Uma Introdução à Teoria dos Espaços Métricos

Sumário

Introdução

A noção de distância está indiscutivelmente presente em diversos ramos da Matemática e das ciências afins, seja de modo implícito ou explícito. Definições fundamentais do Cálculo Diferencial, como as de "limite", "ponto de acumulação", "vizinhança" e "ponto interior", da Geometria Analítica e da Álgebra Linear, como "distância entre vetores" estão presentes no quotidiano de qualquer profissional da área de Exatas. Para além desses conceitos mais gerais, a noção de distância (ou métrica) está presente em diversos outros ramos do conhecimento: por exemplo, na teoria dos Códigos Corretores de Erros, em que é possível definir a distância entre palavras de um mesmo comprimento n fixado, a "distância de Hamming" como o número de posições nas quais diferem entre si; na Teoria das Distribuições podemos citar a "métrica de Wasserstein", que fornece uma noção de distância entre distribuições de probabilidades.

Por se tratar de uma noção tão presente em diversas áreas da Matemática, é natural que o conceito de distância – ou métrica – mereça ser formalizado de modo independente da natureza de suas diversas ocorrências. Tal é o propósito da Teoria dos Espaços Métricos: estudar conjuntos em que se define uma noção de distância (ou métrica). O conhecimento desta teoria é fundamental para a compreensão do funcionamento de diversos métodos numéricos (por exemplo, a fim de resolver equações diferenciais) bem como em Análise Matemática. O **Teorema do Ponto Fixo de Banach**, por exemplo, essencial para se demonstrar a existência e unicidade da solução de problemas de valor inicial, faz uso de diversos conceitos métricos como os de "contração" e "completude".

O estudo dos espaços métricos e de suas propriedades serve também de estudo preparatório para a introdução da Topologia ("espaços topológicos", conjuntos munidos de uma noção de "subconjunto aberto" em vez de "métrica', em que é possível definir "continuidade"), à qual fazemos uma breve menção. Uma noção central da Topologia é a de homeomorfismo, que corresponde à noção de equivalência entre espaços. Esta noção, conforme observa G. Loibel em [**Loi**], nos permite obter respostas para questões como: "por que duas curvas, com aspectos tão diferentes, são designadas com um mesmo nome [curva fechada]?".

O presente texto traz, em sua primeira parte, as definições e conceitos necessários a seu desenvolvimento: produto cartesiano, relações, funções, conjuntos ordenados, ínfimo e supremo dentre outros. A segunda parte trata efetivamente dos espaços métricos, introduzindo de modo gradual os principais conceitos e resultados.

Começaremos este curso apresentando um brevíssimo resumo histórico e, em seguida, apresentaremos conceitos essenciais ao desenvolvimento da teoria. Posteriormente entraremos nos tópicos de Espaços Métricos mais profundamente.

Capítulo 1

Breve Resumo Histórico

Segundo M. Tasković, em [**Tas**], foi o matemático francês Maurice Fréchet quem primeiro concebeu possibilidade de definir noções como limite e continuidade em conjuntos abstratos, isto é, que não fossem subconjuntos da reta ou do plano. A fim de definir essas noções, Fréchet teria proposto uma generalização da noção de "distância" — uma noção central no estudo dos Espaços Métricos — para tais conjuntos mais abstratos no âmbito do Cálculo Funcional em 1906, em sua tese de doutorado intitulada "*Sur quelques points du calcul fonctionnel*".

Conforme pontua Tasković em [**Tas**], neste trabalho, Fréchet distinguiu dois tipos importantes de "espaços generalizados": os (por ele denominados) $L-$espaços ("espaços-limites", hoje tratados por "espaços de convergência sequencial") – em que a noção de limite se baseava em uma axiomatização do conceito de "sequência convergente" e, dentre os então chamados $L-$espaços, aqueles nos quais se podia definir uma "função distância". Fréchet formulou uma generalização dos conceitos de limite, derivada e continuidade para os espaços de funções (cf. Figura 1).

Em 1910, David Hilbert sugeriu axiomas para "vizinhanças" de pontos em um conjunto abstrato qualquer, generalizando, portanto, propriedades de pequenos discos centrados em pontos do plano. O termo específico "espaço métrico" ([*der*] „*metrischer Raum*") foi, finalmente, introduzido pelo matemático alemão Felix Hausdorff (1869-1942) em 1912, enquanto ponderava sobre o papel de conjuntos de pontos na Teoria dos Conjuntos (cf. [**Tas**]). O matemático alemão apresentou uma lista de axiomas em seu livro "*Grundzüge der Mengenlehre*" (em tradução livre, "Noções Básicas de Teoria dos Conjuntos") (1914, pp. 211-2). O primeiro axioma trata da propriedade simétrica que uma distância deve satisfazer: a distância entre pontos x e y, denotada por ele como $\overline{xy}$, deve ser igual à distância entre y e x, $\overline{yx}$, ou seja $\overline{xy} = \overline{yx}$. O segundo axioma expressa que $\overline{xy} = 0$ ocorre se, e somente se, $x = y$ e o terceiro axioma traduz o que hoje conhecemos por "desigualdade triangular": para quaisquer pontos x, y e z, tem-se $\overline{xz} \leq \overline{xy} + \overline{yz}$ (cf. Figura 1.2).

Après avoir développé ce point de vue, je remarque que presque toutes les définitions classiques de la limite (mais non toutes) peuvent se traduire de la manière suivante: Pour la catégorie d'éléments considérée, on peut faire correspondre à tout couple d'éléments A, B, un nombre $(A, B) \geqq 0$, ayant des propriétés très analogues à celles de la distance de deux points et tel que: 1° B coïncide avec A si $(A, B) = 0$ et 2° B tend vers A si (A, B) tend vers zéro. En adoptant cette hypothèse moins générale, mais cependant très étendue, on obtient des résultats plus précis et plus nombreux.

La voie que nous venons d'indiquer nous a conduit à la généralisation de presque tous les théorèmes sur les ensembles linéaires et sur les fonctions continues (du moins, de ceux qu'on peut énoncer d'une manière indépendante de la nature des éléments que l'on considère).

Figura 1.1: Excerto da página 2 de *"Sur quelques points du calcul fonctionnel"*, em que Fréchet generaliza o conceito de distância entre elementos que não são pontos de $\mathbb{R}^2$.

Unter einem metrischen Raume verstehen wir eine Menge E, in der je zwei Elementen (Punkten) x, y eine reelle nichtnegative Zahl, ihre Entfernung $\overline{xy} \geqq 0$ zugeordnet ist; und zwar verlangen wir überdies die Gültigkeit der folgenden

Entfernungsaxiome:

(α) **(Symmetrieaxiom). Es ist stets** $\overline{yx} = \overline{xy}$.

(β) **(Koinzidenzaxiom). Es ist** $\overline{xy} = 0$ **dann und nur dann, wenn** $x = y$.

(γ) **(Dreiecksaxiom). Es ist stets** $\overline{xy} + \overline{yz} \geqq \overline{xz}$.

Figura 1.2: Excerto da página 211 de *"Grundzüge der Mengenlehre"*, em que Hausdorff apresenta sua lista de "axiomas de afastamento" — e portanto apresenta a noção de espaço métrico utilizada até hoje.

