# MAT0111 - Cálculo Diferencial e Integral I
# Agenda 06

Prof. Jean Cerqueira Berni*

## Apresentação

Nesta agenda introduzimos o conceito de continuidade de uma função em um ponto, bem como o de descontinuidade. Damos diversos exemplos de funções contínuas, utilizando-nos das propriedades aritméticas dos limites.

Apresentamos um resultado que nos garante a continuidade da composição de funções e técnicas de resolução de limites usando as noções introduzidas.

## 1 Continuidade de Funções

Informalmente, definimos uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ como sendo contínua em um ponto do seu domínio quando satisfizer a propriedade abaixo:

> "É possível controlar a distância de $f(x)$ a $f(x_0)$ simplesmente controlando a distância entre $x$ e $x_0$."

Vamos tornar mais preciso o enunciado acima: a distância entre $f(x)$ e $f(x_0)$ é $|f(x) - f(x_0)|$, enquanto a distência entre $x$ e $x_0$ é $|x - x_0|$. Reformulando a afirmação anterior, temos:

> "É possível controlar $|f(x) - f(x_0)|$ simplesmente controlando a $|x - x_0|$."

Mas o que significa, exatamente, "controlar $|f(x) - f(x_0)|$"? Significa que podemos *limitar superiormente* $|f(x) - f(x_0)|$ por *qualquer* número positivo. De modo, análogo, "controlar $|x - x_0|$" significa *limitar* $|x - x_0|$ por algum número positivo. Note, assim, que $f$ será contínua em $x_0$ se para controlar a distância de $f(x)$ a $f(x_0)$ for *suficiente* limitarmos a distância de

*jeancb@ime.usp.br

$x$ a $x_0$ a um valor "pequeno o bastante".

Nos termos acima, podemos re-enunciar a continuidade de uma função $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ em $x_0 \in D$ como:

"É possível tornar a expressão $|f(x) - f(x_0)|$ limitada superiormente por um número *qualquer*, $\varepsilon > 0$ simplesmente tornando a expressão $|x - x_0|$ menor do que um certo número positivo, $\delta > 0$."

Nestes termos, $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x_0$ se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ (digamos uma "margem de erro para o resultado"), existir $\delta > 0$ (digamos, uma "margem de erro para o dado") tal que, se $x$ está no domínio de $f$ e $|x - x_0| < \delta$, tenha-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Em termos simbólicos, temos:

**Definição 1 (continuidade "raiz").** *Sejam* $f : D \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função e* $x_0 \in D = \operatorname{dom}(f)$. *Dizemos que f* ***é contínua em*** $x_0$ *se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D)\&(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Observe, agora, o caso em que $x_0 \in D'$. Note que a sentença:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D)\&(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{1}$$

é muito similar àquela que usamos para expressar que:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

qual seja:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)((x \in D)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon) \tag{2}$$

Note que, claramente, (1) $\Rightarrow$ (2), uma vez que se para todo $x$ satisfazendo $|x - x_0| < \delta$ vale $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$, *a fortiori* para todo $x$ satisfazendo $0 < |x - x_0| < \delta$ (uma condição *mais exigente* que $|x - x_0| < \delta$, pois excui a possibilidade de $x$ ser igual a $x_0$) também tem-se $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Perceba que, como estamos tratando de **continuidade**, o ponto $x_0$ *deve* pertencer ao domínio de $f$, ou seja, existe $f(x_0)$. Desta forma, se estiver satisfeita a sentença (2), teremos:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \begin{cases} (x \neq x_0)\&(|x - x_0| < \delta) \\ (x = x_0)\&(|x - x_0| < \delta) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < |x - x_0| < \delta \overset{(2)}{\Rightarrow} |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon \\ x = x_0 \Rightarrow |f(x_0) - f(x_0)| = 0 < \varepsilon \end{cases}$$

ou seja, vale (1).

Logo, se $|x - x_0| < \delta$ tem-se, de um modo ($x \neq x_0$) ou de outro ($x = x_0$), $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

A argumentação acima nos permite descrever a continuidade de uma função como segue:

**Definição 2 (continuidade "Nutella").** *Sejam $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função e $x_0 \in A = \operatorname{dom}(f)$. Dizemos que $f$ **é contínua em** $x_0$ se, e somente se, uma das seguintes condições for satisfeita:*

(C1) *$x_0$ é ponto isolado de $D$;*

(C2) *Caso $x_0 \in D'$, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.*

*Quando a função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em todos os pontos de seu domínio, dizemos simplesmente que "$f$ é contínua".*

Conforme vimos na agenda anterior, as seguintes funções são contínuas em qualquer ponto de seu domínio:

- a função constante, $f(x) = k$ (**Exemplo 2** da Agenda 05);
- a função afim, $f(x) = a \cdot x + b$ (**Exemplo 3** da Agenda 05);
- a função $f(x) = \sin(x)$ (**Proposição 4** da Agenda 05);
- a função $x \mapsto |x|$ (**Exemplo 10** combinado com o **Lema 5** da Agenda 05).

