MAT2455 - Cálculo Diferencial e Integral III
Material de Apoio: Coordenadas Polares

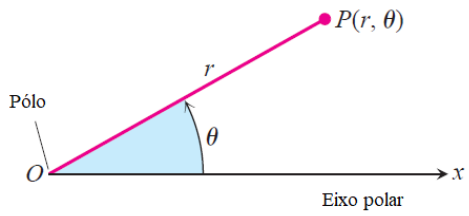
Prof. Jean Cerqueira Berni*

1 Esboço de Curvas em Coordenadas Polares

No monitoramento por radar, um operador está interessado na posição ou no ângulo que o objeto rastreado forma com algum raio fixo (por exemplo, uma semirreta direcionada para leste) e a que distância o objeto está localizado no momento. Neste texto, estudaremos um sistema de coordenadas inventado por Isaac Newton chamado de **sistema de coordenadas polares**, o qual é prático de usar nestas e noutras situações.

Frequentemente o problema que vamos estudar envolve simetrias em torno de um certo ponto. Este é o caso, por exemplo, quando estudamos forças centrais (ou seja, forças que dependem unicamente do inverso do quadrado da distância), como é o caso da força gravitacional e da força eletrostática.

Para definirmos as coordenadas polares, primeiro escolhemos um ponto no plano, que chamaremos de **pólo** (ou origem) e o chamaremos de O. Então desenhamos um **raio inicial** (ou eixo polar) começando em O. Esse raio é normalmente desenhado horizontalmente e apontando para a direita, correspondendo à parte positiva do eixo Ox em coordenadas cartesianas. Desta forma, cada ponto P pode ser localizado por meio de sua associação a um **par de coordenadas polares**, (r, θ), no qual r dá a distância orientada de O a P e θ dá o ângulo orientado do eixo polar ao eixo OP.



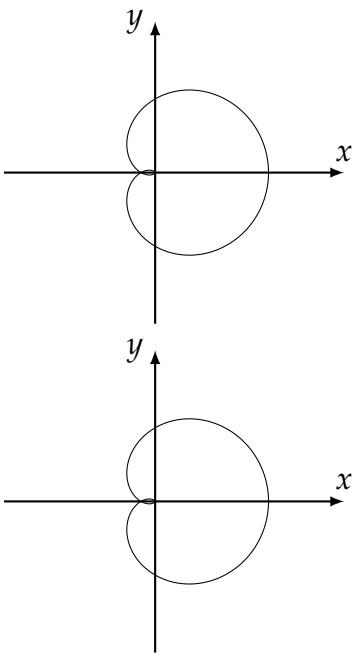
*jeancb@ime.usp.br

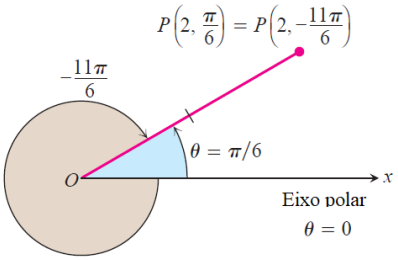
Coordenadas Polares

$P(r, \theta)$

- r: Distância orientada de O a P
- θ: Ângulo orientado do raio inicial ao eixo polar

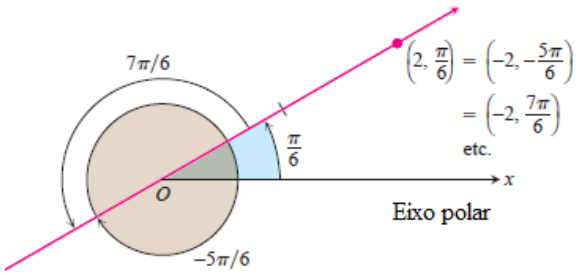
Como em Trigonometria, θ é positivo quando medido no sentido anti-horário e negativo quando medido no sentido horário. O ângulo associao a um ponto dado não é único. Por exemplo, o ponto 2 unidades a partir da origem ao longo do raio $\theta = \pi/6$ tem coordenadas polares $r = 2, \theta = \pi/6$. Tem, também, coordenadas $r = 2, \theta = -11\pi/6$





Existem também ocasiões em que desejamos que r seja negativo. Essa é a razão pela qual usamos a distância orientada ao definir $P(r, \theta)$. O ponto $P(2, 7\pi/6)$ pode ser alcançado girando-se $7\pi/6$ radianos no sentido anti-horário a partir do eixo polar e indo 2 unidades para frente. Também pode ser alcançado girando-se $\pi/6$ radianos no sentido anti-horário a

partir do eixo polar e indo *para trás* 2 unidades. Assim, o ponto também tem coordenadas polares $r = -2, \theta = \pi/6$.



