MAT 0121 - Cálculo Diferencial e Integral II

Prof. Jean Cerqueira Berni

jeancb@ime.usp.br

Gabriel Cramer

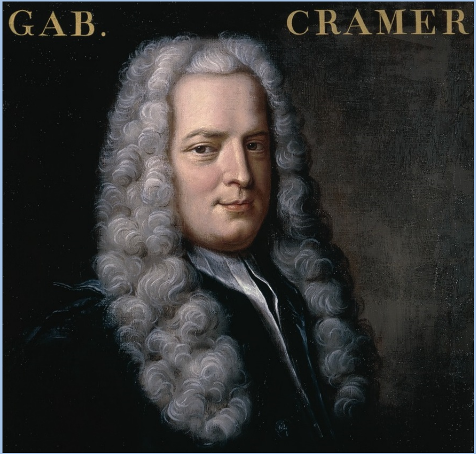
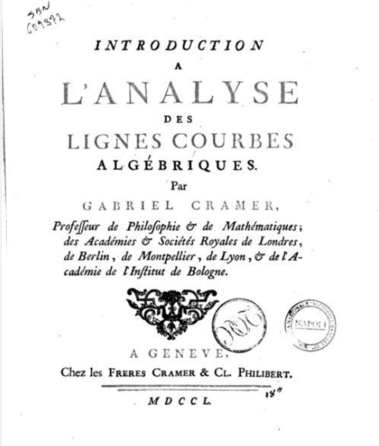


Figura 1: Gabriel Cramer (1704-1752)



INTRODUCTION

A

L'ANALYSE

DES

LIGNES COURBES

ALGÉBRIQUES.

Par

GABRIEL CRAMER,

Professeur de Philosophie & de Mathématiques; des Académies & Sociétés Royales de Londres, de Berlin, de Montpellier, de Lyon, & de l'Académie de l'Institut de Bologne.

A GENEVE,

Chez les FRERES CRAMER & CL. PHILIBERT.

MDCCL.

Figura 2: Introdução à Análise das Linhas Curvas Algébricas, 1750

Com quantos pontos se determina uma cônica?

- Terceiro capítulo: diferentes ordens (graus) de curvas algébricas;

Com quantos pontos se determina uma cônica?

- Terceiro capítulo: diferentes ordens (graus) de curvas algébricas;
- Uma curva algébrica de grau n fica completamente determinada por $\frac{n \cdot (n+3)}{2}$ pontos;

Com quantos pontos se determina uma cônica?

- Terceiro capítulo: diferentes ordens (graus) de curvas algébricas;
- Uma curva algébrica de grau n fica completamente determinada por $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$ pontos;
- Uma reta ($y = ax + b$) é determinada completamente por $\frac{1\cdot(1+3)}{2} = 2$ pontos;

Com quantos pontos se determina uma cônica?

- Terceiro capítulo: diferentes ordens (graus) de curvas algébricas;
- Uma curva algébrica de grau n fica completamente determinada por $\frac{n\cdot(n+3)}{2}$ pontos;
- Uma reta ($y = ax + b$) é determinada completamente por $\frac{1\cdot(1+3)}{2} = 2$ pontos;
- Uma cônica ($ax^2 + by^2 + cxy + d = 0$) fica completamente determinada por $\frac{2\cdot(2+3)}{2} = 5$ pontos;

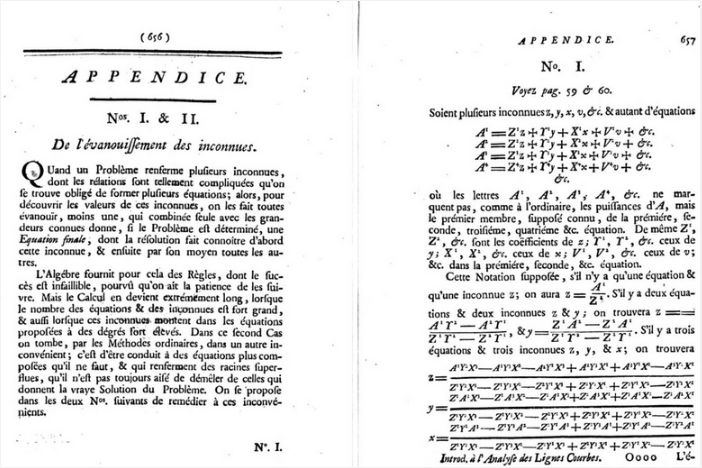
. . . . $A+Ba+C\alpha+Daa+Ea\alpha+\alpha\alpha=0$
La condition de paſſer par B, donne de même $A+Bb+C\beta+Dbb+Eb\beta+\beta\beta=0$
Celle de paſſer par C, donne . . . . $A+Bc+C\gamma+Dcc+Ec\gamma+\gamma\gamma=0$
Celle de paſſer par D, donne . . . $A+Bd+C\delta+Ddd+Ed\delta+\delta\delta=0$
Et celle de paſſer par E, donne enfin . . $A+Be+C\varepsilon+Dee+Ee\varepsilon+\varepsilon\varepsilon=0$

On peut par le moyen de ces cinq équations trouver les valeurs des cinq coëfficients A, B, C, D, E, ce qui détermine l'éq : $A+By+Cx+Dyy+Exy+xx=0$ de la Courbe cherchée.