De acordo com V. Katz em [**Katz**], Hausdorff foi capaz de isolar três conceitos básicos sobre os quais se baseia a noção de espaço topológico: as noções de distância, de vizinhança e de limite. Segundo Katz, Hausdorff teria observado que Fréchet fez uso (apenas) dos conceitos de "distância" e de "limite". Enquanto as noções de "vizinhança" e de "limite" podem ser definidas em termos da noção de "distância", observou Hausdorff, a noção de limite pode ser formulada exclusivamente em termos da noção de "vizinhança".

Os axiomas de Hausdorff que descrevem a separação (ou "afastamento", do alemão *„die Entfernung"*) foram baseados no tratamento dado por Maurice Fréchet de *"l'écart"* (a distância, o "afastamento") em sua obra. Hausdorff também propôs, em seguida, axiomas que

Umgebungsaxiome:

(A) Jedem Punkt x entspricht mindestens eine Umgebung U_x; jede Umgebung U_x enthält den Punkt x.

(B) Sind U_x, V_x zwei Umgebungen desselben Punktes x, so gibt es eine Umgebung W_x, die Teilmenge von beiden ist ($W_x \leqq \mathfrak{D}(U_x, V_x)$).

(C) Liegt der Punkt y in U_x, so gibt es eine Umgebung U_y, die Teilmenge von U_x ist ($U_y \leqq U_x$).

(D) Für zwei verschiedene Punkte x, y gibt es zwei Umgebungen U_x, U_y ohne gemeinsamen Punkt ($\mathfrak{D}(U_x, U_y) = 0$).

Figura 1.3: Excerto da página 212 de "*Grundzüge der Mengenlehre*", em que Hausdorff apresenta os axiomas de vizinhanças.

capturassem a noção de "vizinhanças" ([*die*] *Umgebunsaxiome*), como na Figura 1.3.

A. K. M. Libardi, T. Melo e J. P. Vieira, em **[Lib]**, apontam que a ideia de espaço métrico já era conhecida e usada por Henri Poincaré (1854-1912) desde 1895, conforme constam em seus diversos artigos denominados *Analysis Situs*.

H. Domingues, em [**Dom**], ressalta que forma de apresentação da teoria dos espaços métricos que se estuda atualmente foi desenvolvida pelo menos uma década depois, pelo matemático russo Pavel Urysohn, em 1924.

Convenção sobre Notações

Ao longo deste texto, subentenderemos as seguintes notações:

Se X, Y, A e B são conjuntos tais que $A \subseteq X, B \subseteq Y$ e $X \xrightarrow{f} Y$ é uma função, então:

- $X \setminus A$ denotará o complementar do conjunto A em X, ou seja, $X \setminus A = \{x \in X \mid x \notin A\}$;

- $f[A] = \{f(a) \in Y \mid a \in A\} \subseteq Y$ denotará a **imagem direta de** A **por** f;

- $f^{-1}[B] = \{x \in X \mid f(x) \in B\} \subseteq X$ denotará a **imagem inversa de** B **por** f;

- $f \restriction_A : A \subseteq X \to Y$ denotará a restrição de f ao subconjunto A;

- Se $A \subseteq B$, denotaremos por $\iota_A^B : A \hookrightarrow B$ a inclusão de A em B;

• Dado um conjunto A qualquer, $\wp(A)$ denotará o conjunto das partes de A, ou seja, o conjunto de todos os subconjuntos de A;

$\mathbb{R}$ denotará o corpo dos números reais.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3 \cdots, n, \cdots\}$ denotará o conjunto dos números naturais;

$\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ denotará o conjunto dos números reais não-negativos;

$\mathbb{Q}$ denotará o corpo dos números racionais.

Capítulo 2

Conceitos Preliminares

Nesta seção apresentamos de modo mais detalhado os conceitos necessários ao desenvolvimento da teoria dos Espaços Métricos. Fazemos uma recapitulação dos conceitos de produto cartesiano, relações e funções, bem como diversas interpretações geométricas nos casos em que tomamos subconjuntos dos números reais.

2.1 Produto Cartesiano e Relações

Um conceito sobre o qual toda a teoria das funções é construído é o de produto cartesiano, que apresentamos em seguida:

Definição 2.1 (produto cartesiano). *Dados A, B conjuntos, o **produto cartesiano de A por B**, denotado por $A \times B$ (lê-se "A cartesiano B"), é o conjunto:*

$$A \times B = \{(x, y) \mid (x \in A) \& (y \in B)\}$$

Exemplo 2.2. *Ao conjunto de todos os pares ordenados de números reais - ou seja, ao produto cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denominamos $\mathbb{R}^2$ (lê-se "$\mathbb{R}$-dois"). Assim,*

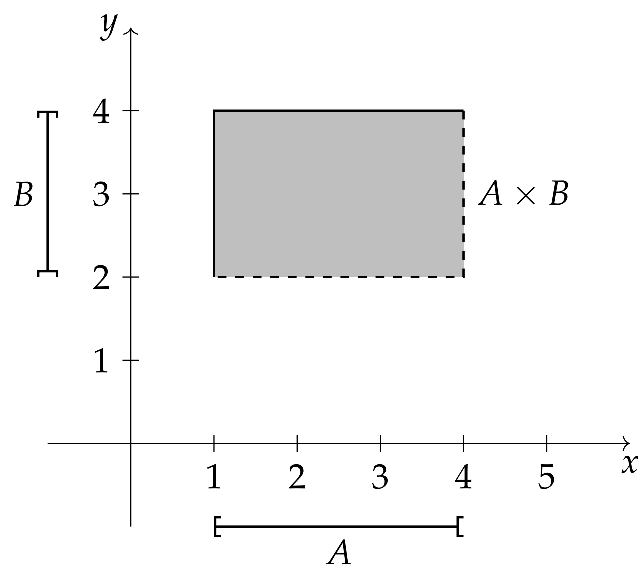
$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid (x \in \mathbb{R}) \& (y \in \mathbb{R})\}.$$

No decorrer do texto lidaremos frequentemente com o produto cartesiano $\mathbb{R}^2$, que nos servirá de "contraparte algébrica do plano geométrico". A fim de visualizar este conceito, daremos alguns exemplos de produtos cartesianos entre subconjuntos da reta real, $\mathbb{R}$, juntamente com suas representações geométricas.

Exemplo 2.3. *Sejam $A = [1, 4[$ e $B =]2, 4]$. Então:*

$$R = [1, 4[\times]2, 4] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (1 \leq x < 4) \& (2 < y \leq 4)\}.$$

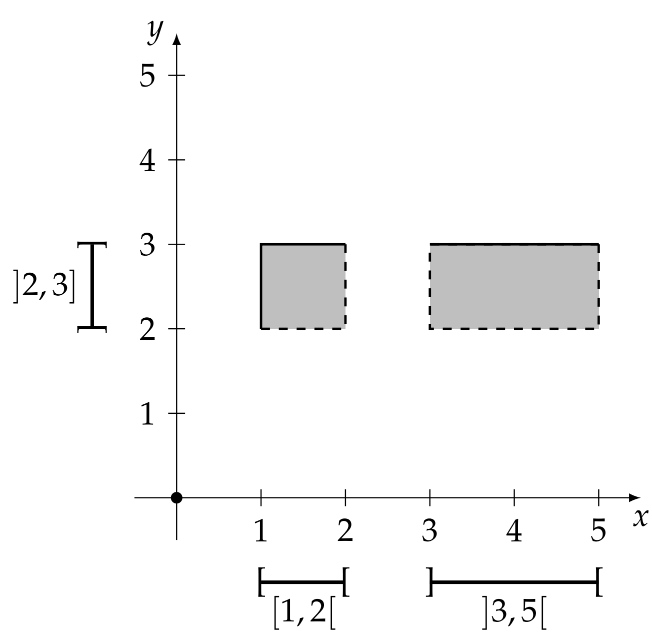
Sua representação gráfica é a região sombreada a seguir, incluindo pontos pertencentes a linhas "cheias" e excluindo pontos das linhas pontilhadas:



Exemplo 2.4. *Sejam* $A = [1,2[\cup]3,5[$ *e* $B =]2,3]$.