Na verdade, um único ponto tem infinitas coordenadas polares. No exemplo em apreço:

$$(2, \pi/6 \pm 2\pi), (2, \pi/6 \pm 4\pi), (2, \pi/6 \pm 6\pi), \cdots$$
$$(-2, -5\pi/6 \pm 2\pi), (-2, -5\pi/6 \pm 4\pi), (-2, -5\pi/6 \pm 6\pi), \cdots$$

A fim de obtermos uma bijeção entre o plano munido de coordenadas cartesianas sem a origem e o plano munido de coordenadas polares sem a origem, devemos fixar um ângulo θ_0 e considerar a região:

$$]0, \infty[\times [\theta_0, \theta_0 + 2\pi[$$

Por conveniência, escolheremos sempre $\theta_0 = 0$. Desta forma, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} g: &]0, \infty[\times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \\ & (r, \theta) & \mapsto & (r\cos(\theta), r\sin(\theta)) \end{array}$$

é sempre uma bijeção. Se convencionarmos que $(0,0)$ em coordenadas polares representa $(0,0)$ em coordenadas cartesianas, definimos um mapa $\widetilde{g}$ que faz corresponder qualquer ponto em coordenadas polares um, e somente um, par de coordenadas cartesianas e vice-versa:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{g}: & \{(0,0)\} \cup]0, \infty[\times [0, 2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & (r, \theta) & \mapsto & \begin{cases} (r\cos(\theta), r\sin(\theta)), \text{se } r \neq 0, \\ (0,0), \text{se } r = 0 \end{cases} \end{array}$$

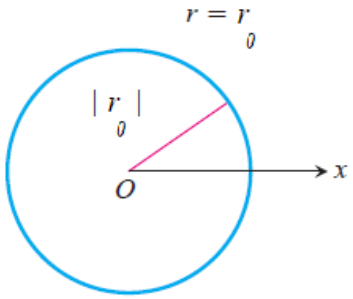
1.1 Gráficos Polares

Seja $r = f(\theta)$ uma função. Por definição, o gráfico deesta função é o subconjunto **do plano, munido de coordenadas cartesianas** dado por:

$$\Gamma_{r=f(\theta)} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x = f(\theta) \cdot \cos\theta) \& (f(\theta) \cdot \sin\theta) \& ((r, \theta) \in \text{dom}\,(f))\}$$

Vejamos, agora, os gráficos mais simples que se pode expressar em coordenadas polares.

Se mantivermos fixo r em certo valor constante $r_0 > 0$, o ponto $P(r, \theta)$ estará a r_0 unidades de comprimento do pólo, O. À medida que θ varia em qualquer intervalo de comprimento 2π, P traça um círculo de raio r_0 centrado em O.



Se mantivermos $\theta = \theta_0$ fixado, por sua vez, e fizermos $r \in \mathbb{R}$, o ponto $P(r, \theta_0)$ traçará uma reta passando pelo pólo que forma um ângulo θ_0 com ele.

Equação	Gráfico Polar
$r = r_0$	Círculo de raio $\|r_0\|$ centrado em O
$\theta = \theta_0$	Reta passando por O formando um ângulo θ_0 com o eixo polar

Exemplo 1. *(a) $r = 1$ é a equação que descreve o círculo de raio 1 centrado em O;*

(b) $\theta = \pi/6$, é a equação que representa a reta passando pelo pólo e que faz um ângulo de $\pi/6$, no sentido anti-horário, com o eixo polar.