**Definição 3 (função descontínua em um ponto).** *Dizemos que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é **descontínua** em $x_0 \in A$ se, e somente se $x_0$ for ponto de acumulação de $A$ e $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$ ou se $\nexists \lim_{x \to x_0} f(x)$.*

**Exemplo 4 (função descontínua em um ponto).** *A função:*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

*não é contínua em 0, posto que:*

$$\nexists \lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}.$$

*De fato, veja que os limites laterais são distintos:*

$$\lim_{x \to 0_+} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} g(x) = \lim_{x \to 0} 1 = 1.$$

$$\lim_{x \to 0_-} g(x) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} g(x) = \lim_{x \to 0} -1 = -1.$$

**Exemplo 5 (função descontínua em um ponto).** *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \ se \ x \neq 0 \\ 1, \ se \ x = 0 \end{cases} \end{array}$$

*Tal função é **descontínua** em* $0$*, uma vez que o limite de* $g(x)$ *conforme* $x$ *tende a* $x_0$ <u>*não existe*</u>*.*

**Exemplo 6 (função descontínua em todo o seu domínio).** *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, \ se \ x \in \mathbb{Q} \\ 0, \ se \ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

*Tem-se, assim, por exemplo,* $h(1) = h(1/2) = h(2/3) = 1$ *e* $h(\sqrt{2}) = h(\sqrt{3}) = h(\pi) = 0$*.*

*Seja* $x_0 \in \mathbb{R}$ *qualquer. Mostraremos que* $h$ *não é contínua em* $x_0$ *mostrando que:*

$$\nexists \lim_{x \to x_0} h(x).$$

*Isto se verifica devido ao fato de que, em qualquer vizinhança de* $x_0$*, ou seja, para qualquer* $\delta > 0$*, existem sempre* $x_i \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ *e* $x_r \in ]x_0 - \delta, x_0 + \delta[ \cap \mathbb{Q}$*.*

*Vamos construir duas sequências convergindo para* $x_0$*,* $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *e* $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$*, tais que* $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q})$ *e* $(\forall n \in \mathbb{N})(b_n \in \mathbb{Q})$*. Seguirá disto que:*

$$a_n \to x_0 \ \ e \ \ b_n \to x_0$$

*e:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(h(a_n) = 0)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(h(b_n) = 1).$$

***Construção de*** $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$***:*** *Dado* $n \in \mathbb{N}$*, pelo **Teorema 20** do* Material Suplementar*, existe um número irracional entre* $x_0 - \dfrac{1}{n}$ *e* $x_0 + \dfrac{1}{n}$*. Escolhemos um número irracional neste intervalo e o* *denotamos por $a_n$. Note que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, e teremos, para $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{n} < a_n < x_0 + \frac{1}{n} < x_0 + \varepsilon$, o que mostra que $a_n \to x_0$.*

***Construção de $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$:** Dado $n \in \mathbb{N}$, pelo **Teorema 22** do* Material Suplementar, *existe um número racional entre $x_0 - \frac{1}{n}$ e $x_0 + \frac{1}{n}$. Escolhemos um número racional neste intervalo e o denotamos por $b_n$. Note que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, e teremos, para $n \geq n_0(\varepsilon)$, $x_0 - \varepsilon < x_0 - \frac{1}{n} < b_n < x_0 + \frac{1}{n} < x_0 + \varepsilon$, o que mostra que $b_n \to x_0$.*

*Pelo **Teorema 15** das* Notas da agenda 08, *de 11 de setembro de 2020, segue que:*

$$\nexists \lim_{x\to x_0} h(x).$$

*Uma vez que $x_0 \in \mathbb{R}$ é qualquer, a função é descontínua em todo seu domínio.*

## 2 Propriedades das Funções Contínuas

Convém enunciarmos propriedades fundamentais das funções contínuas, como o seu fechamento sob as operações de soma, subtração, multiplicação e divisão.

