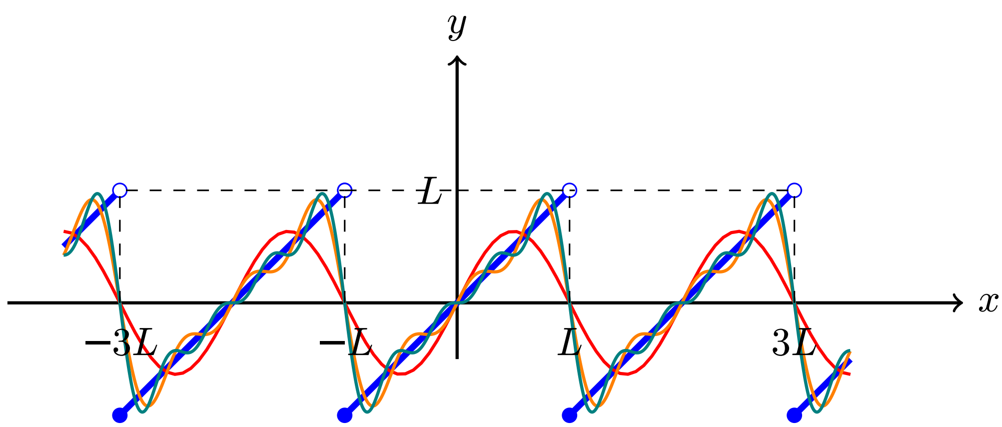
$$(\forall x \in]-L, L[) \left(f(x) = \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

e:

$$0 = \frac{2L}{\pi} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\pi 0}{L}\right)$$

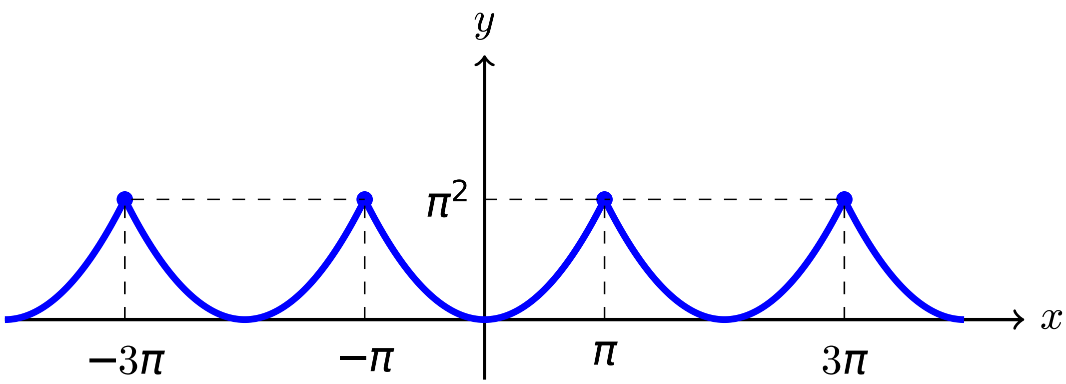
Apresentamos abaixo o gráfico de f juntamente com os 4 primeiros polinômios trigonométricos:

$$\begin{cases} s_0(x) = 0 \\ s_1(x) = \dfrac{2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} \\ s_2(x) = \dfrac{2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)}{\pi} - \dfrac{L \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\pi} \\ s_3(x) = \dfrac{2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\pi} - \dfrac{L \cdot \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)}{\pi} + \dfrac{2 \cdot L \cdot \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right)}{3\pi} \end{cases}$$



Exemplo 35. *Exibir a série de Fourier da extensão periódica da função:*

$$\begin{array}{rccl} f: & [-\pi, \pi] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$



Solução: Sendo esta uma função par, os termos em b_n são todos nulos.

Temos:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{2\pi^2}{3}$$

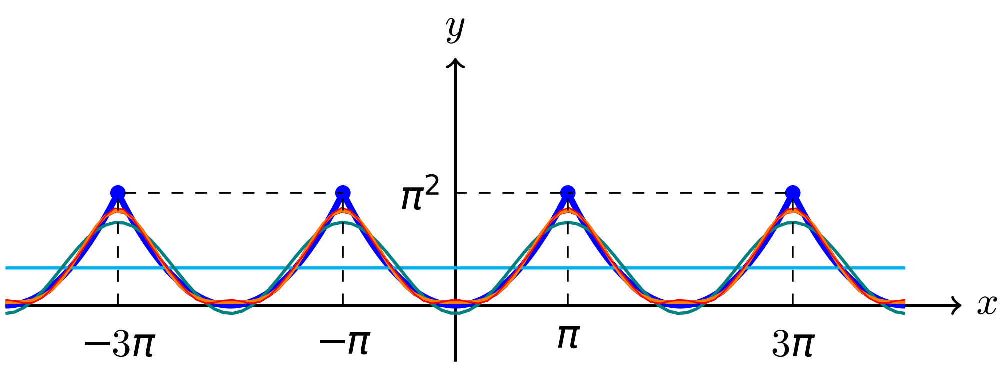
$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2 \cdot \cos\left(n \cdot x\right) dx = 4 \cdot \frac{(-1)^n}{n^2}$$

de modo que a série de Fourier será:

$$\frac{2\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(n \cdot x)$$

Assim, para todo $x \in [-\pi, \pi]$, temos:

$$x^2 = \frac{2\pi^2}{3} + 4 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cdot \cos(n \cdot x)$$