Figura 3: Excerto da p. 59 de **"Introduction à L'Analyse des Lignes Courbes Algébriques"**

Je crois avoir trouvé pour cela une Régle assez commode & générale, lorsqu'on a un nombre quelconque d'équations & d'inconnuës dont aucune ne passe le prémier degré. On la trouvera dans l'*Appendice*, N°. 1.

Figura 4: "Creio ter encontrado para isto uma regra muito cômoda e geral, quando se tem um número qualquer de equações e incónitas que não passam do primeiro grau."



APPENDICE.

Nos. I. & II.

De l'évanouiſſement des inconnues.

QUand un Problème renferme pluſieurs inconnues, dont les rélations ſont tellement compliquées qu'on ſe trouve obligé de former pluſieurs équations; alors, pour découvrir les valeurs de ces inconnues, on les fait toutes évanouïr, moins une, qui combinée ſeule avec les grandeurs connues donne, ſi le Problème eſt déterminé, une *Equation finale*, dont la réſolution fait connoître d'abord cette inconnue, & enſuite par ſon moyen toutes les autres.

L'Algébre fournit pour cela des Règles, dont le ſuccès eſt infaillible, pourvû qu'on ait la patience de les ſuivre. Mais le Calcul en devient extrémement long, lorſque le nombre des équations & des inconnues eſt fort grand, & auſſi lorſque ces inconnues montent dans les équations propoſées à des dégrés fort élevés. Dans ce ſecond Cas on tombe, par les Méthodes ordinaires, dans un autre inconvénient; c'eſt d'être conduit à des équations plus compoſées qu'il ne faut, & qui renferment des racines ſuperflues, qu'il n'eſt pas toujours aiſé de démêler de celles qui donnent la vraye Solution du Problème. On ſe propoſe dans les deux Nos. ſuivants de remédier à ces inconvénients.

N°. I.

No. I.

Voyez pag. 59 & 60.

Soient pluſieurs inconnues z, y, x, v, &c. & autant d'équations

$$
\begin{aligned}
A^1 &= Z^1z + Y^1y + X^1x + V^1v + \text{\&c.}\\
A^2 &= Z^2z + Y^2y + X^2x + V^2v + \text{\&c.}\\
A^3 &= Z^3z + Y^3y + X^3x + V^3v + \text{\&c.}\\
A^4 &= Z^4z + Y^4y + X^4x + V^4v + \text{\&c.}\\
&\text{\&c.}
\end{aligned}
$$

où les lettres A^1, A^2, A^3, A^4, &c. ne marquent pas, comme à l'ordinaire, les puiſſances d'A, mais le prémier membre, ſuppoſé connu, de la prémiére, ſeconde, troiſiéme, quatriéme &c. équation. De même Z^1, Z^2, &c. ſont les coëfficients de z; Y^1, Y^2, &c. ceux de y; X^1, X^2, &c. ceux de x; V^1, V^2, &c. ceux de v; &c. dans la prémiére, ſeconde, &c. équation.

Cette Notation ſuppoſée, s'il n'y a qu'une équation & qu'une inconnue z; on aura $z = \frac{A^1}{Z^1}$. S'il y a deux équations & deux inconnues z & y; on trouvera $z = \frac{A^1Y^2 - A^2Y^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$, & $y = \frac{Z^1A^2 - Z^2A^1}{Z^1Y^2 - Z^2Y^1}$. S'il y a trois équations & trois inconnues z, y, & x; on trouvera

$$z = \frac{A^1Y^2X^3 - A^1Y^3X^2 - A^2Y^1X^3 + A^2Y^3X^1 + A^3Y^1X^2 - A^3Y^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$y = \frac{Z^1A^2X^3 - Z^1A^3X^2 - Z^2A^1X^3 + Z^2A^3X^1 + Z^3A^1X^2 - Z^3A^2X^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

$$x = \frac{Z^1Y^2A^3 - Z^1Y^3A^2 - Z^2Y^1A^3 + Z^2Y^3A^1 + Z^3Y^1A^2 - Z^3Y^2A^1}{Z^1Y^2X^3 - Z^1Y^3X^2 - Z^2Y^1X^3 + Z^2Y^3X^1 + Z^3Y^1X^2 - Z^3Y^2X^1}$$

Figura 5: "Introduction à L'Analyse des Lignes Courbes Algébriques"