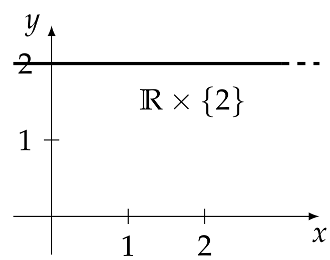
$$A \times B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid [(1 \leq x < 2) \& (2 < y \leq 3)] \vee [(3 < x < 5) \& (2 < y \leq 3)]\}$$

Sua representação gráfica é a região sombreada a seguir, incluindo pontos pertencentes a linhas "cheias" e excluindo pontos das linhas pontilhadas:

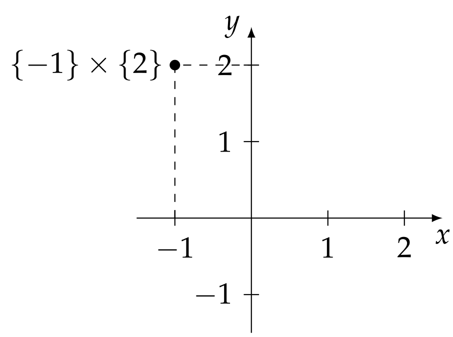


Exemplo 2.5. *Se* $A = \mathbb{R}$ *e* $B = \{2\}$, $A \times B = \mathbb{R} \times \{2\}$.

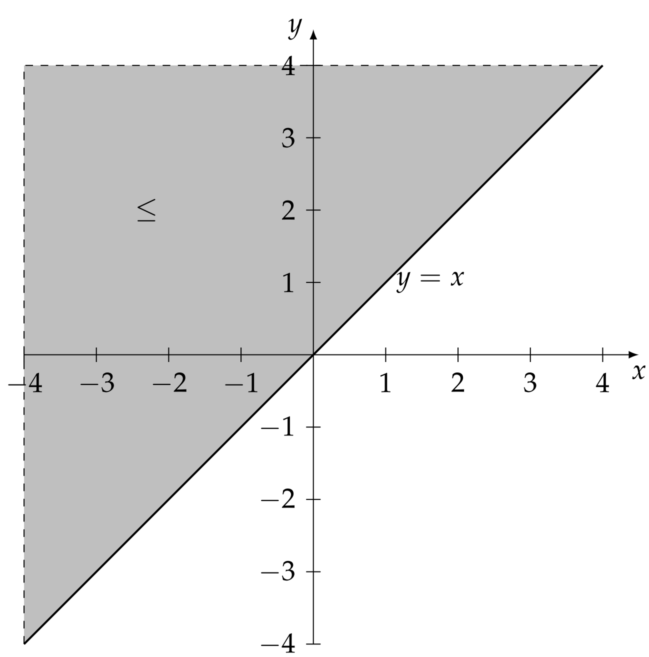
Sua representação gráfica é a reta horizontal dada a seguir:



Exemplo 2.6. $A = \{-1\}, B = \{2\}$, $A \times B = \{(-1, 2)\}$. *Sua representação gráfica é o ponto* $(-1, 2)$, *dado a seguir:*



Exemplo 2.7. *O conjunto* $\leq = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid (\exists z \in \mathbb{R})(y - x = z^2)\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é representado pela região sombreada:*



Certamente que o gráfico desta relação não se restringe apenas a esta região limitada do plano: ao contrário, a região sombreada se estende para cima e para a esquerda indefinidamente. Como é impossível representar todos esses pontos, o gráfico fica subentendido quando pontilhamos os segmentos de reta vertical e horizontal que delimitam nossa região sombreada.

Sempre que $(x, y) \in \leq$, *escreveremos* $x \leq y$. *Assim, por exemplo, escrevemos* $-1 \leq 1$ *e* $-2 \leq 1$ *para denotar* $(-1, 1) \in \leq$ *e* $(-2, 1) \in \leq$, *respectivamente.*

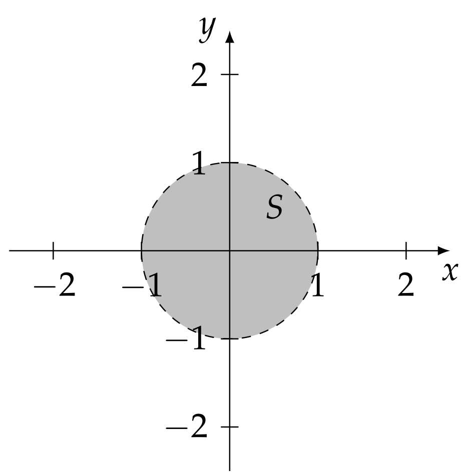
Exemplo 2.8. *Todos os conjuntos descritos nos* **Exemplos 2.3, 2.4, 2.5** *e* **2.6** *são relações planas.*

Exemplo 2.9. *O conjunto do qual nada é elemento, ou seja, o conjunto vazio,* $\varnothing$, *por estar contido em qualquer conjunto, em particular satisfaz* $\varnothing \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, *de modo a ser uma relação plana.*

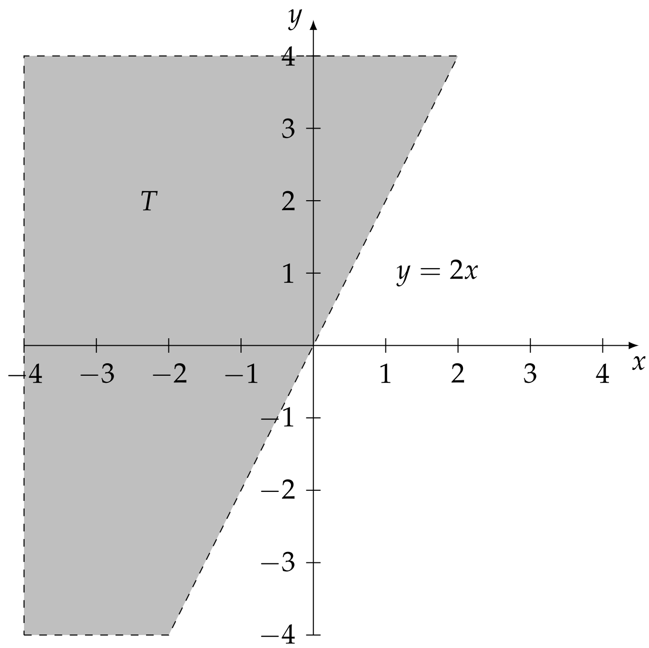
Como ilustrado no **Exemplo 2.7**, quando tratamos de relações, convém nos utilizarmos de uma notação ligeiramente diferente para indicar a pertinência de pares ordenados, como vemos na seguinte:

Observação 2.10. *Seja* $R \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *uma relação plana. Escrevemos* xRy *para denotar* $(x, y) \in R$, *e dizemos "x está na relação R com y".*