8 Séries de Fourier para Funções Pares e Ímpares

Veremos, nesta seção, que sempre que $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ for uma função par que admite coeficientes de Fourier, os coeficientes b_n, que multiplicam as funções seno, são sempre zero, e que se a função for ímpar, os coeficientes a_n, com $n \geq 1$ é que serão nulos.

Definição 36 (extensão par de uma função). *Seja $L > 0$. Dada uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, sua extensão par é:*

$$\begin{aligned} \widehat{f} : \; [-L, L] & \to \mathbb{R} \\ x & \mapsto \begin{cases} f(x), & \textit{se } x \in [0, L] \\ f(-x), & \textit{se } x \in [-L, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

Graficamente, obtemos a extensão par de uma função refletindo seu gráfico ao redor do eixo Oy.

Seja, assim, $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função par. Seus coeficientes de Fourier podem ser obtidos como segue:

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) dx = \frac{2}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \overbrace{f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}^{\text{função par}} dx = \frac{2}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \overbrace{f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}^{\text{função ímpar}} dx = \frac{2}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = 0$$

de modo que sua série de Fourier será:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Como os coeficientes de Fourier, b_n, são todos zero, não aparecem termos de seno na série de Fourier de f, e dizemos que a série é uma **série de Fourier de cossenos**, ou simplesmente **série de cossenos**. Ela converge para a função original $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. No caso em que é dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, a série de cossenos é a série de Fourier de sua extensão par, $\widetilde{f} : [-L, L] \to \mathbb{R}$.

A série de Fourier de uma função ímpar $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é a série de cossenos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{23}$$

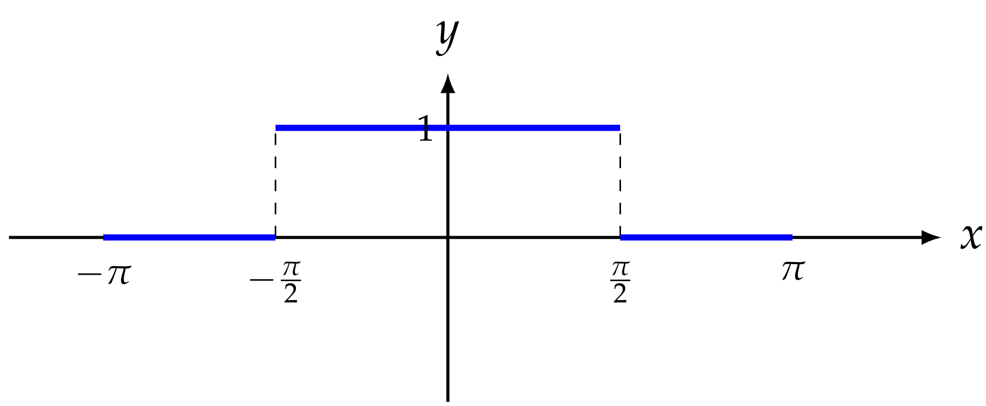
onde:

$$a_n = \frac{2}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{24}$$

Exemplo 37. *Encontrar a série de cossenos da função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, & se\ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & se\ \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \end{array}$$

Solução: Para obter a série de cossenos, selecionamos a extensão par da função em $[-\pi, \pi]$, cujo gráfico é dado abaixo:



e calculamos os coeficientes:

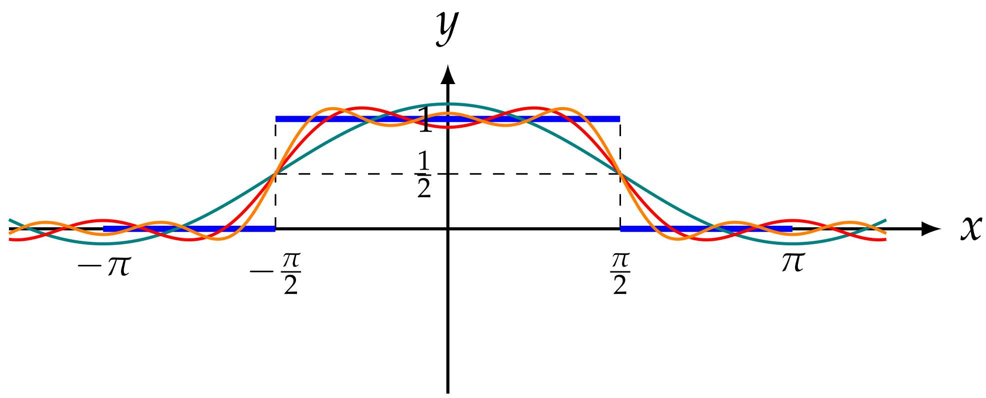
$$a_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \widehat{f}(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(nx)dx = \frac{2}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$$