O teorema a seguir é uma consequência imediata da definição de continuidade em um ponto e das propriedades aritméticas dos limites:

**Teorema 7.** *Sejam $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas em $x_0 \in A \cap A'$. Então:*

(I) *$f + g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0$;*

(II) *$f - g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0$;*

(III) *$f \cdot g : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0$;*

(IV) *Se $g(x_0) \neq 0$, $\frac{f}{g} : A \setminus g^{-1}[\{0\}] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0$;*

*Demonstração.* Ad (I): Como $f$ e $g$ ão contínuas em $x_0$, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite da soma é a soma dos limites, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0}(f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)+g(x_0) = (f+g)(x_0).$$

Ad (II): Como $f$ e $g$ ão contínuas em $x_0$, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite da diferença é a diferença dos limites, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0}(f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)-g(x_0) = (f-g)(x_0).$$

Ad (III): Como $f$ e $g$ ão contínuas em $x_0$, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como o limite do produto é o produto dos limites, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \cdot \lim_{x\to x_0} g(x) = f(x_0)\cdot g(x_0) = (f\cdot g)(x_0).$$

Ad (IV): Como $f$ e $g$ ão contínuas em $x_0$, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \text{ e } \lim_{x\to x_0} g(x) = g(x_0)$$

Como $g(x_0) \neq 0$ e, nesta condição, o limite do quociente é o quociente dos limites, tem-se:

$$\lim_{x\to x_0}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)} = \frac{f(x_0)}{g(x_0)} = \left(\frac{f}{g}\right)(x_0).$$

□

**Observação 8.** *É falso que a soma de suas funções, $f, g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ descontínuas em $x_0 \in A \cap A'$ seja descontínua em $x_0$. Considere as funções:*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, \ se\ x \geq 0 \\ -1, \ se\ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -1, \ se\ x \geq 0 \\ 1, \ se\ x < 0 \end{cases} \end{array}$$

*ambas descontínuas em $x_0 = 0$. No entanto, a soma destas duas funções, $g + h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, é a função constante igual a zero, que é contínua em $x_0 = 0$.*

**Teorema 9 (Teorema da Conservação do Sinal).** *Seja $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínua em $x_0 \in A'$. Se $f(x_0) > 0$, então existe $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow f(x) > 0).$$

*Outrossim, se $f(x_0) < 0$, então existe $\eta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \eta \Rightarrow f(x) < 0)$$

*Demonstração.* De fato, uma vez que $f(x_0) > 0$ e $f$ é contínua em $x_0 \in A'$, dado $\varepsilon = \dfrac{f(x_0)}{2} > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in A)(|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \frac{f(x_0)}{2}),$$

ou seja,

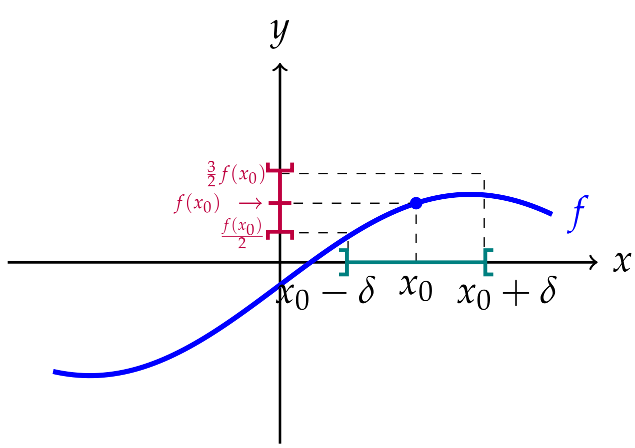
$$-\frac{f(x_0)}{2} < f(x) - f(x_0) < \frac{f(x_0)}{2} \iff$$

$$0 < \frac{f(x_0)}{2} < f(x) < \frac{3f(x_0)}{2}$$

Assim, se $x \in A$ é tal que $|x - x_0| < \delta$ então:

$$0 < f(x).$$

O outro caso é análogo. $\square$



## 2.1 Exemplos de Funções Contínuas

Nesta subseção apresentamos diversos exemplos de funções contínuas.

**Definição 10 (função polinomial).** *Seja $n \in \mathbb{N}$. Uma **função polinomial de grau** $n$ é uma função da forma:*

$$\begin{array}{rccl} p: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a_n \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + \cdots + a_2 \cdot x^2 + a_1 \cdot x + a_0, \end{array}$$

*onde $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, a_n \in \mathbb{R}$ são tais que $a_n \neq 0$.*

**Exemplo 11 (continuidade da função $f(x) = 2 \cdot x + 3$ no ponto $x_0 = 1$).** *Dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que vale a seguinte implicação:*

$$|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| = |2 \cdot x + 3 - (2 \cdot 1 + 3)| = |2 \cdot x + 3 - 5| < \varepsilon$$

*Vamos buscar uma condição suficiente envolvendo o termo $|x - x_0| = |x-1|$ para que tenhamos $|2 \cdot x - 2| < \varepsilon$. Temos:*

$$|2 \cdot x - 2| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |2| \cdot |x-1| < \varepsilon \iff$$

$$\iff |x-1| < \frac{\varepsilon}{2}$$

*Deste modo, se tomarmos $\delta = \varepsilon/2$, teremos a implicação:*

$$|x-1| < \delta = \frac{\varepsilon}{2} \Rightarrow |2 \cdot x - 2| < \varepsilon$$