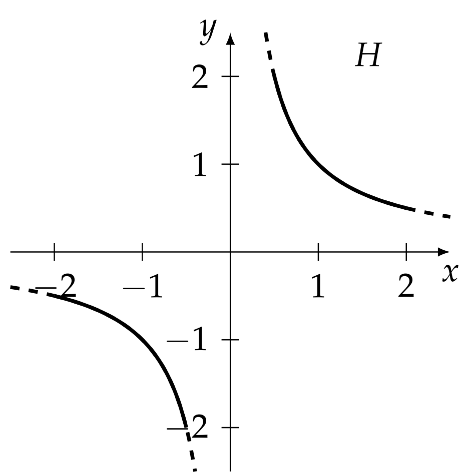
Exemplo 2.11. *O conjunto:* $S = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid x^2 + y^2 < 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* $\mathrm{dom.}\,(S) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1\} =]-1, 1[$ *e* $\mathrm{im}\,(S) = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 < y < 1\} =]-1, 1[$. *O gráfico desta relação está dado na figura a seguir, pela região sombreada:*



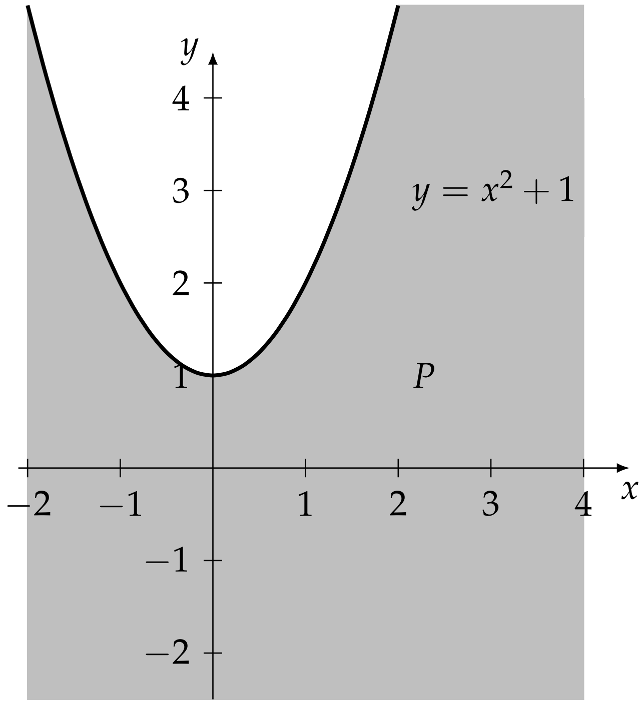
Exemplo 2.12. *O conjunto* $T = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid 2x > y\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* $\mathrm{dom.}\,(T) = \mathbb{R}$ *e* $\mathrm{im}\,(T) = \mathbb{R}$. *Uma porção (finita) do gráfico de T está representada na figura abaixo, como a região sombreada:*



Exemplo 2.13. *O conjunto* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid xy = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* dom. $(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\mathrm{im}\,(H) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$*, cujo gráfico no plano (uma porção finita representativa dele) é dado abaixo:*



Exemplo 2.14. *O conjunto* $P = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid y \leq x^2 + 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *é uma relação plana com* dom. $(P) = \mathbb{R}$ *e* $\mathrm{im}\,(P) = \mathbb{R}$*, cujo gráfico (uma porção finita que o representa) é representado pela região sombreada abaixo, incluindo a parábola* $y = x^2 + 1$*:*



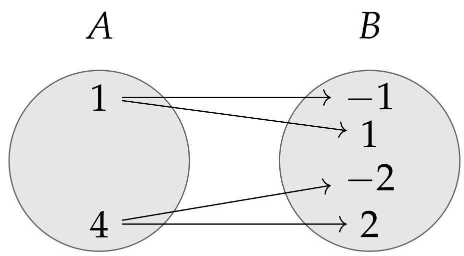
Definição 2.15 (relação total). *Sejam A e B dois conjuntos. Uma relação $R \subseteq A \times B$ é* ***total*** *se para todo $a \in A$ existir $b \in B$ tal que aRb. Simbolicamente, R é total se, e somente se:*

$$(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb).$$

Observação 2.16. *Ao longo deste texto usaremos certos símbolos que ocorrerão com certa frequência, de modo que convém fazermos certas elucidações acerca da notação. O símbolo "$\forall$" (trata-se de uma letra A [a inicial da palavra inglesa "all"] de ponta-cabeça) é denominado o* ***"quantificador universal"****, e pode ser lido como "para qualquer que seja". Assim, lemos $(\forall a \in A)$ como "para qualquer que seja $a \in A$". Por sua vez, o símbolo "$\exists$" (trata-se de uma letra E [inicial da palavra inglesa "exists"] de ponta-cabeça) é denominado "****quantificador existencial****", e pode ser lido como "existe pelo menos um". Assim, lemos $(\exists b \in B)$ como "existe pelo menos um $b \in B$". Os bloquinhos de forma $(\forall a \in A)$ e $(\exists b \in B)$ serão denominados por nós como "expressões de quantificação". A fórmula φ que colocamos depois das expressões de quantificação deve ser lida de uma das seguintes formas: se φ for uma implicação* [i.e., *uma fórmula do tipo $\alpha \Rightarrow \beta$, ou seja, da forma "se ocorrer $\cdots$ então $\cdots$"], lê-se simplesmente a própria implicação. Se φ não for uma implicação, nós a lemos como se estivesse precedida da locução "tal que". Assim, na* ***Definição 2.15****, lemos $(\forall a \in A)(\exists b \in B)(aRb)$ como "para qualquer que seja $a \in A$, existe pelo menos um $b \in B$ tal que aRb".*

Exemplo 2.17. *Dados $A = \{1, 4\}$ e $B = \{-2, -1, 1, 2\}$, a relação $R = \{(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$ é total. Note que sua representação por setas e balões é tal que a todo elemento do domíni, A, corresponde pelo menos um elemento de B.*

É mais fácil, em certos casos, determinar se uma relação é total analisando sua representação diagramática:



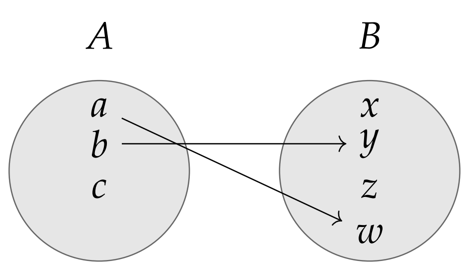
Nota-se que no diagrama acima, todos os elementos do domínio (A) são base de alguma seta da relação: ou seja, todos os elementos de A constam como primeira coordenada de algum par ordenado da relação.

Definição 2.18 (relação unívoca). *Sejam A e B dois conjuntos e $R \subseteq A \times B$ uma relação. Dizemos que S é uma **relação unívoca** se para todo $a \in A$ existe no máximo um elemento $b \in B$ tal que aSb. Simbolicamente, S é unívoca se, e somente se:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall b' \in B)(((aSb)\&(aSb')) \Rightarrow (b = b'))$$

Observação 2.19. *Lemos $(\forall a \in A)(\forall b \in B)(\forall b' \in B)(((aSb)\&(aSb')) \Rightarrow (b = b'))$ como: "para qualquer que seja $a \in A$, para qualquer que seja $b \in B$ e para qualquer que seja $b' \in B$, se aSb e aSb' então $b = b'$". O que isto significa é simplesmente que, para qualquer que seja o elemento $a \in A$, se a estiver relacionado com elementos $b, b' \in B$, então obrigatoriamente $b = b'$ - ou seja, todos os elementos do domínio estão relacionados a apenas um elemento do contradomínio, B.*

Exemplo 2.20. *Sejam $A = \{a, b, c\}$ e $B = \{x, y, z, w\}$. A relação $S = \{(a, w), (b, y)\}$ é uma relação unívoca, uma vez que a cada elemento de A corresponde, no máximo, um elemento de B. É mais fácil, em certos casos, determinar se uma relação é unívoca analisando sua representação diagramática:*



Nota-se que no diagrama acima, que de cada elemento do domínio (A) é base de no máximo uma seta da relação: ou seja, a qualquer elemento de A corresponde, no máximo, um elemento de B.