Portanto, a expansão em série de cossenos da função f é:

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n\pi} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \cdot \cos(nx)$$

A série de cossenos se iguala exatamente aos valores de $f(x)$ para $x \neq \frac{\pi}{2}$; no ponto $x = \frac{\pi}{2}$, o valor da série de cossenos é $\frac{1}{2}$. Gráficos dos polinômios trigonométricos são dados em seguida:

$$\begin{cases} s_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos(x) \\ s_2(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{2}{3\pi} \cdot \cos(3x) \\ s_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \cdot \cos(x) - \frac{2}{3\pi} \cdot \cos(3x) + \frac{2}{5\pi} \cos(5x) \end{cases}$$



Definição 38 (extensão ímpar de uma função). *Seja $L > 0$. Dada uma função $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, sua extensão ímpar é:*

$$\begin{aligned} \tilde{f} : \; [-L, L] &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} f(x), & se\ x \in [0, L] \\ -f(-x), & se\ x \in [-L, 0] \end{cases} \end{aligned}$$

Graficamente, obtemos a extensão ímpar de uma função refletindo seu gráfico pelo do eixo Ox e, em seguida, refletindo a figura obtida em torno do eixo Oy.

Seja, assim, $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ uma função ímpar. Seus coeficientes de Fourier podem ser obtidos como segue:

$$a_0 = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x)dx \overset{\substack{f \text{ ímpar} \\ \uparrow}}{=} 0$$

$$a_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \overbrace{f(x) \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}^{\text{função ímpar}} dx = 0$$

$$b_n = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} \overbrace{f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)}^{\text{função par}} dx = \frac{2}{L} \cdot \int_{0}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$$

de modo que sua série de Fourier será:

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Como os coeficientes de Fourier, a_n, são todos zero, não aparecem termos de cosseno na série de Fourier de f, e dizemos que a série é uma **série de Fourier de senos**, ou simplesmente **série de senos**. Ela converge (pontualmente) para a função original $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$. No caso em que é dada $f : [0, L] \to \mathbb{R}$, a série de senos é a série de Fourier de sua extensão ímpar, $\widetilde{f} : [-L, L] \to \mathbb{R}$.

A série de Fourier de uma função ímpar $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é a série de senos:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \tag{25}$$

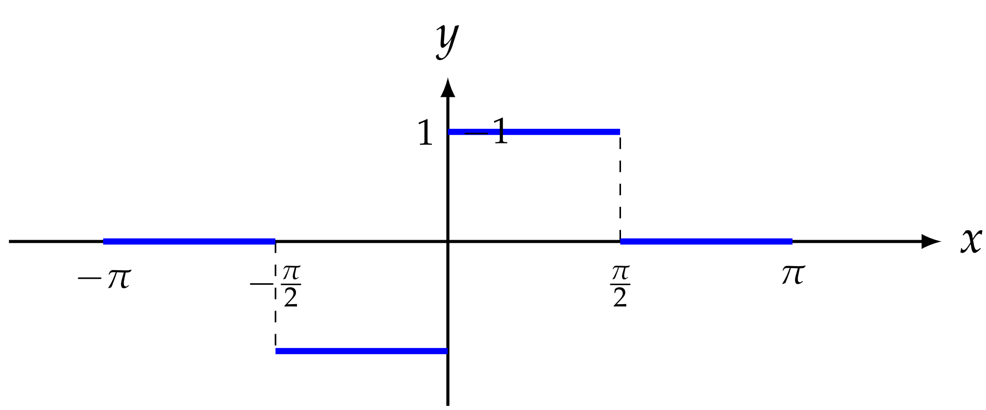
onde:

$$b_n = \frac{2}{L} \cdot \int_{-L}^{L} f(x) \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx \tag{26}$$

Exemplo 39. *Encontrar a série de senos da função:*

$$\begin{array}{rcl} f : \ [0, \frac{\pi}{2}] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1, & se \ \ 0 < x < \frac{\pi}{2} \\ 0, & se \ \ \frac{\pi}{2} < x < \pi \end{cases} \end{array}$$

Solução: Para obter a série de senos, selecionamos a extensão ímpar da função em $[-\pi, \pi]$, cujo gráfico é dado abaixo:



e calculamos os coeficientes:

$$b_n = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \widetilde{f}(x) \cdot \sin(nx)\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \left[\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot \sin(nx)\, dx + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} 0 \cdot \sin(nx)\, dx \right] =$$
$$= \frac{2}{n\pi}$$

de modo que a série de Fourier é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi \cdot n} \cdot \sin(nx)$$