*Assim, $f$ é contínua em $x_0 = 1$, pois dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \varepsilon/2 > 0$ tal que $|x-1| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(1)| < \varepsilon$.*

*Para alguns valores de $\varepsilon$ entre 0 e 3, veja https://www.geogebra.org/m/fdspkk3c.*

**Exemplo 12 (continuidade da função polinomial).** *Toda função polinomial é contínua em qualquer ponto de seu domínio.*

*Com efeito, segue do **Teorema 7** que, como a função $f(x) = 1 \cdot x + 0$ é contínua e as funções constantes iguais a $a_0, \cdots, a_n$ são contínuas, pelo item (III) segue que $f^2(x) = x \cdot x = x^2, \cdots f^n(x) = x^n$ são funções contínuas em todo o seu domínio, bem como as funções $x \mapsto a_n \cdot x^n, \cdots, x \mapsto a_1 \cdot x, x \mapsto a_0$. Pelo item (I) do mesmo teorema segue que:*

$$p(x) = a_n \cdot x^n + \cdots + a_1 \cdot x + a_0$$

*é contínua em qualquer ponto do seu domínio, ou seja, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\lim_{x \to x_0} p(x) = p(x_0).$$

**Definição 13 (função racional).** *Uma **função racional** é uma função da forma:*

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} \setminus q^{-1}[\{0\}] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{p(x)}{q(x)} \end{array}$$

*onde $p(x)$ e $q(x)$ são funções polinomiais.*

**Exemplo 14.** *A função:*

$$\begin{array}{rccc} r: & \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^3 - 3x + 2x^2 + 1}{x^4 - 1} \end{array}$$

*é uma **função racional**.*

**Exemplo 15.** *A função:*

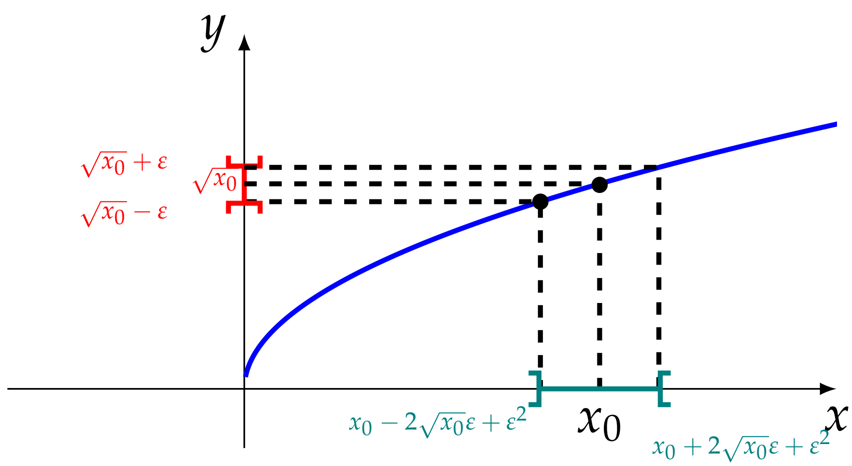
$$\begin{array}{rccc} f: & [0, \infty[ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

*é contínua em qualquer $x_0 \in [0, \infty[$.*

*De fato, seja $\varepsilon > 0$ dado e fixado. Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que sempre que $x \in [0, \infty[$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ tenhamos:*

$$|\sqrt{x} - \sqrt{x_0}| < \varepsilon$$

*Fazemos a análise do gráfico abaixo:*




*Note que devemos tomar cuidado para que o intervalo centrado em $\sqrt{x_0}$ não tenha nenhum número negativo, pois neste caso não poderíamos calcular os extremos usando a regra da função.*

*Assim, dado $\varepsilon > 0$, seja:*

$$\eta = \min\left\{\varepsilon, \sqrt{x_0}\right\}$$

*e desta forma garatimos que $\sqrt{x_0} - \eta \geq 0$.*

*A análise do gráfico sugere que devemos tomar $\delta = \min\{2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2, 2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2\}$.*