Pergunta: A relação dada no **Exemplo 2.17** é unívoca? A relação do **Exemplo 2.20** é total? Justifique.

Resposta: A relação R dada no **Exemplo 2.17** não é unívoca. Para nos convencermos disto, basta observarmos que há elementos no domínio aos quais correspondem mais do que um elemento do contradomínio: como $(1,-1),(1,1)$ estão ambos na relação, segue que ao elemento 1 correspondem dois elementos do contradomínio, e portanto não é unívoca.

Por sua vez, a relação S dada no **Exemplo 2.20** não é total, uma vez que há um elemento do domínio que não corresponde a nenhum elemento do contradomínio: não há nenhum par na relação cuja primeira coordenada seja c.

2.2 Funções

Pode-se dizer que o problema em se definir claramente o que é uma função surgiu como uma necessidade de se responder a questões importantes acerca de certas séries trigonométricas. Foi somente em 1837 que Dirichlet separou o conceito de "função" de sua "expressão analítica". A partir de então, uma função passa a ser uma correspondência entre duas variáveis que, a qualquer valor da variável independente fazia corresponder um, e apenas um valor da variável dependente. Esta formulação nos permite estender o conceito de função entre quaisquer conjuntos, não apenas entre subconjuntos de $\mathbb{R}$, como veremos.

Definição 2.21 (função). *Sejam A e B conjuntos quaisquer. Uma relação $f \subseteq A \times B$ denomina-se **função** se, e somente se:*

(F1) *f é uma relação* total *(sem exceções):*

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)((x,y) \in f);$$

(F2) *f é uma relação* unívoca *(sem ambiguidades):*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in B)((((x,y) \in f)\&((x,z) \in f)) \Rightarrow (y = z)).$$

Utilizamos as notações $f : A \to B$ ou $A \xrightarrow{f} B$ para expressar que $f \subseteq A \times B$ é uma função.

Em se tratando de funções, em vez de escrevermos $(x,y) \in f$, escrevemos $f(x) = y$. Dizemos, ainda, que x é a **variável independente** da função e que y é sua **variável dependente**. Assim, as condições da **Definição 2.21** se expressam, como segue:

(F1) f é uma relação *total* (sem exceções):

$$(\forall x \in A)(\exists y \in B)(y = f(x));$$

Coloquialmente: a todo valor atribuído à variável independente (x) corresponde pelo menos um valor da variável dependente (y).

(F2) f é uma relação *unívoca* (sem ambiguidades):

$$(\forall x \in A)(\forall y \in B)(\forall z \in B)(((f(x) = y)\&(f(x) = z)) \Rightarrow (y = z)).$$

Coloquialmente: a todo valor atribuído à variável independente, x, corresponde no máximo um valor da variável dependente (y).

Exemplo 2.22. *Seja A um conjunto. A* ***função identidade de*** *A é a função com domínio e contradomínio iguais a A e que, a cada elemento $a \in A$ faz corresponder $a \in A$.*

Pergunta: O domínio de uma função pode ser o conjunto vazio? E o contradomínio? Justifique.

Resposta: O domínio de uma função pode ser o conjunto vazio, uma vez que as cláusulas (F1) e (F2) que uma relação deve satisfazer para ser função nos exigem que todos os valores do domínio satisfaçam certa propriedade. Se o domínio da relação é vazio, não há nenhum elemento do domínio que infrinja a cláusula (F1) ou a cláusula (F2). Como não há nenhuma "testemunha" de que a relação em apreço não é função, dizemos que as cláusulas (F1) e (F2) valem por vacuidade.

Por outro lado, o contradomínio de uma função não pode ser o conjunto vazio. Se uma relação tem contradomínio vazio, ela não pode ser total, pois a nenhum elemento do domínio corresponderá qualquer elemento do contradomínio.

Ainda com as notações introduzidas na **Definição 2.21**, sendo f uma relação, segue-se que seu domínio de definição é o conjunto:

$$\operatorname{dom.}(f) = \{x \in A \mid (\exists y \in B)(y = f(x))\}$$

e que sua imagem é:

$$\operatorname{im}(f) = f[A] = \{y \in B \mid (\exists x \in A)(y = f(x))\},$$

ou seja, é o conjunto de todos os valores do contradomínio que "são oriundos" de algum elemento do domínio.

Definição 2.23. *Sejam A e B conjuntos, e $f : A \to B$ uma função. Dado qualquer subconjunto $C \subseteq B$, a* ***pré-imagem de C por f*** *(ou* ***a imagem inversa de C por f****) é o conjunto:*

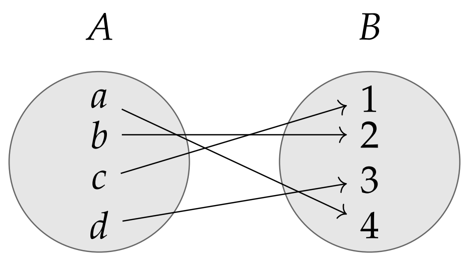
$$f^{\dashv}[C] = \{x \in A \mid f(x) \in C\} \subseteq A.$$

Em linguagem coloquial, a pré-imagem (ou imagem inversa) de $C \subseteq B$ por f é o conjunto de todos os elementos do domínio que são associados por f a algum elemento de C.

Exemplo 2.24. *Sejam $A = \{a, b, c, d\}$ e $B = \{1, 2, 3, 4\}$, e considere a relação:*

$$f = \{(a, 4), (b, 2), (c, 1), (d, 3)\},$$

que pode ser esquematizada pelo diagrama:



f é uma função. Com efeito, a todo elemento de A corresponde pelo menos um elemento de B (ao elemento a corresponde o elemento 4, ao elemento b corresponde o elemento 2, ao elemento c corresponde o elemento 1 e ao elemento d corresponde o elemento 3), de modo que f cumpre a cláusula (F1). Ademais, a todo elemento de A corresponde um único elemento de B (ao elemento a corresponde somente o elemento 4, ao elemento b corresponde somente o elemento 2, ao elemento c corresponde somente o elemento 1 e ao elemento d corresponde somente o elemento 3), de modo que f também cumpre a cláusula (F2) e, portanto, é função.

Neste exemplo, tem-se:

$$\text{dom.}\,(f) = \{a, b, c, d\} = A \ \ e \ \ \text{cod}\,(f) = \{1, 2, 3, 4\}.$$

O conjunto-imagem de f é o conjunto de todos os elementos do contradomínio que são oriundos de algum elemento do domínio. Assim, $1 \in f[A]$, pois 1 é oriundo, por f, de c (isto é, $f(c) = 1$), $2 \in f[A]$, pois 2 é oriundo, por f, de b (isto é, $f(b) = 2$), $3 \in f[A]$, pois 3 é oriundo, por f, de d (isto é, $f(d) = 3$) e $4 \in f[A]$, pois 4 é oriundo, por f, de a (isto é, $f(a) = 4$). Assim,

$$f[A] = \{1, 2, 3, 4\}.$$

Vamos determinar a pré-imagem dos seguntes subconjuntos de B: $\{1\}, \{1, 2\}, \{2, 4\}$ e $\{2, 3, 4\}$.