9 Integração de Séries de Fourier

Começaremos com um lema importante sobre integrais de funções periódicas:

Lema 40. *Se $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, periódica de período $2L$, então $\forall x \in \mathbb{R}$, temos:*

$$\int_{x-L}^{x+L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

Demonstração. Seja $G(x) = \int_{x-L}^{x+L} f(x)dx$. Mostraremos que G é constante.
Com efeito, observe que, como f é contínua, podemos usar o Teorema Fundamental do Cálculo para computar o valor da derivada de G:

$$\frac{dG}{dx} = \frac{d}{dx} \int_{x-L}^{x+L} f(x)dx = f(x+L) - f(x-L) = f(x) - f(x) = 0$$

Logo, a derivada de G é a função identicamente nula e depreendemos que G é constante, de modo que $G(x) = G(0) = \int_{-L}^{L} f(x)dx$, e segue o resultado. Ademais, se fizermos $y = x + L$ neste resultado, seguirá que:

$$\int_{x}^{x+2L} f(x)dx = \int_{-L}^{L} f(x)dx$$

□

9.1 O Teorema sobre Integração de Séries de Fourier

Seja f uma função integrável e absolutamente integrável, de período $2L$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a qual supomos ser igual á sua série de Fourier:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

Ademais, supondo que a série converge uniformemente para a função, podemos integrá-la termo a termo, concluindo que:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^b a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx + \int_a^b b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)dx\right] \tag{27}$$

Comecemos com uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua. Definimos a função $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, pela seguinte expressão:

$$F(x) = \int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt \tag{28}$$

a qual é contínua. Como consequência do **Teorema Fundamental do Cálculo**, temos que $F'(x)$ existe em todos os pontos x onde f é contínua e, mais ainda, $F'(x) = f(x)$ nesses pontos. Assim, $F'(x)$ é seccionalmente contínua.

Observamos também que F é periódica de período $2L$, pois podemos escrever:

$$F(x+2L) - F(x) = \int_x^{x+2L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dx = \int_{-L}^{L} \left[f(t) - \frac{a_0}{2}\right] dt = \tag{29}$$

$$= \int_{-L}^{L} f(t)dt - \int_{-L}^{L} \frac{a_0}{2}dt = a_0L - a_0L = 0 \tag{30}$$

Resumindo, temos que F é contínua (pois é integral de uma função), tem derivada $F' = f(t)$ contínua por partes, pois foi esta a condição exigida primeiramente de $f(t)$. Aplicando o Teorema de Fourier, pois estamos satisfazendo suas hipóteses:

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right] \tag{31}$$

Onde:

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx, n \geq 0$$

$$B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} F(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx, n \geq 1$$

Integrando por partes, podemos obter:

$$A_n = \frac{1}{L}\left[F(x)\frac{L}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{L}|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{L}{n\pi}F'(x)\sin\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

De modo que:

$$A_n = \frac{-Lb_n}{n\pi}, n \geq 1 \tag{32}$$

Analogamente:

$$B_n = \frac{1}{L}\left[-F(x)\frac{L}{n\pi}\cos\frac{n\pi x}{L}|_{-L}^{L} - \int_{-L}^{L}\frac{L}{n\pi}F'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx\right]$$

De modo que:

$$B_n = \frac{La_n}{n\pi}, n \geq 1 \tag{33}$$

Para calcularmos A_0, basta fazermos $x = 0$ em (31), e obtemos:

$$0 = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n$$

Assim,

$$A_0 = \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} \tag{34}$$

Assim, usando (28), (31) e as expressões para os coeficientes de Fourier em (32), (33) e (34), obtemos:

$$\int_0^x f(t)dt = F(x) + \frac{a_0 x}{2}$$

$$\int_0^x f(t)dt = \frac{a_0 x}{2} + \frac{L}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{L}{n\pi}b_n\cos\frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi}a_n\sin\frac{n\pi x}{L}$$

Que pode, equivalentemente ser escrita como, se observarmos as igualdades entre os coeficientes de $F(x)$ e de $f(x)$ em suas séries de Fourier:

$$\int_0^x f(t)dt = \int_0^x \frac{a_0}{2}dt + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^x a_n\cos\frac{n\pi t}{L}dt + \int_0^x b_n\sin\frac{n\pi t}{L}dt\right) \tag{35}$$

A expressão (35) fornece (27) fazendo-se $x = a$ e $x = b$ e subtraindo-se as expressões então obtidas.