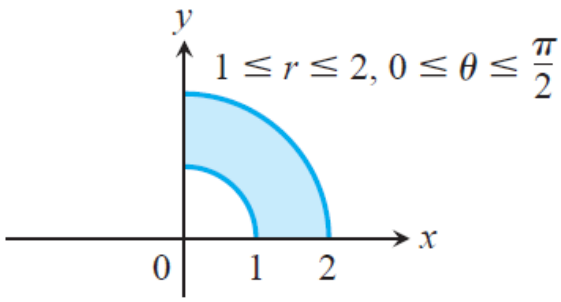
Equações da forma $r = r_0$ e $\theta = \theta_0$ podem ser combinadas para definir regiões, segmentos e raios.

1.2 Representando graficamente desigualdades

Representemos, graficamente, o conjunto de pontos cujas coordenadas polares satisfazem as condições dadas:

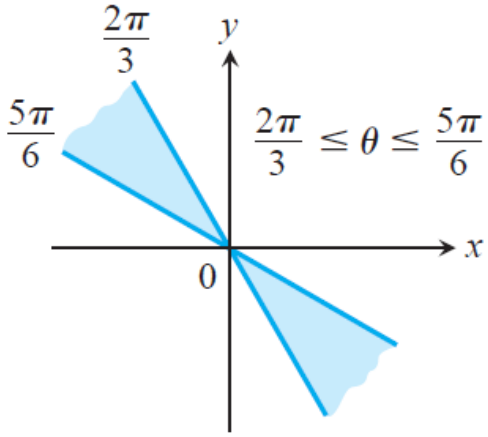
(a) $\{(r, \theta) \in \{(0,0)\} \cup]0, \infty[\times [0, 2\pi[\mid\mid (1 \leq r \leq 2) \& (0 \leq \theta \leq \pi/2)\}$.

Os pontos (r, θ) com $1 \leq r \leq 2$ são os pontos do plano que distam r, $1 \leq r \leq 2$ da origem, compreendendo a coroa circular que consiste dos pontos fora da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 1$ e dentro da circunferência de equação $x^2 + y^2 = 4$. Dentre estes pontos, a região só admite aqueles com $0 \leq \theta \leq \pi/2$, ou seja, os do primeiro quadrante.



(b) $\{(r,\theta) \in \{(0,0)\} \cup]0,\infty[\times [0,2\pi[\mid 2\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/6\}$.

Os pontos (r,θ) com $2\pi/3 \leq \theta \leq 5\pi/6$ são os pontos localizados sobre retas que fazem ângulos entre $2\pi/3$ e $5\pi/6$ com o eixo polar.



Antes de esboçar o gráfico de alguma curva dada em coordenadas polares, convém verificarmos certos tipos de simetria.

Diremos que o gráfico de uma função:

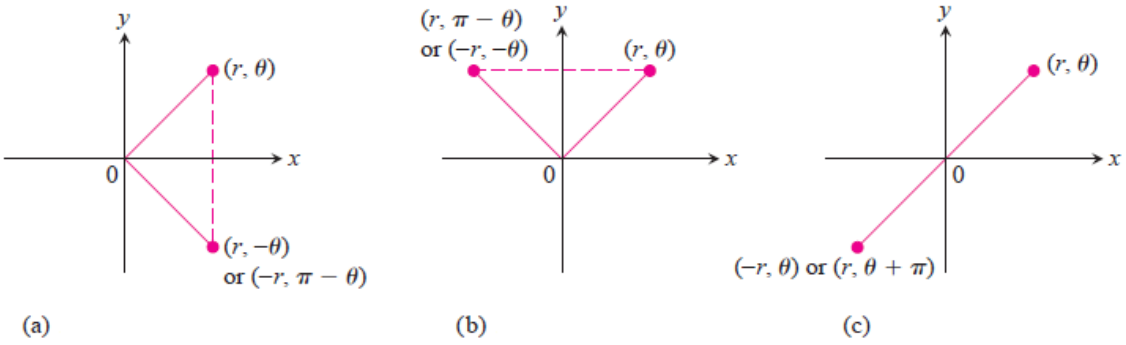
$$r = r(\theta)$$

tem:

(a) **Simetria em relação ao eixo** Ox: sempre que se o ponto (r,θ) estiver no gráfico, o ponto $(r,-\theta)$ ou $(-r,\pi-\theta)$ também estiver;

(b) **Simetria em relação ao eixo** Oy: se sempre que o ponto (r,θ) estiver no gráfico, o ponto $(r,\pi-\theta)$ ou $(-r,-\theta)$ também estiver no gráfico;

(c) **Simetria em relação à origem:** se sempre que o ponto (r, θ) estiver no gráfico, o ponto $(-r, \theta)$ ou $(r, \theta + \pi)$ estiver no gráfico.



1.3 Coeficiente Angular

Nesta subseção veremos como encontrar coeficientes angulares, áreas e comprimentos de curvas polares $r = f(\theta)$.

O coeficiente angular de uma curva polar $r = f(\theta)$ é dado por dy/dx, e não por $r' = df/d\theta$. Para ver isto, devemos pensar no gráfico de $r = f(\theta)$ como gráfico das equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(\theta) = r\cos(\theta) = f(\theta) \cdot \cos(\theta) \\ y(\theta) = r\sin(\theta) = f(\theta) \cdot \sin(\theta) \end{cases}$$

Se $f : [0, 2\pi[\to \mathbb{R}, \theta \mapsto f(\theta)$ é uma função diferenciável de θ, x e y, por serem produtos de funções diferenciáveis de θ, também o serão, e quando $dx/d\theta \neq 0$ (pois se $dx/d\theta = 0$ a reta tangente será vertical), podemos calcular dy/dx a partir da fórmula paramétrica:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} = \frac{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\sin(\theta))}{\frac{d}{d\theta}(f(\theta)\cos(\theta))} = \frac{f'(\theta)\sin(\theta) + f(\theta)\cos(\theta)}{f'(\theta)\cos(\theta) - f(\theta)\sin(\theta)}$$

Assim, no ponto θ_0, o coeficiente angular da curva dada por $r = f(\theta)$ é:

$$\frac{f'(\theta_0)\sin(\theta_0) + f(\theta_0)\cos(\theta_0)}{f'(\theta_0)\cos(\theta_0) - f(\theta_0)\sin(\theta_0)}$$

desde que $dx/d\theta \neq 0$ em (r_0, θ_0).

1.4 Esboço

Exemplo 2 (Cardióide). *Representemos, graficamente, a curva dada em coordenadas polares pela equação:*

$$r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$$

Solução: Primeiramente procuramos verificar se a curva possui algum tipo de simetria. Como a função cosseno é par, temos que se (r, θ) está no gráfico, então $r = 1 - \cos(\theta)$, e como $\cos(-\theta) = \cos(\theta)$, segue que $(r, -\theta)$ é tal que $r = 1 - \cos(-\theta) = 1 - \cos(\theta)$, ou seja, $(r, -\theta)$ também pertence ao gráfico. Desta forma, temos uma simetria em relação ao eixo Ox.

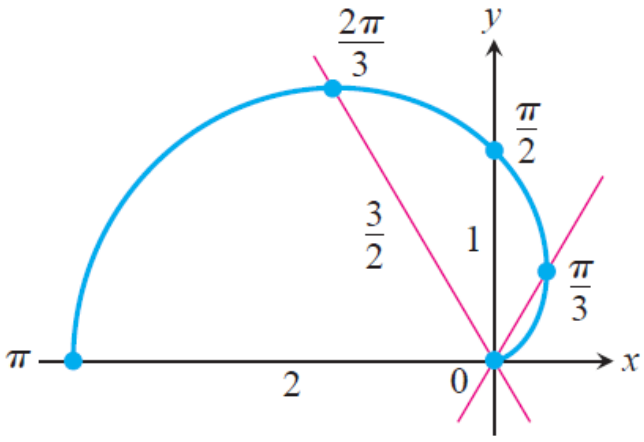
Na prática, isto significa que basta desenharmos o gráfico para $0 \leq \theta \leq \pi$ e, em seguida, tomar seu reflexo com respeito ao eixo Ox como o "resto" do gráfico.