A pré-imagem de $\{1\} \subseteq B$ *por* f *é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, em algum elemento de* $\{1\}$ *- neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, no elemento* 1*. Assim,*$a \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*, pois* $f(a) = 4 \neq 1$*,* $b \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*, pois* $f(b) = 2 \neq 1$*,* $c \in f^{\dashv}[\{1\}]$*, pois* $f(c) = 1$ *e* $d \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*, pois* $f(d) = 3 \neq 1$*. Logo,* $f^{\dashv}[\{1\}] = \{c\}$*.*

A pré-imagem de $\{1,2\} \subseteq B$ *por* f *é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, em algum elemento de* $\{1,2\}$ *- neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, no elemento* 1 *ou no elemento* 2*. Assim,*$a \notin f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(a) = 4 \neq 1$ *e* $f(a) = 4 \neq 2$*,* $b \in f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(b) = 2 \in \{1,2\}$*,* $c \in f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(c) = 1 \in \{1,2\}$ *e* $d \notin f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(d) = 3 \neq 1$ *e* $f(d) = 3 \neq 2$*. Logo,* $f^{\dashv}[\{1,2\}] = \{b,c\}$*.*

A pré-imagem de $\{2,4\} \subseteq B$ *por* f *é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, em algum elemento de* $\{2,4\}$ *- neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, no elemento* 2 *ou no elemento* 4*. Assim,*$a \in f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(a) = 4 \in \{2,4\}$*,* $b \in f^{\dashv}[\{1,2\}]$*, pois* $f(b) = 2 \in \{2,4\}$*,* $c \notin f^{\dashv}[\{2,4\}]$*, pois* $f(c) = 1 \notin \{2,4\}$ *e* $d \notin f^{\dashv}[\{2,4\}]$*, pois* $f(d) = 3 \notin \{2,4\}$*. Logo,* $f^{\dashv}[\{2,4\}] = \{a,b\}$*.*

Finalmente, a pré-imagem de $\{2,3,4\} \subseteq B$ *por* f *é o conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, em algum elemento de* $\{2,3,4\}$ *- neste caso específico, trata-se do conjunto de todos os elementos do domínio que são aplicados, por* f*, no elemento* 2*, no elemento* 3 *ou no elemento* 4*. Assim,*$a \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$*, pois* $f(a) = 4 \in \{2,3,4\}$*,* $b \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$*, pois* $f(b) = 2 \in \{2,3,4\}$*,* $c \notin f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$*, pois* $f(c) = 1 \notin \{2,3,4\}$ *e* $d \in f^{\dashv}[\{2,3,4\}]$*, pois* $f(d) = 3 \in \{2,3,4\}$*. Logo,* $f^{\dashv}[\{2,4\}] = \{a,b,d\}$*.*

Funções, portanto, subentendem <u>três</u> dados: um **domínio de definição** (conjunto de saída), um **contradomínio** (conjunto de chegada) e uma **regra**, que a cada elemento do domínio de definição associa um, e somente um elemento do contradomínio. Esta regra não precisa ser uma fórmula matemática fechada. Considere, por exemplo, a função $\mathbb{N} \xrightarrow{f} \mathbb{N}$ tal que $f(1) = 2, f(2) = 3, f(3) = 5, f(4) = 7, f(5) = 11, f(6) = 13, \cdots, f(n) = n-$ésimo número primo. Esta função não admite uma "fórmula analítica fechada", ou seja, uma fórmula $\varphi(x)$ que nos permita calcular, para qualquer n, o $n-$ésimo número primo simplesmente por substituição de n em φ, $\varphi(n)$. No entanto, f é função, pois a cada número natural corresponde um, e somente um número primo.

Em virtude de ser uma "amálgama" de três informações (um conjunto denominado "domínio", um conjunto denominado "contradomínio" e uma "lei" que associe a cada elemento do domínio um único elemento do contradomínio), usamos uma notação especial para denotar uma função cujo domínio de definição é A, cujo contradomínio é B e cuja "lei" é $x \mapsto f(x)$, a saber:

$$\begin{array}{rccc} f: & \overbrace{A}^{\text{dom.}\,(f)} & \to & \overbrace{B}^{\text{cod}\,(f)} \\ & x & \mapsto & \underbrace{y = f(x)}_{\text{regra}} \end{array}$$

que traz <u>todas</u> as informações que definem a função.

Em posse de todos os dados que determinam uma função, estamos em condições de determinar quando duas funções são iguais:

Definição 2.25. *Duas funções são iguais se, e somente se, tiverem a mesma lei, o mesmo domínio e o mesmo contradomínio.*

Exemplo 2.26. *As funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

são iguais, uma vez que $\text{dom.}\,(f) = \mathbb{R} = \text{dom.}\,(g)$, $\text{cod}\,(f) = \mathbb{R} = \text{cod}\,(g)$ *e:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(f(x) = |x| = \sqrt{x^2} = g(x)).$$

Exemplo 2.27. *As funções:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

e:

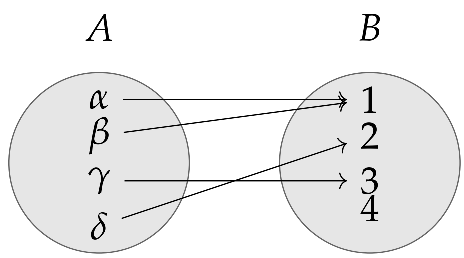
$$\begin{array}{rccc} \ell: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sqrt{x^2} \end{array}$$

são <u>diferentes</u>, uma vez que embora tenhamos $\text{dom.}\,(h) = \mathbb{R} = \text{dom.}\,(\ell)$ *e* $(\forall x \in \mathbb{R})(h(x) = |x| = \sqrt{x^2} = \ell(x))$*, temos* $\text{cod}\,(h) = \mathbb{R}_+ \neq \mathbb{R} = \text{cod}\,(\ell)$.

Exemplo 2.28. *Sejam* $A = \{\alpha, \beta, \gamma, \delta\}$ *e* $B = \{1, 2, 3\}$*. A função de* A *em* B *dada por* $f = \{(\alpha, 1), (\beta, 1), (\gamma, 3), (\delta, 2)\}$ *é denotada por:*

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \to & B \\ & \alpha & \mapsto & 1 \\ & \beta & \mapsto & 1 \\ & \gamma & \mapsto & 3 \\ & \delta & \mapsto & 2 \end{array}$$

e diagramaticamente representada por:



Note que: $f^{\dashv}[\{1\}] = \{\alpha, \beta\}$*, uma vez que* $f(\alpha) = 1 \in \{1\}$ *(logo* $\alpha \in f^{\dashv}[\{1\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \in \{1\}$ *(logo* $\beta \in f^{\dashv}[\{1\}]$*), mas* $f(\gamma) = 3 \notin \{1\}, f(\delta) = 2 \notin \{1\}$ *(logo* $\gamma, \delta \notin f^{\dashv}[\{1\}]$*);*