Assim, acabamos de demonstrar o:

Teorema 41 (Teorema sobre Integração de Séries de Fourier:). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função periódica de período $2L$ e seccionalmente contínua e seja:*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{n\pi x}{L} \right) \tag{36}$$

sua série de Fourier. Então:

(i) a série pode ser integrada termo a termo e o valor da série integrada é a integral de f; mais precisamente,

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{a_0}{2}dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_a^b \cos \frac{n\pi x}{L}dx + b_n \int_a^b \sin \frac{n\pi x}{L}dx \right) \tag{37}$$

(ii) a função $F(x) = \int_0^x [f(t) - (\frac{a_0}{2})]dt$ é periódica de período $2L$, contínua, tem derivada $F'(x)$ seccionalmente contínua e é representada por sua série de Fourier:

$$\int_0^x \left[f(t) - \frac{a_0}{2} \right] dt = \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{L}{n\pi} b_n \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{L}{n\pi} a_n \sin \frac{n\pi x}{L} \tag{38}$$

onde:

$$\frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n} = \frac{1}{2L} \int_{-L}^{L} F(x)dx \tag{39}$$

Observação 42. *Para as aplicações, o teorema acima toma a forma prática seguinte:*
Se

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \left(\frac{n\pi x}{L} \right) + b_n \sin \left(\frac{n\pi x}{L} \right)$$

então:

$$F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{2L} \int_L^L F(x)dx + \frac{L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-b_n}{n} \cos \frac{n\pi x}{L} + \frac{a_n}{n} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

Aplicações: Todas as funções a seguir são periódicas de período fundamental L.

(i) Considere a função $f(x) = x$, para $-L \le x < L$. temos

$$f(x) \sim \frac{2L}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} \sin \frac{n\pi x}{L}$$

Logo,

$$F(x) = \frac{x^2}{2}$$

e

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)dx = \frac{L^2}{6}$$

e, portanto:

$$\frac{x^2}{2} = \frac{L^2}{6} + \frac{2L^2}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{40}$$

Para $-L \leq x \leq L$.

(ii) Aplicando novamente o teorema a (40), e como:

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t^2}{2} - \frac{L^2}{6}\right) dt = \frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)dx = 0$$

obtemos:

$$\frac{x^3}{6} - \frac{L^2 x}{6} = \frac{2L^3}{\pi^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^3}\sin\frac{n\pi x}{L} - L \leq x \leq L \tag{41}$$

Para $-L \leq x \leq L$

(iii) Usaremos o teorema acima mais uma vez em (41).Como

$$F(x) = \int_0^x \left(\frac{t^3}{6} - \frac{L^2 t}{6}\right) dt = \frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12}$$

$$\frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} F(x)dx = -\frac{7L^4}{360}$$

Obtemos:

$$\frac{x^4}{24} - \frac{L^2 x^2}{12} = -\frac{7L^4}{360} + \frac{2L^4}{\pi^4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}\cos\frac{n\pi x}{L} \tag{42}$$

Fazendo $x = L$ em (42), obteremos:

$$\frac{\pi^4}{90} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$$

10 Identidade de Parseval

Dada uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, periódica de período $2L$, integrável e absolutamente integrável, podemos calcular sem problemas os seus coeficientes de Fourier, a_0, a_n e b_n. A Identidade de Parseval (em homenagem ao matemático francês do século XVIII, Marc-Antoine Parseval des Chênes) nos diz que:

$$\frac{1}{2}{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

Informalmente essa igualdade nos diz que a soma dos quadrados dos coeficientes de Fourier de uma função é igual à integral do quadrado da função. Mais formalmente, observamos que a igualdade de Parseval valerá para funções cujo quadrado é absolutamente integrável.

Definição 43. *Uma função $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é de **quadrado integrável** se, e somente se:*

$$\int_{-L}^{L} |f(x)| dx$$

existir e for finito. ***Notação:*** $f \in \mathscr{L}^2([-L, L])$.

Observe que toda função contínua, em particular, é de quadrado integrável.

Teorema 44 (Segundo Teorema de Fourier). *Sejam $f \in \mathscr{L}^2([-L, L], \mathbb{R})$ e:*

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cdot \cos\left(\frac{k\pi x}{L}\right) + b_k \cdot \sin\left(\frac{k\pi x}{L}\right) \right)$$

onde a_0, a_k, b_k são os coeficientes de Fourier de f. Então:

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-L}^{L} [f(x) - s_n(x)]^2 dx = 0$$

Este resultado nos dá a relação entre a média do valor absoluto do quadrado da função e seus coeficientes de Fourier. Devemos observar, portanto, que o objetivo deste teorema não é calcular a média do valor absoluto do quadrado de uma função sabendo-se seus coeficientes de Fourier (pois isto pode ser feito por meio de simples integração), mas sim *relacionar* tais valores.