*Temos assim que se $0 < |x - x_0| < \delta$, então:*

$$-\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow$$

$$-(2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2) \leq -\delta < x - x_0 < \delta \leq 2\sqrt{x_0}\eta + \varepsilon^2 \Rightarrow$$

$$-(2\sqrt{x_0}\eta - \eta^2) < x - x_0 < 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 \iff$$

$$x_0 - 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 < x < x_0 + 2\sqrt{x_0}\eta + \eta^2 \iff$$

$$(\sqrt{x_0}-\eta)^2 < x < (\sqrt{x_0}+\eta)^2 \iff$$

$$\sqrt{x_0}-\varepsilon \leq \sqrt{x_0}-\eta < \sqrt{x} < \sqrt{x_0}+\eta \leq \sqrt{x_0}+\varepsilon \iff$$

$$-\varepsilon < \sqrt{x}-\sqrt{x_0} < \varepsilon \iff$$

$$\iff |\sqrt{x}-\sqrt{x_0}| < \varepsilon$$

*Assim, mostramos que:*

$$\lim_{x\to x_0} \sqrt{x} = \sqrt{x_0}$$

*Veja alguns exemplos concretos de $\varepsilon$ para $x_0 = 1$ em https://www.geogebra.org/m/w5ysft3a.*

**Exemplo 16 (continuidade das funções racionais).** *Toda função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio.*

*Com efeito, o domínio de uma função racional $x \mapsto p(x)/q(x)$, onde $x \mapsto p(x)$ e $x \mapsto q(x)$ são funções polinomiais consiste de todos os pontos $x_0 \in \mathbb{R}$ tais que $q(x_0) \neq 0$. Pelo item (IV) do **Teorema 7**, segue que como toda função polinomial é contínua, seu quociente é contínuo.Assim, para todo $x_0 \in \mathbb{R}$ tal que $q(x_0) \neq 0$ tem-se:*

$$\lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$$

**Exemplo 17 (continuidade da função seno).** *A função $y = \sin(x)$ é contínua em todos os pontos de seu domínio (veja **Exemplo 8** das Notas da Aula 07), uma vez que, para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$:*

$$\lim_{x\to x_0} \sin(x) = \sin(x_0).$$

**Proposição 18 (continuidade da função cosseno).** *Para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se:*

$$\lim_{x\to x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

*Demonstração.* Pelas **Fórmulas de Prostaférese**, tem-se, para quaisquer $x, x_0 \in \mathbb{R}$:

$$|\cos(x)-\cos(x_0)| = \left|-2\cdot\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\cdot\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right| = 2\left|\sin\left(\frac{x+x_0}{2}\right)\right|\cdot\left|\sin\left(\frac{x-x_0}{2}\right)\right|$$

e portanto:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right|$$

Seja $r > 0$ o número dado no item (5) do **Teorema 1** da Agenda 02. Para $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x - x_0| < 2r$, segue que:

$$|\cos(x) - \cos(x_0)| \leq 2 \cdot \left|\sin\left(\frac{x - x_0}{2}\right)\right| \leq 2 \cdot \frac{|x - x_0|}{2} = |x - x_0|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \min\{2r, \varepsilon\}$, e teremos:

$$(x \in \mathbb{R})\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\cos(x) - \cos(x_0)| \leq |x - x_0| < \varepsilon,$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} \cos(x) = \cos(x_0).$$

$\square$

**Proposição 19 (continuidade da função tangente).** *Seja $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$. Vale:*

$$\lim_{x \to x_0} \tan(x) = \tan(x_0).$$

*Demonstração.* Como $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}\}$, $\cos(x_0) \neq 0$. Utilizando que as funções seno e cosseno são ambas contínuas em $x_0$, segue do item (IV) do **Teorema 7** que:

$$x \mapsto \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$

é contínua em todo seu domínio. $\square$

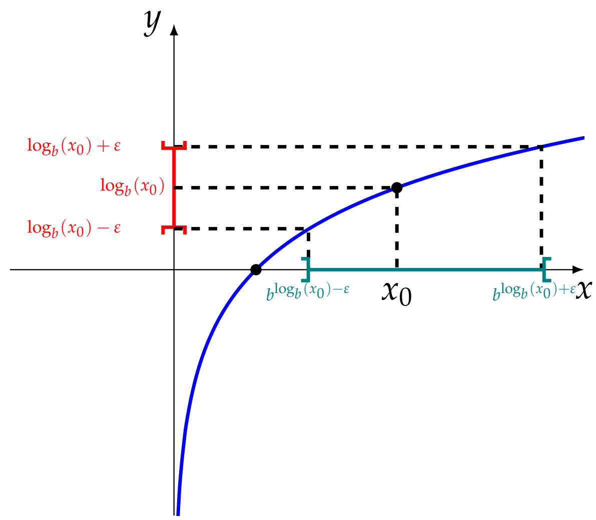
**Proposição 20 (continuidade da função logarítmica).** *Seja $b > 1$ um número real fixado. A função:*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{L}_b : & \mathbb{R}_+^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_b(x) \end{array}$$

*é contínua em qualquer ponto do seu domínio.*

*Demonstração.* Fixemos $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ qualquer. Mostraremos que dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x > 0)\&(0 < |x - x_0| < \delta) \Rightarrow |\log_b(x) - \log_b(x_0)| < \varepsilon$$