Também, $f^{\dashv}[\{2\}] = \{\delta\}$*, pois* $f(\alpha) = 1 \notin \{2\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \notin \{2\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \notin \{2\}$ *(logo* $\gamma \notin f^{\dashv}[\{2\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \in \{2\}$ *(logo* $\delta \in f^{\dashv}[\{2\}]$*);*

Vale que $f^{\dashv}[\{3\}] = \{\gamma\}$*, pois* $f(\alpha) = 1 \notin \{3\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*) e* $f(\beta) = 1 \notin \{3\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \in \{3\}$ *(logo* $\gamma \in f^{\dashv}[\{3\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \notin \{3\}$ *(logo* $\delta \notin f^{\dashv}[\{3\}]$*);*

Temos $f^{\dashv}[\{4\}] = \varnothing$*, uma vez que* $f(\alpha) = 1 \notin \{4\}$ *(logo* $\alpha \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*),* $f(\beta) = 1 \notin \{4\}$ *(logo* $\beta \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*),* $f(\gamma) = 3 \notin \{4\}$ *(logo* $\gamma \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*) e* $f(\delta) = 2 \notin \{4\}$ *(portanto* $\delta \notin f^{\dashv}[\{4\}]$*).*

Também tem-se $\mathrm{im}(f) = f[A] = \{1, 2, 3\}$*, pois* $1 = f(\alpha) = f(\beta)$*,* $2 = f(\delta)$*,* $3 = f(\gamma)$ *e* 4 *não é oriundo de nenhum dos elementos do domínio.*

2.2.1 Funções de Uma Variável Real a Valores Reais

Nesta seção começamos a estudar o conceito de função de uma variável real a valores reais, que são, formalmente, subconjuntos de $\mathbb{R}^2$. Em virtude da "robustez estrutural" de $\mathbb{R}^2$, pode-se estudar inúmeros aspectos destas funções sob um olhar geométrico, e portanto mais intuitivo.

Começamos apresentando sua definição e expressando um modo de interpretá-las geometricamente mediante seus gráficos. Veremos como identificar se certas regiões planas são ou não gráficos de funções.

Definição 2.29 (função de uma variável real a valores reais). *Uma função $f : A \to B$ é uma **função de uma variável real a valores reais** se, e somente se $A \subseteq \mathbb{R}$, $B \subseteq \mathbb{R}$ e f é uma função.*

Como exemplo de uma função de uma variável real a valores reais, temos a relação H dada no **Exemplo 2.13**. Nos demais exemplos não temos funções de uma variável real a valores reais, pois a cada valor de x correspondem infinitos valores pelas respectivas relações.

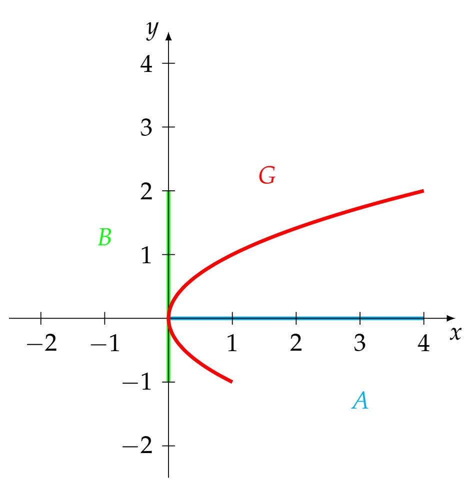
Como um teste prático para verificar se certa região do plano é ou não gráfico de função, temos a seguinte:

Proposição 2.30 (Critério Geométrico para Gráfico de Função). *Seja $R \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ uma região do plano. R é gráfico de uma função com domínio A e contradomínio B se, e somente se, toda reta vertical (paralela ao eixo Oy) contendo o ponto $(a, 0)$, para todo $a \in A$, intercepta R em exatamente um ponto;*

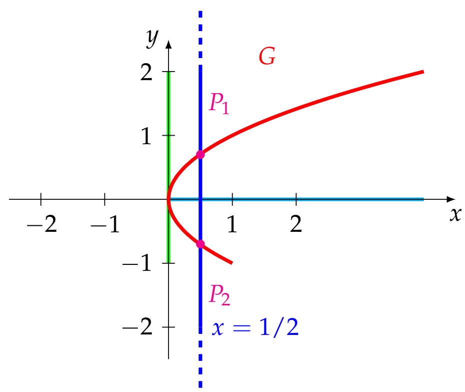
Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $R \subseteq A \times B \subseteq \mathbb{R}^2$ seja gráfico de função. Dado qualquer $a \in A$, sendo R gráfico de função, existe um único $b \in B$ tal que $(a, b) \in R$. Logo, a interseção de qualquer reta vertical de equação $x = a$ intercepta R em exatamente um ponto de R.

Reciprocamente, suponhamos que toda reta vertical (paralela ao eixo Oy) contendo o ponto $(a, 0)$, para todo $a \in A$, intercepte R em exatamente um ponto. Dado qualquer $a \in R$, a reta de equação $x = a$ intercepta R em (por hipótese) exatamente um ponto, obrigatoriamente da forma (a, b) para algum $b \in B$. Como a cada ponto de a corresponde um único ponto de b por R, segue que R é, de fato, gráfico de uma função de uma variável real a valores reais. $\square$

Consideremos os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} \mid -1 \leq y \leq 2\}$, e a região G do plano esboçada abaixo:

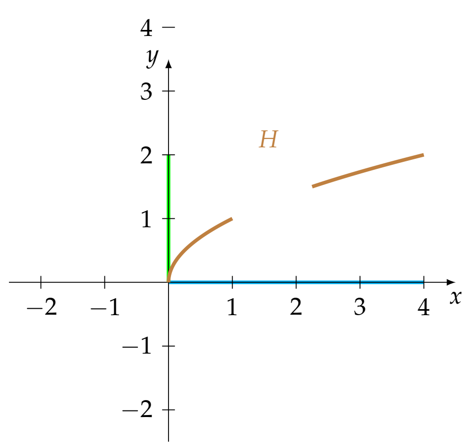


A região G acima, esboçada em vermelho, não é gráfico de nenhuma função de domínio A e contradomínio B, uma vez que não satisfaz o critério estabelecido na **Proposição 2.30**. De fato, tem-se $\frac{1}{2} \in A$ mas a reta de equação $x = 1/2$ intercepta G em dois pontos, P_1 e P_2, de modo que G não cumpre a cláusula (F2):

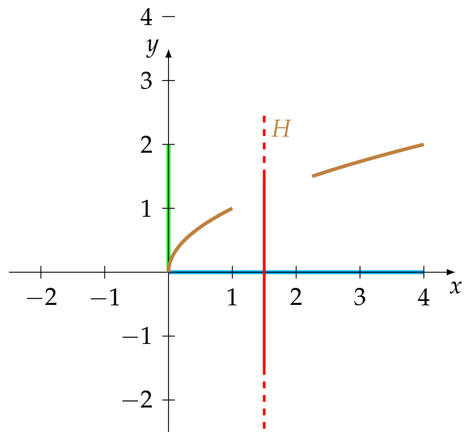


Sejam $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$ os pontos ($y_1 \neq y_2$) tais que $P_1(1/2, y_1)$ e $P_2(1/2, y_2)$. De fato, pelo exposto acima, como $(1/2, y_1), (1/2, y_2) \in G$ e $y_1 \neq y_2$, segue que G não representa nenhuma função de domínio A e contradomínio B.