Para $\theta = 0$ teremos $r(0) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0$. Conforme θ aumenta de 0 para π, $\cos(\theta)$ diminui de 1 para -1, e $r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$ aumenta do valor mínimo de 0 para um valor máximo de $r(\pi) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$.

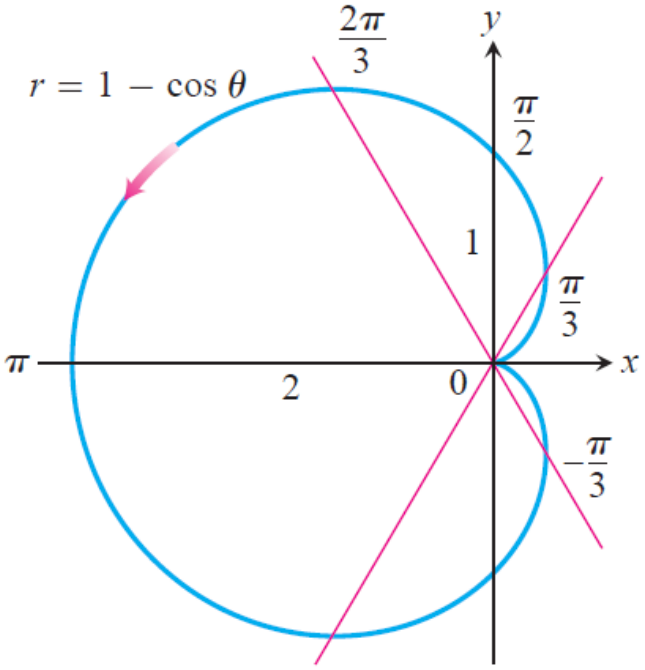
Fazemos a tabela com alguns ângulos notáveis entre 0 e π:

θ	$r(\theta) = 1 - \cos(\theta)$
0	0
$\frac{\pi}{6}$	$r(\pi/6) = 1 - \cos(\pi/6) = 1 - \sqrt{3}/2 = \frac{2-\sqrt{3}}{2} \approx 0.1339$
$\frac{\pi}{4}$	$r(\pi/4) = 1 - \cos(\pi/4) = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \approx 02929$
$\frac{\pi}{3}$	$r(\pi/3) = 1 - \cos(\pi/3) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5000$
$\frac{\pi}{2}$	$r(\pi/2) = 1 - \cos(\pi/2) = 1 - 0 = 1$
$\frac{2\pi}{3}$	$r(\pi/3) = 1 - \cos(2\pi/3) = 1 - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1+\sqrt{3}}{2} \approx 1.8660$
π	$r(\pi/3) = 1 - \cos(\pi) = 1 - (-1) = 2$

Esboçamos uma curva lisa passando pelos pontos da tabela:

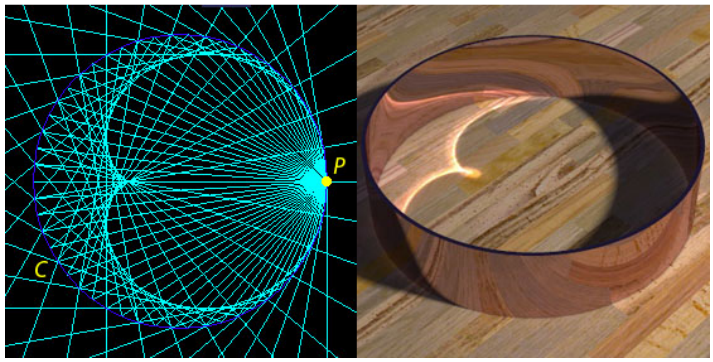


e finalmente refletimos a figura obtida pelo eixo Ox, obtendo:



Na figura acima, a seta indica a direção do aumento de θ.

A cardióide aparece como cáustica do círculo, quando posicionamos a fonte de luz em um ponto P de seu perímetro



A cardióide aparece em peças que direcionam camadas uniformes de fio em bobinas e carretéis e em padrões de intensidade de sinal de certas antenas de rádio e microfones (ver https://www.intmath.com/blog/mathematics/polar-coordinates-and-cardioid-microphones-2496).