Fazendo uma análise do gráfico, encontramos o seguinte palpite ("Ansatz"): devemos tomar $\delta$ como o menor dos números $x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}$ e $b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0$, ou seja:

$$\delta = \min\{x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}, b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0\}$$

Mostremos, portanto, que este $\delta$ nos servirá. Seja $x \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \iff -\delta < x - x_0 < \delta$$

Como $\delta \leq x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}$, tem-se $-(x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}) \leq -\delta$ e, é claro que $\delta \leq b^{\log_b(x_0)+\varepsilon}$. Assim, tem-se:

$$-\delta < x - x_0 < \delta \Rightarrow -(x_0 - b^{\log_b(x_0)-\varepsilon}) < x - x_0 < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0$$

e portanto:

$$x_0 - x_0 + b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} - x_0 + x_0 \iff$$

$$\iff b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon}$$

Finalmente, usamos o fato de que a função logarítmica (para $b > 0$) é estritamente crescente,

$$b^{\log_b(x_0)-\varepsilon} < x < b^{\log_b(x_0)+\varepsilon} \Rightarrow \log_b(x_0) - \varepsilon < \log_b(x) < \log_b(x_0) + \varepsilon \iff$$

$$\iff |\log_b(x) - \log_b(x_0)| < \varepsilon.$$

Portanto,

$$\lim_{x \to x_0} \log_b(x) = \log_b(x_0).$$

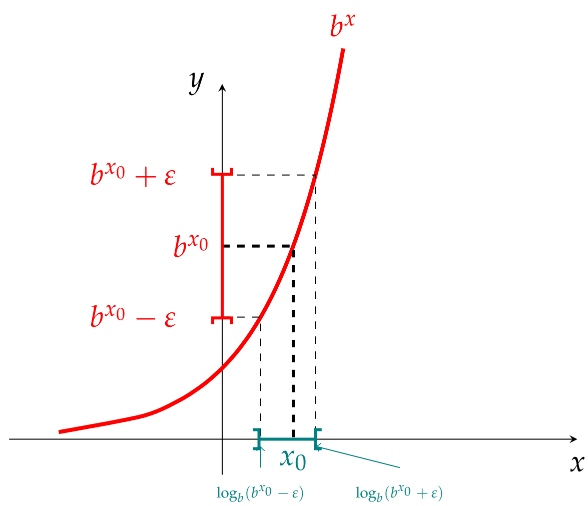
$\square$

**Proposição 21** (continuidade da função exponencial). *Seja $b > 1$ qualquer. A função:*

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{E}_b : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & b^x \end{array}$$

*é contínua em qualquer ponto $x_0 \in \mathbb{R}$.*

*Demonstração.* Dado $\varepsilon > 0$, fazemos a análise do gráfico a seguir:




Observe que, se tivermos $\varepsilon \geq b^{x_0}$, teremos $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$, de modo que jamais existirá $\delta$ tal que $0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |b^x - b^{x_0}| < \varepsilon$, pois $\log_b$ não estará definido em $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$. Para garantir que não estaremos subtraindo nenhum número que torne $b^{x_0} - \varepsilon \leq 0$, vamos considerar, dado o $\varepsilon > 0$, o número

$$\eta = \min\left\{\varepsilon, \frac{b^{x_0}}{2}\right\}$$

Note que, agora sim, tem-se $b^{x_0} - \eta \geq \dfrac{b^{x_0}}{2} > 0$, de modo que não recairemos no problema anteriormente descrito e poderemos extrair o logaritmo tranquilamente.

A análise do gráfico nos sugere que devemos tomar:

$$\delta = \min\{x_0 - \log_b(b^{x_0} - \eta), \log_b(b^{x_0} + \eta) - x_0\}$$

Agora devemos verificar que este $\delta$ é tal que:

$$0 < |x - x_0| < \delta \Rightarrow |b^x - b^{x_0}| < \varepsilon$$

Com efeito,

$$0 < |x - x_0| < \delta \iff$$
$$\iff -\delta < x - x_0 < \delta \iff$$
$$\iff -x_0 + \log_b(b^{x_0} - \eta_1) < x - x_0 < \log_b(b^{x_0} + \eta_1) - x_0 \iff$$

$$\log_b(b^{x_0} - \eta_1) < x < \log_b(b^{x_0} + \eta_1)$$

$$\iff b^{x_0} - \eta_1 < b^x < b^{x_0} + \eta_1 \iff$$

$$\iff -\eta_1 < b^x - b^{x_0} < \eta_1 \iff$$

$$|b^x - b^{x_0}| < \eta_1 \leq \varepsilon$$

Assim,

$$\lim_{x \to x_0} \mathcal{E}_b(x) = \mathcal{E}_b(x_0).$$

□

Você poderá verificar alguns casos concretos de valores de $\varepsilon$ para constatar a continuidade da função $\mathcal{E}_2(x) = 2^x$ em $x_0 = 1$ no applet https://www.geogebra.org/m/vha7pknn.