L'examen de ces Formules fournit cette Règle générale. Le nombre des équations & des inconnues étant n, on trouvera la valeur de chaque inconnue en formant n fractions dont le dénominateur commun a autant de termes qu'il y a de divers arrangements de n choſes différentes. Chaque terme eſt composé des lettres $ZYXV$ &c. toujours écrites dans le même ordre, mais auxquelles on diſtribue, comme expoſants, les n prémiers chiffres rangés en toutes les maniéres poſſibles. Ainſi, lorſqu'on a trois inconnues, le dénominateur a [$1 \times 2 \times 3 =$] 6 termes, composés des trois lettres ZYX, qui reçoivent ſucceſſivement les expoſants 123, 132, 213, 231, 312, 321. On donne à ces termes les ſignes + ou —, ſelon la Règle ſuivante. Quand un expoſant eſt ſuivi dans le même terme, médiatement ou immédiatement, d'un expoſant plus petit que lui, j'appellerai cela un *dérangement*. Qu'on compte, pour chaque terme, le nombre des dérangements: s'il eſt pair ou nul, le terme aura le ſigne +; s'il eſt impair, le terme aura le ſigne —. Par ex. dans le terme $Z^1 Y^2 V^3$ il n'y a aucun dérangement: ce terme aura donc le ſigne +. Le terme $Z^3 Y^1 X^2$ a auſſi le ſigne +, parce qu'il a deux dérangements, 3 avant 1 & 3 avant 2. Mais le terme $Z^3 Y^2 X^1$, qui a trois dérangements, 3 avant 2, 3 avant 1, & 2 avant 1, aura le ſigne —.

Figura 6: Cramer enunciando sua regra sem ter disponível o conceito moderno de determinante.

Regra de Cramer

$$\begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1i} \cdot x_i + \cdots + a_{1n} \cdot x_n = b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2i} \cdot x_i + \cdots + a_{2n} \cdot x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1} \cdot x_1 + a_{n2} \cdot x_2 + \cdots + a_{ni} \cdot x_i + \cdots + a_{nn} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{=A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}^{=A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$$\det A \neq 0$$

Definição: Um conjunto de vetores-coluna, $\{\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_m\} \subseteq \mathbb{R}^n$ é **linearmente dependente** se, e somente se, existirem $x_1, \cdots, x_m \in \mathbb{R}$ tais que $x_1^2 + \cdots + x_m^2 \neq 0$ e:

$$x_1 \cdot \vec{v}_1 + \cdots + x_m \cdot \vec{v}_m = \vec{0}$$

Fato: Se os vetores-coluna de uma matriz $n \times n$, A, forem linearmente dependentes, então $\det A = 0$.

Fato: Sejam $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ os vetores-coluna de uma matriz $n \times n$, A, e sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\vec{b}$ um vetor-coluna. Tem-se:

Fato: Sejam $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ os vetores-coluna de uma matriz $n \times n$, A, e sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\vec{b}$ um vetor-coluna. Tem-se:

- $\det[\vec{v}_1 \cdots x \cdot \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n] = x \cdot \det[\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n]$

Fato: Sejam $\vec{v}_1, \cdots, \vec{v}_n$ os vetores-coluna de uma matriz $n \times n$, A, e sejam $x \in \mathbb{R}$ e $\vec{b}$ um vetor-coluna. Tem-se:

- $\det[\vec{v}_1 \cdots x \cdot \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n] = x \cdot \det[\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n]$
- $\det[\vec{v}_1 \cdots \vec{b} + \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n] =$
  $\det[\vec{v}_1 \cdots \vec{b} \cdots \vec{v}_n] + \det[\vec{v}_1 \cdots \vec{v}_i \cdots \vec{v}_n]$

D. E. Whitford & M. S. Klamkin

$$x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + {\color{blue} x_i} \cdot \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{ni} \end{bmatrix} + \cdots +$$

$$+ x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = {\color{red} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}}$$

$$
x_1 \cdot \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + x_2 \cdot \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix} + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1i} \cdot x_i - b_1 \\ a_{2i} \cdot x_i - b_2 \\ \vdots \\ a_{ni} \cdot x_i - b_n \end{bmatrix} + \cdots +
$$

$$
+ x_n \cdot \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}
$$

As colunas da matriz:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} \cdot x_i - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} \cdot x_i - b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} \cdot x_i - b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

são linearmente dependentes, de modo que seu determinante se anula.

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i}\cdot x_i - b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i}\cdot x_i - b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni}\cdot x_i - b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} =$$

$$= x_i \cdot \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} -$$

$$- \det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = 0$$

$\det A \neq 0 \Rightarrow$

$$\therefore x_i = \frac{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}{\det \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}$$

Referência

Principais referências utilizadas

[Cram] Cramer, G., *Introduction a L'Analyse des Lignes Courbes Algébriques*, Genève, 1750.

[Jan] Jänich, K., *Álgebra Linear*, LTC Editora, 1998.

[Muir] Muir, T., *The Theory of Determinants in the Historical Order of Development*, volume 1, University of Michigan Library, 2006.

Obrigado!

www.ime.usp.br/~jeancb/mat0121

jeancb@ime.usp.br