1.5 Gráficos Polares

Representemos graficamente a curva dada pela equação:

$$r^2 = 4\cos(\theta)$$

A equação acima requer $\cos(\theta) \geq 0$, assim obtemos o gráfico inteiro fazendo θ percorrer de $-\pi/2$ a $\pi/2$. A curva é simétrica em relação ao eixo Ox porque:

$$(r,\theta) \in \Gamma_{r^2=4\cos(\theta)} \Rightarrow r^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow r^2 = 4\cos(-\theta) \Rightarrow (r,-\theta) \in \Gamma_{r^2=4\cos(\theta)}$$

A curva também é simétrica com relação à origem porque:

$$(r,\theta) \in \Gamma_{r^2=4\cos(\theta)} \Rightarrow r^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow (-r)^2 = 4\cos(\theta) \Rightarrow (-r,\theta) \in \Gamma_{r^2=4\cos(\theta)}$$

Juntas, estas duas simetrias implicam simetria com relação ao eixo Oy.

A curva passa pela origem quando $\theta = \pm\pi/2$, e tem uma tangente vertical ambas as vezes porque $\tan(\theta)$ neste caso é infinito.

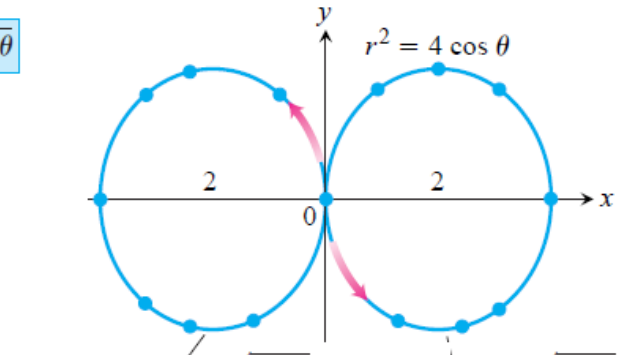
Para cada valor de $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$, a fórmula $r^2 = 4\cos(\theta)$ dá dois valores de r, a saber:

$$r = \pm 2\sqrt{\cos(\theta)}$$

Fazemos uma pequena tabela de valores, marcamos os pontos correspondentes e usamos as informações sobre simetria e tangentes para nos guiar ao conectarmos os pontos por uma curva lisa.

θ	$\cos\theta$	$r = \pm 2\sqrt{\cos\theta}$
0	1	± 2
$\pm\frac{\pi}{6}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\approx \pm 1.9$
$\pm\frac{\pi}{4}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\approx \pm 1.7$
$\pm\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\approx \pm 1.4$
$\pm\frac{\pi}{2}$	0	0

(a)



(b)

Aproveite esta construção para resolver o exercício 10, item (b) da lista.

Exemplo 3. *Esboçar a curva de equação polar* $r = \cos(3\theta)$.

Solução: Primeiramente procuramos alguma simetria para a curva. Como:

$$(r,\theta) \in \Gamma_{r=\cos(3\theta)} \Rightarrow r = \cos(3\theta) = \cos(-3\theta) \Rightarrow (r,-\theta) \in \Gamma_{r=\cos(3\theta)}$$

a curva apresenta simetria em torno do eixo Ox. Isto simplifica nosso trabalho, pois bastará esboçarmos o ramo da curva que se encontra no semiplano superior (em coordenadas cartesianas, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $y \geq 0$), ou seja, bastará estudarmos o comportamento da curva para $\theta \in [0,\pi]$. Vamos dividir este intervalo em alguns subintervalos menores, e nestes subintervalos vamos escolher ângulos θ convenientes tais que 3θ sejam ângulos"notáveis". Fazemos $[0,\pi] = [0,\pi/6] \cup [\pi/6,\pi/2] \cup [\pi/2,5\pi/6] \cup [5\pi/6,\pi]$.