**Teorema 22** (**continuidade da função composta**). *Sejam $g : A \subseteq \mathbb{R} \to B \subseteq \mathbb{R}$ uma função contínua em $x_0 \in A'$ e $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $g(x_0) \in B$. Então $f \circ g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $x_0$.*

*Demonstração.* Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $f : B \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em $g(x_0) \in B$, existe $\eta > 0$ tal que:

$$(y \in B) \& (|y - g(x_0)| < \eta) \Rightarrow |f(y) - f(g(x_0))| < \varepsilon$$

Também, como $g$ é contínua em $x_0$, dado este $\eta > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(x \in A) \& (|x - x_0| < \delta) \Rightarrow |g(x) - g(x_0)| < \eta$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando o $\delta$ acima tem-se que:

$$(x \in A)\&(|x - x_0| < \delta) \Rightarrow (g(x) \in B)\&(|g(x) - g(x_0)| < \eta)$$
$$\Rightarrow (f(g(x)) \in \mathbb{R})\&(|f(g(x)) - f(g(x_0))| < \varepsilon)$$

ou seja,

$$\lim_{x \to x_0} f(g(x)) = f(g(x_0)).$$

$\square$

# 3 Cálculo de Alguns Limites

Com o que vimos até agora, já somos capazes de calcular diversos limites. Nesta seção daremos diversos exemplos do cálculo de limites.

**Exemplo 23.** *Calcular:*

$$\lim_{x \to 1} x^3 + 4x^2 - 3$$

***Solução:***

*Usamos que a função em apreço é polinomial, e portanto contínua em todo o seu domínio. Desta forma:*

$$\lim_{x \to 1} x^3 + 4x^2 - 3 = 1^3 + 4 \cdot 1^2 - 3 = 1 + 4 - 3 = 2.$$

**Exemplo 24.** *Calcular:*

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5}$$

***Solução:***

*Vemos que a função em apreço é uma função racional, e sabemos que toda função racional é contínua em todos os pontos de seu domínio, que neste caso é* $\{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 5 \neq 0\} = \mathbb{R}$. *Logo,*

$$\lim_{x \to 5} \frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{5^4 + 5^2 - 1}{5^2 + 5} = \frac{625 + 25 - 1}{25 + 5} = \frac{629}{30}$$

**Exemplo 25.** *Calcular:*

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2 - 3}$$

*Solução:* *A função:*

$$h: \begin{array}{ccc} ]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty[ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{4x^2-3} \end{array}$$

*pode ser vista como a composição:*

$$\begin{array}{ccccc} ]-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{2}[\cup]\frac{\sqrt{3}}{2}, \infty[ & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x^2-3 & \mapsto & \sqrt{4x^2-3} \end{array}$$

*Como $g(x) = 4x^2 - 3$ é polinomial, segue que $g$ é contínua em $-2$. Também, pelo **Exemplo 27** das notas de aula precedentes, $f(y) = \sqrt{y}$ é contínua em $y = g(-2) = 13 \in \mathbb{R}_+$. Pelo **Teorema 33** das notas da aula anterior, segue que:*

$$\lim_{x \to -2} \sqrt{4x^2-3} = \sqrt{4 \cdot (-2)^2 - 3} = \sqrt{13}.$$

**Exemplo 26.** *Calcular:*

$$\lim_{x \to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$$

*Solução:* *A função $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ pode ser vista como a composta:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+ & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} & \mapsto & \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x} \end{array}$$

*isto é, como a composta de $f(y) = \sqrt{y}$ com $g(x) = \sqrt{x}$. Pelo **Exemplo 27** da aula anterior, tem-se que $f$ e $g$ são ambas contínuas. Decorre do **Teorema 33** das notas da aula anterior, que $x \mapsto \sqrt[4]{x}$ é contínua, de modo que como $64 \in \mathbb{R}_+$, tem-se:*

$$\lim_{x \to 16} \sqrt[4]{x} = \sqrt[4]{16} = 2.$$

*Pelo **Lema 12** das notas da aula 07, segue que:*

$$\lim_{x \to 16} \frac{1}{\sqrt[4]{x}} = \frac{1}{\sqrt[4]{16}} = \frac{1}{2}$$

**Exemplo 27.** *Calcular:*

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$$

*Solução:* *Note que aqui temos a função racional:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{2\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x^2-4}{x-2} \end{array}$$

*que é contínua em todos os pontos de seu domínio. No entanto,* $2 \notin \operatorname{dom}(f)$*, de modo que não podemos substituir* $x$ *por* $2$ *na expressão algébrica dada. Usamos, aqui,* ***"O" Teorema****, como segue:*