Teorema 45 (Identidade de Parseval). *Seja* $f :]-L, L[\to \mathbb{R}$ *uma função de quadrado integrável, ou seja, tal que para quaisquer* $a < b$ *tenha-se:*

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty,$$

e cuja série de Fourier converge uniformemente para ela. Então:

$$\frac{1}{2}{a_0}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx \tag{43}$$

Demonstração. Admitindo que:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

como a série converge uniformemente, podemos multiplicar por $f(x)$ e integrar termo a termo a igualdade acima, donde obteremos:

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0}{2} \int_{-L}^{L} f(x) dx + \\ + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx + b_n \int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx \right)$$

onde usando as expressões $\int_{-L}^{L} f(x) \cos\frac{n\pi x}{L} dx = a_n L$, $\int_{-L}^{L} f(x) \operatorname{sen}\frac{n\pi x}{L} dx = b_n L$ e $\int_{-L}^{L} f(x) dx = La_0$, chegamos a:

$$\int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} L + L \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

E finalmente a:

$$\frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x)^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

□

A identidade de Parseval , no entanto, é válida sob condições menos restritivas que estas que impusemos aqui.

Vejamos agora algumas aplicações da igualdade de Parseval.

Aplicação 1: Usaremos a identidade de Parseval para encontrar a soma de uma série infinita. Considere a expressão (41), que nos diz que os coeficientes de Fourier da função

$f(x) = x^3 - L^2x$, integrável e absolutamente integrável, periódica de período $2L$ são $a_n = 0$ (trata-se de uma função ímpar) e:

$$b_n = \frac{(-1)^n 12L^3}{n^3\pi^3}$$

Daí, se aplicarmos diretamente a identidade de Parseval, (43), obteremos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

Aplicação 2: Podemos utilizar a identidade de Parseval, (43) para garantir a convergência de algumas séries. Por exemplo, seja $f : [0, L] \to \mathbb{R}$ uma função continuamente derivável tal que $f(0) = f(L) = 0$, e seja:

$$b_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\text{sen}\,\frac{n\pi x}{L}dx \tag{44}$$

Mostraremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \infty \tag{45}$$

I.e., que a série dos termos b_n converge absolutamente, e, portanto, converge. Para tanto, integramos por partes (44), para chegarmos em:

$$b_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^L f'(x)\cos\frac{n\pi x}{L}dx$$

Portanto, pensando em f como uma função ímpar e periódica de período $2L$, sua derivada, f' é uma função par, periódica de período $2L$, concluímos que:

$$b_n = \frac{L}{n\pi}a'_n \tag{46}$$

Onde b_ns são os coeficientes de Fourier de f e a'_ns são os coeficientes de Fourier de f'. Observe que, para quaisquer a, b temos:

$$(a+b)^2 \geq 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \geq 0$$

$$\frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2 \geq ab$$

Usando a desigualdade acima, obtemos de (46):

$$|b_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2}\frac{1}{n^2} + \frac{1}{2}|a'_n|^2$$

Logo, temos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \leq \frac{L^2}{2\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} |a'_n|^2$$

Onde a segunda série (a dos coeficientes de Fourier de f') converge graças à Identidade de Parseval.

11 Outros tipos de Convergência

Existem outros teoremas sobre convergência das séries de Fourier; eles dizem, essencialmente, que se definirmos "outros tipos de convergência", as séries de Fourier terão um comportamento ainda melhor. No que segue, escrevemos:

$$s_m(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right)$$

O primeiro teorema mostra que a série de Fourier de uma função contínua por partes determina a função.

Teorema 46 (Teorema de Fejér). *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua por partes, periódica de peíodo $2L$. Definindo:*

$$\sigma_m(x) = \frac{s_0(x) + s_1(x) + \cdots + s_m(x)}{m+1}$$

temos que:

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_m(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\lim_{t\to x_+} f(t) + \lim_{t\to x_-} f(t) \right)$$

O segundo teorema que nos interessa se baseia na ideia de "erro quadrático mínimo". Sejam f e g duas funções definidas em um intervalo $]-L, L[$. A "**distância quadrática média**" entre f e g é:

$$d(f,g) = \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} |f(x) - g(x)|^2 dx$$

Esta "distância" nos dá uma medida da diferença entre f e g que é útil em muitos casos.

Teorema 47. *Seja $f :]-L, L[\to \mathbb{R}$ uma função contínua, e consideremos sua extensão periódica de período $2L$. Valem:*

(a) $\lim_{m\to\infty} \left[\frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} |s_m(x) - f(x)|^2 dx\right] = 0$;

(b) Se $\phi(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{n=1}^{m} \left(c_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + d_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)\right)$ *é um polinômio trigonométrico de ordem m, então:*

$$\frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} |s_m(x) - f(x)|^2 dx \leq \frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} |\phi(x) - f(x)| dx$$

(c) Identidade de Parseval:

$$\frac{1}{L} \cdot \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)$$

(d) A série de Fourier de f pode ser integrada termo a termo, isto é, para todo $x \in \mathbb{R}$, temos:

$$\int_0^x f(t) dt = \frac{a_0 \cdot x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \left[a_n \cdot \cos\left(\frac{n\pi t}{L}\right) + b_n \cdot \sin\left(\frac{n\pi t}{L}\right)\right] dt$$