No subintervalo $[0,\pi/6]$ temos:

θ	3θ	$r(\theta) = \cos(3\theta)$
0	0	$\cos(3\cdot 0) = 1$
$\pi/18$	$\pi/6$	$\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$
$\pi/12$	$\pi/4$	$\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$\pi/9$	$\pi/3$	$\cos(\pi/3) = 1/2$
$\pi/6$	$\pi/2$	$\cos(\pi/2) = 0$

Conforme θ varia de 0 a $\pi/6$, vemos que r sai do valor máximo $r = 1$ e diminui até alcançar $r = 0$.

Para $\theta \in [\pi/6,\pi/2]$ temos $3\theta \in [\pi/2,3\pi/2]$, de modo que $\cos(3\theta) \in [-1,0]$ - de modo que os pontos $(\cos 3\theta,\theta)$ estarão no terceiro quadrante. Não precisamos esboçar esta parte por enquanto, uma vez que ela será obtida por reflexão da parte da figura acima do eixo Ox.

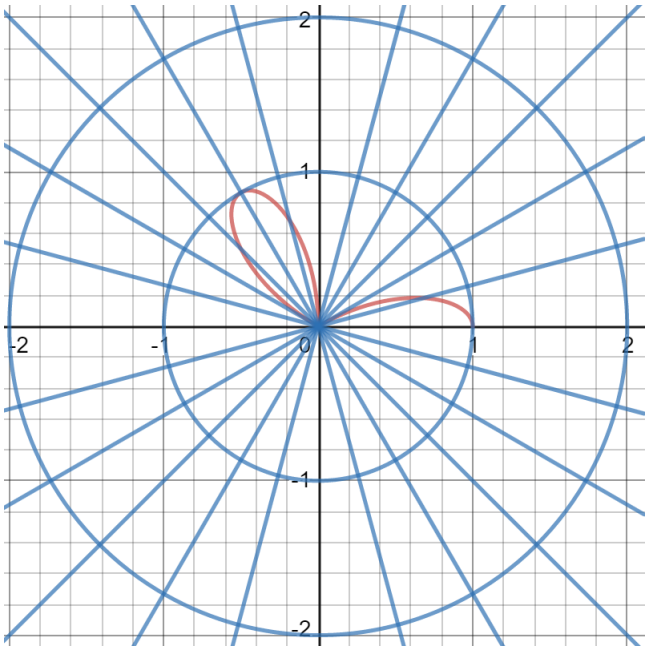
Este também é o caso para $\theta \in [5\pi/6,\pi]$, pois aí $3\theta \in [5\pi/2,\pi]$, donde $\cos(3\theta) \in [-1,0]$.

Basta, assim, analisarmos o que ocorre conforme θ varia em $[\pi/2,5\pi/6]$.

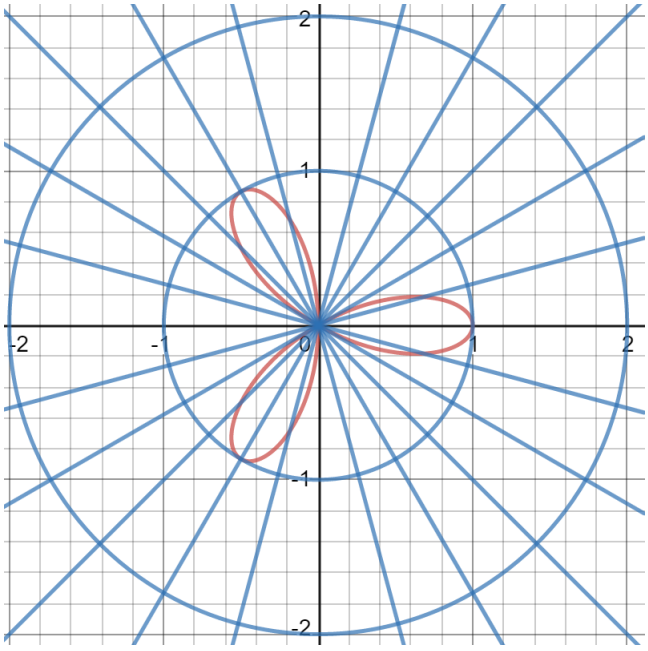
θ	3θ	$r(\theta) = \cos(3\theta)$
$\pi/2$	$3\pi/2$	$\cos(3\pi/2) = 0$
$7\pi/12$	$7\pi/4$	$\cos(7\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$2\pi/3$	2π	$\cos(2\pi) = 1$
$3\pi/4$	$9\pi/4$	$\cos(9\pi/4) = \sqrt{2}/2$
$5\pi/6$	$5\pi/2$	$\cos(5\pi/2) = 0$