*Tem-se, para qualquer* $x \neq 2$*:*

$$\frac{x^2-4}{x-2} = \frac{(x+2)\cdot\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} = x+2$$

*Assim, a função* $f$ *dada acima coincide com:*

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x+2 \end{array}$$

*em* <u>*todo*</u> *ponto* $x \neq 2$*. A função* $g$ *é contínua. Assim, pel****"O" Teorema****:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = \lim_{x\to 2} x+2 = 2+2 = 4.$$

**Exemplo 28.** *Calcular:*

$$\lim_{x\to\pi}\sin(2x)$$

***Solução:*** *A função dada por* $x \mapsto \sin(2x)$ *é a composta:*

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x & \mapsto & \sin(2x) \end{array}$$

*Mas* $g(x) = 2x$ *é contínua em* $\pi$*, e* $g(\pi) = 2\pi$*, e* $f(y) = \sin(y)$ *é contínua em* $y = g(\pi) = 2\pi$*. Desta forma, tem-se:*

$$\lim_{x\to\pi}\sin(2x) = \sin(2\pi) = 0.$$

**Exemplo 29.** *Calcular:*

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3}$$

***Solução:*** *Fatoramos:*

$$x-3 = (\sqrt{x}-\sqrt{3})\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})$$

*de modo que para qualquer* $x \neq 3$ *tem-se:*

$$\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \frac{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}}{\cancel{(\sqrt{x}-\sqrt{3})}\cdot(\sqrt{x}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}}$$

*Como a função $x \mapsto \sqrt{x}$ é contínua (**Exemplo 27** das notas da aula anterior), tem-se* $\lim_{x\to 3}\sqrt{x} = \sqrt{3}$. *Assim,*

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{3}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

**Exemplo 30.** *Calcular:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2}$$

***Solução:*** *fatoramos:*

$$x-2 = (\sqrt[3]{x})^3 - (\sqrt[3]{2})^3 = (\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})$$

*de modo que, para qualquer $x \neq 2$, tem-se:*

$$\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} = \frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2})\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4})} = \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}}$$

*Pel**"O" Teorema**, segue que:*

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{2}}{x-2} = \lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{2x}+\sqrt[3]{4}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{4}}$$

**Exemplo 31.** *Calcular:*

$$\lim_{x\to 1}\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}}$$

***Solução:*** *Façamos:*

$$\begin{aligned} u : ]-1,\infty[\setminus\{1\} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{x^2-1}{x-1} \end{aligned}$$

*e:*

$$\begin{aligned} g : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ u &\mapsto \sqrt{u} \end{aligned}$$

*de modo que:*

$$\sqrt{\frac{x^2-1}{x-1}} = g(u) = \sqrt{u}$$

*Já sabemos calcular:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{(x+1)\cdot(x-1)}{(x-1)} = \lim_{x\to 1} x+1 = 2,$$

*e como $g$ é contínua em $u_0 = 2$, segue do* ***Teorema 22*** *que:*

$$\lim_{u\to 2} \sqrt{u} = \sqrt{2}.$$

**Exemplo 32.** *Calcular:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1}$$

***Solução:*** *Fazemos $u(x) = 3 - x^3$ e notamos, primeiramente, que*

$$\lim_{x\to 1} u(x) = \lim_{x\to 1} 3 - x^3 = 3 - 1 = 2.$$

*Como $x^3 - 1 = -u + 2$, segue que:*

$$\frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1} = \frac{u^4-16}{2-u} = \frac{(u-2)\cdot(u+2)\cdot(u^2+4)}{2-u}$$

*Pelo* ***Teorema 22****, segue que:*

$$\lim_{x\to 1} \frac{(3-x^3)^4-16}{x^3-1} = \lim_{u\to 2} \frac{(u-2)\cdot(u+2)\cdot(u^2+4)}{2-u} = \lim_{u\to 2} -(u+2)\cdot(u^2+4) =$$

$$= -(2+2)\cdot(2^2+4) = -4\cdot 8 = -32.$$

# Referências


[1] Almay, P., **Elementos de Cálculo Diferencial e Integral**, Volume I, $1^a$ edição. Kronos Gráfica e Editora Ltda. São Paulo, 1975.

[2] Guidorizzi, H. L., **Um Curso de Cálculo**, Volume I, $5^a$ edição. Editora LTC. Rio de Janeiro, 2015.

[3] Maurer, W. A., **Fundamentos Aritméticos e Topológicos**, Edgard Blücher LTDA, São Paulo, 1977.

[4] Mello, A. A. H., **Por que temer os épsilons e deltas?**, Revista Matemática Universitária, Número 4, 1986.