12 Desigualdade de Bessel

Definição 48. *Uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ é chamada* ***quadrado integrável*** *se f e $|f|^2$ são integráveis. Dizemos que tal função é de classe $\mathscr{L}^2$. Portanto, temos que $\mathscr{L}^2$ é o espaço vetorial de todas as funções quadrado integrável.*

Observação 1: Se f for limitada e integrável a Riemann, então f será quadrado integrável e:

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx \leq M^2(b-a)$$

Onde $M = \sup\{|f(x)|; x \in [a, b]\}$.

Observação 2: Se f não é limitada, pode acontecer que ela seja $\mathscr{L}^1$, mas não $\mathscr{L}^2$.

Consideremos a função $f(x) = x^{-\frac{1}{2}}$, com $0 < x < 1$. Sua integral imprópria de 0 a 2 converge, mas a integral imprópria do quadrado do seu módulo diverge:

$$\int_0^1 x^{-\frac{1}{2}} dx = 2;$$

$$\int_0^1 |x^{-\frac{1}{2}}|^2 dx = \int_0^1 x^{-1} dx = -\lim_{\varepsilon \to 0} \ln \varepsilon = \infty$$

Observação 3: Nossas funções estão definidas em intervalos limitados. Ademais, se $f \in \mathscr{L}^2$ então $f \in \mathscr{L}^1$.

A demonstração deste fato está relacionada à desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais:

Desigualdade de Cauchy-Schwarz para Integrais: Sejam f e g funções de quadrado integráveis em um intervalo $[a, b]$. Então fg é absolutamente integrável e:

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \left[\int_a^b |g(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} \tag{47}$$

Abordaremos melhor esta desigualdade na próxima seção.

Usando a desigualdade (47) com $g(x) \equiv 1$, obtemos:

$$\int_a^b |f(x)| dx \leq \sqrt{b-a} \left[\int_a^b |f(x)|^2 dx \right]^{\frac{1}{2}} < \infty$$

Como f é quadrado integrável, então a integral da direita converge, e pelo teste da comparação, a integral da esquerda converge, implicando que a função f é $\mathscr{L}^1$.

Definição 49. *Uma sequência de funções (f_n) de quadrado integrável, em um intervalo $[a, b]$,* ***converge, em média quadrática****, para uma função f de quadrado integrável, se:*

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx = 0$$

A expressão:

$$e_n = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx$$

é chamada erro médio quadrático, na aproximação de f por f_n.

Mostraremos agora que as reduzidas de uma série de Fourier, $s_n(x)$, de uma função de quadrado integrável são os polinômios trigonométricos que *melhor* aproximam f em média quadrática. Mais precisamente, consideremos um polinômio trigonométrico de ordem n:

$$t_n(x) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)$$

e designemos por:

$$e_n = \int_{-L}^{L} |s_n(x) - f(x)|^2 dx$$

$$\hat{e}_n = \int_{-L}^{L} |t_n(x) - f(x)|^2 dx$$

Provemos que:

$$e_n \leq \hat{e}_n \tag{48}$$

Para tanto, utilizamos as relações de ortogonalidade dadas no **Teorema 18** e as expressões dos coeficientes de Fourier, e obtemos:

$$\begin{aligned}
\hat{e}_n = \int_{-L}^{L} |t_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \\
= \int_{-L}^{L} \left| \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) - f(x) \right|^2 dx = \\
= \int_{-L}^{L} \left| \frac{c_0^2}{4} + c_0 f(x) + f^2(x) + \right. \\
2(c_0 - f(x)). \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) + \\
\left. + \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)^2 \right| dx = \\
= L\frac{c_0^2}{4} + \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 \, dx - c_0 \int_{-L}^{L} f(x) \, dx + \int_{-L}^{L} c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right) dx + \\
\int_{-L}^{L} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen} \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx
\end{aligned}$$

Observando agora que:

$$\int_{-L}^{L} f(x) dx = La_0$$

e que:

$$\int_{-L}^{L} c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen}\, \frac{k\pi x}{L} \right) dx =$$

$$= c_0 \sum_{k=1}^{n} \left(c_k \int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L}\, dx + d_k \int_{-L}^{L} \text{sen}\, \frac{k\pi x}{L}\, dx \right)$$

Ademais:

$$\int_{-L}^{L} \cos \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{L}{k\pi} \text{sen}\, \frac{k\pi x}{L} \Big|_{x=-L}^{x=L} = 0$$

$$\int_{-L}^{L} \text{sen}\, \frac{k\pi x}{L} dx = \frac{L}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{L} \Big|_{x=-L}^{x=L} = 0$$