Assim, conforme θ varia de $\pi/2$ a $2\pi/3$, r aumenta de 0 a 1, e conforme θ varia de $2\pi/3$ a $5\pi/6$, r diminui de 1 a 0.

Obtemos, assim, um desenho como segue:



Ao refleti-lo com respeito ao eixo Ox, obtemos o desenho completo.



As figuras acima foram esboçadas por meio do seguinte sítio: https://www.desmos.com/calculator. Use-o para conferir se seus esboços estão corretos e para interagir mais com este novo sistema de coordenadas.

1.6 Relacionando Coordenadas Polares e Cartesianas

Quando usamos tanto as coordenadas polares quanto as cartesianas em um plano, colocamos as duas origens juntas e tomamos o raio polar como sendo o eixo Ox positivo. O raio $\theta = \pi/2, r > 0$ torna-se, então, o eixo Oy positivo. Os dois sistemas de coordenadas estão relacionados pelas equações:

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$
$$y = r \cdot \sin(\theta)$$
$$x^2 + y^2 = r^2$$
$$\frac{y}{x} = \tan(\theta)$$

Usamos essas equações e álgebra para reescrever as equações polares na forma cartesiana e vice-versa.

Desta forma, são equações que definem a mesma curva:

- $r\cos\theta = 2$ e $x = 2$;
- $r^2\cos\theta\sin\theta = 4$ e $xy = 4$;
- $r^2\cos^2\theta - r^2\sin^2\theta = 1$ e $x^2 - y^2 = 1$;
- $r = 1 + 2r\cos\theta$ e $y^2 - 3x^2 - 4x - 1 = 0$;
- $r = 1 - \cos\theta$ e $x^4 + y^4 + 2x^2y^2 + 2x^3 + 2xy^2 - y^2 = 0$.

Exemplo 4. *Encontrar uma equação polar $x^2 + (y-3)^2 = 9$.*

Solução: Expandimos $(y-3)^2$ no primeiro membro da expressão para obter:

$$x^2 + (y-3)^2 = x^2 + y^2 - 6y + 9 = 9$$

$$x^2 + y^2 - 6y = 0$$

$$r^2 - 6r\sin\theta = 0$$

donde $r = 0$ ou $r = 6\sin\theta$.

Exemplo 5. *Encontrar uma equação cartesiana equivalente para a equação polar dada em cada caso:*

(a) $r^2 = 4r\cos\theta$.

(b) $r = \dfrac{4}{2\cos\theta - \sin\theta}$

Solução:

Ad (a): Fazendo a substituição $r^2 = x^2 + y^2$ e a substituição $x = r\cos\theta$, obtemos:

$$x^2 + y^2 = 4x,$$

que completando quadrados pode ser escrita como:

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

que corresponde a uma circunferência de raio 2 centrada no ponto $(2, 0)$.

Ad (b): Temos $r(2\cos\theta - \sin\theta) = 4$, ou seja:

$$2r\cos\theta - r\sin\theta = 4$$

Efetuando as substituições $r\cos\theta = x$ e $r\sin\theta = y$, obtemos:

$$2x - y = 4$$

ou:

$$y = 2x - 4$$

uma reta passando por $(0, -4)$ com coeficiente angular igual a 2.

Referências

[1] Finney, Ross L. *Cálculo de George B. Thomas Jr.*, volume 2/ Ross L. Finney, Maurice D. Weir, Frank R. Giordano; tradução: Claudio Hirofume Asano; revisão técnica Leila Maria Vasconcellos Figueiredo. - São Paulo:
Addison Wesley, 2003.

[2] https://math.stackexchange.com/questions/1550259/cardioid-in-coffee-mug, acessado em 17 de março de 2020.