Temos ainda, que

$$\int_{-L}^{L} \left(\sum_{k=1}^{n} c_k \cos \frac{k\pi x}{L} + d_k \text{sen}\, \frac{k\pi x}{L} \right)^2 dx =$$

$$\int_{-L}^{L} \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^2 \cos^2 \frac{k\pi x}{L} + d_k^2 \text{sen}\,^2 \frac{k\pi x}{L}^2 + T_C \right) dx$$

Além disso:

$$\int_{-L}^{L} \sum_{k=1}^{n} \left(c_k^2 \cos^2 \frac{k\pi x}{L} + d_k^2 \text{sen}\,^2 \frac{k\pi x}{L}^2 + T_C \right) dx =$$

$$\sum_{k=1}^{n} \left(c_k^2 \int_{-L}^{L} \cos^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx + d_k^2 \int_{-L}^{L} \text{sen}\,^2 \frac{k\pi x}{L}\, dx + \int_{-L}^{L} T_C\, dx \right)$$

onde T_C são os termos cruzados em seno e cosseno. Utilizando as relações de ortogonalidade dadas no **Teorema 18**, a expressão acima se iguala a:

$$\sum_{k=1}^{n} (c_k^2 + d_k^2)$$

$$\hat{e}_n \quad = \quad \frac{L}{2} c_0^2 \; + \; L \sum_{k=1}^{n} (c_k^2 + d_k^2) \; + \; \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx \; - \; L a_0 c_0 \; - \; 2L \sum_{k=1}^{n} (a_k c_k + b_k d_k)$$

E daí, completando quadrados, temos:

$$\hat{e}_n = \frac{L}{2}(c_0 - a_0)^2 + L \sum_{k=1}^{n} (c_k - a_k)^2 +$$

$$+ L \sum_{k=1}^{n} (d_k - b_k)^2 + \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx - \frac{L a_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2)$$

Observemos que obteremos o menor valor de $\hat{e}_n$ quando $c_0 = a_0$, $c_k = a_k$ e $d_k = b_k$ (para $k = 1, \cdots, n$). E neste caso, vemos que $\hat{e}_n = e_n$. Logo, em geral, teremos:

$$e_n \leq \hat{e}_n$$

Para estabelecermos a *desigualdade de Bessel* abaixo, observamos que $\hat{e}_n \geq 0$ para qualquer escolha dos coeficientes c_n e d_n, portanto:

$$0 \leq e_n = \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx - \frac{La_0^2}{2} - L \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \tag{49}$$

e daí:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx$$

por fazer $a_0 = c_0$, $a_k = c_k$ e $b_k = d_k$. Como a desigualdade vale para qualquer n, podemos concluir que

Desigualdade de Bessel: Se $f : [-L, L] \to \mathbb{R}$ é uma função de classe $\mathscr{L}^2$, então:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} |f(x)|^2 dx \tag{50}$$

13 Convergência Uniforme da Série de Fourier

Nesta seção, pretendemos fornecer condições suficientes sobre uma função f, periódica de período $2L$ que garantam a convergência uniforme de sua série de Fourier. A ideia é aplicar o **teste M de Weierstrass**.

Teorema 50 (Primeiro Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja f uma função periódica de período $2L$, contínua e com primeira derivada de quadrado integrável. Então a série de Fourier de f converge uniformemente para f. (i.e., as condições do teorema são $f \in C$ e $f' \in \mathscr{L}^2$)*

Teorema 51 (Segundo Teorema sobre Convergência Uniforme da Série de Fourier). *Seja f periódica de período $2L$, seccionalmente contínua e tal que a derivada primeira é de quadrado integrável. Então, a série de Fourier de f converge uniformemente para f em todo intervalo fechado que não contenha pontos de descontinuidade de f.*

Referências

[1] Ávila, G., **Cálculo das Funções de Uma Variável**, volume 2, 7ª edição, Edgard Blücher, 1999.

[2] Ávila, G., **Introdução à Análise Matemática**, Edgard Blücher, 1999.

[3] Boulos, P.; Abud, Z. I., **Cálculo Diferencial e Integral**, Volume 2, Makron Books, São Paulo, 2000.

[4] Berni, J. C., **Equação do Calor – Modelagem Matemática e Análise de Fourier**, BicMat, volume 6, pp. 49 – 59, 2009.

[5] Figueiredo, D. G., **Análise I**, 2^a edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[6] Gouvêa, F. Q., **Séries Infinitas**, Notas de aula. São Paulo, 1982.

[7] Hyslop, J. M., **Infinite Series**, 5th edition, Oliver and Boyd, Edimburgo, 1970.

[8] Lima, E.L., **Curso de Análise**, volume 1, 14^a edição. Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada. Rio de Janeiro, 2016.

[9] Piskunov, L., **Differential and Integral Calculus**, MIR Publishers, Moscow. Traduzido do Russo por G. Yankovsky, 1965.