Consideremos agora a seguinte região H do plano xy:



e consideremos os conjuntos $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 4\}$ e $B = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \leq y \leq 2\}$. Vamos aplicar o **Critério Geométrico para Gráfico de Função** a fim de decidir se H é gráfico de alguma função de domínio A e contradomínio B.



Aqui notamos que existe $a \in A$ - a saber, $a = \frac{3}{2}$, tal que a reta vertical $x = \frac{3}{2}$ não intercepta H em nenhum ponto. H não representa uma função de A em B porque não representa uma relação total: ao ponto $\frac{3}{2} \in A$ não corresponde nenhum elemento de B, logo não se cumpre a cláusula (F1).

É comum nos depararmos com "expressões" que subentendem funções, como por exemplo $y = \sqrt{x}$ ou $y = \frac{1}{x}$, sem que o domínio ou o contradomínio estejam devidamente explicitados. Nestes casos, recorremos à seguinte:

Observação 2.31. *Quando o domínio de uma função não é dado explicitamente, convencionamos que seu domínio é o* maior *subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual a função f pode ser definida. Quanto ao contradomínio, se não for explicitado, convencionaremos ser $\mathbb{R}$.*

Exemplo 2.32. (1) *O domínio da função dada por $f(x) = x^2$ é $\mathbb{R}$, pois para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se $x^2 \in \mathbb{R}$;*

(2) *O domínio da função dada por $f(x) = \sqrt{x}$ é $\mathbb{R}_+ = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x\}$, pois tem-se $\sqrt{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se $x \in \mathbb{R}$;*

(3) *O domínio da função dada por $f(x) = \dfrac{1}{x}$ é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, pois tem-se $\dfrac{1}{x} \in \mathbb{R}$ se, e somente se $x \neq 0$;*

Exemplo 2.33. *Determine o domínio de definição das funções dadas pelas seguintes leis:*

(a) $f(x) = x/(x-1)$;

(b) $y = 2/(x^2 + x)$;

(c) $f(x) = \sqrt{x-3}$;

(d) $y = \sqrt{6-2x}$.

Solução:

Ad (a): para determinarmos o domínio de $f(x) = \frac{x}{x-1}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x nos fornecerão um número real. No caso em apreço há somente uma obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 1 = 0$ (afinal, não existe divisão por zero). O único óbice, portanto, é $x = 1$. Assim, dom. $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 1\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ad (b): para determinarmos o domínio de $y = \frac{2}{x^2+x}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 + x = 0$ (afinal, não existe divisão por zero). Mas $x^2 + x = x(x+1)$, de modo que $x^2 + x = x(x+1) = 0$ ocorre se, e somente se $x = 0$ ou $x = -1$. Assim, dom. $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \neq 0) \& (x \neq -1)\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, 0\}$.

Ad (c): para determinarmos o domínio de $f(x) = \sqrt{x-3}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 3 < 0$ (afinal, a raiz quadrada de um número estritamente menor do que zero não é um número real). Logo, o domínio de f consistirá de todos os valores "atribuíveis" a x tais que $x - 3 \geq 0$, o que ocorre se, e somente se $x \geq 3$. Assim, dom. $(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \geq 3)\} = [3, \infty[$.

Ad (d): para determinarmos o domínio de $y = \sqrt{6-2x}$ devemos determinar <u>todos</u> os valores de números reais que x pode assumir tais que, ao serem substuídos por x nos fornecerão um número real. No caso em apreço há a seguinte obstrução ao conjunto de valores ao qual x pertence: tal conjunto não pode conter nenhum $x \in \mathbb{R}$ tal que $6 - 2x < 0$ (afinal, a raiz quadrada de um número estritamente menor do que zero não é um número real). Logo, o domínio de y consistirá de todos os valores "atribuíveis" a x tais que $6 - 2x \geq 0$, o que ocorre se, e somente se $x \leq 3$. Assim, dom. $(y) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \leq 3)\} =]-\infty, 3]$.

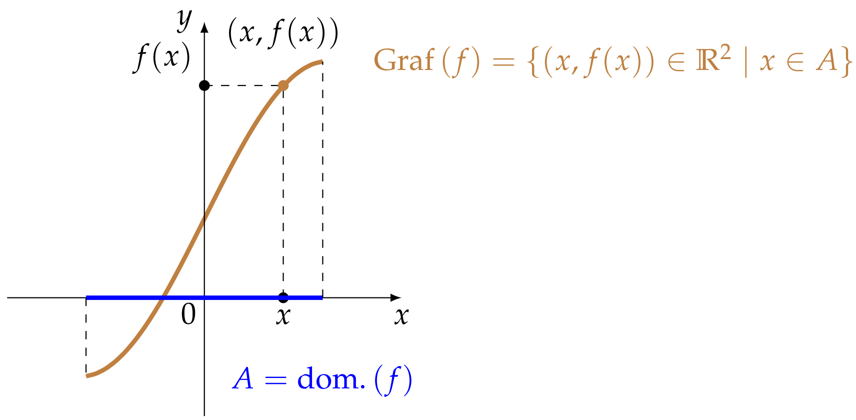
Um objeto geométrico que protagoniza o estudo das funções, permitindo-nos deduzir diversas propriedades destas, é o dado na seguinte:

Definição 2.34 (gráfico de uma função de uma variável real a valores reais). *Sejam $A, B \subset \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. O **gráfico de** f é o seguinte subconjunto do plano xy:*

$$\mathrm{Graf}\,(f) = \{P(x,y) \in \textit{plano}\, xy \mid y = f(x)\} \subseteq \textit{plano } xy$$

Uma vez que o plano xy é identificado com $\mathbb{R}^2$, tem-se:

$$\mathrm{Graf}\,(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = f(x)\} = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathrm{dom.}\,(f) = A\}.$$



2.2.2 Injetividade, Sobrejetividade e Bijetividade

Veremos, agora, propriedades que funções podem ter de modo a caracterizá-las como relações entre a quantidade de elementos de seu domínio e de seu contradomínio.

Definição 2.35 (função injetora). *Sejam A, B conjuntos e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é **injetora** se, e somente se:*

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)((x_1 \neq x_2) \Rightarrow (f(x_1) \neq f(x_2)))$$

ou, equivalentemente:

$$(\forall x_1 \in A)(\forall x_2 \in A)((f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)).$$

Coloquialmente, uma função é injetora se "preserva diferenças" ou, equivalentemente, se "reflete" igualdades. Para indicar que $f : A \to B$ é uma função injetora, escrevemos $A \overset{f}{\rightarrowtail} B$.

Quando tratamos de funções de uma variável real a valores reais, podemos enunciar um critério que nos permite determinar se são injetoras em termos de seus gráficos, que são objetos geométricos.

Proposição 2.36. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função <u>injetora</u>. Então para <u>todo</u> $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta* Graf (f) *em, <u>no máximo</u>, um ponto.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f seja injetora, mas que exista <u>algum</u> $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta Graf (f) em <u>dois pontos distintos</u>, digamos em $P(a_1, b_0)$ e $Q(a_2, b_0)$. Como $P \neq Q$ e $b_0 = b_0$, obrigatoriamente tem-se $a_1 \neq a_2$. Como

$P(a_1, b_0), Q(a_2, b_0) \in \operatorname{Graf}(f)$, segue que $f(a_1) = b_0$ e, simultaneamente, $f(a_2) = b_0$, com $a_1 \neq a_2$, contrariando a hipótese de ser f uma função injetora. O absurdo vem de supor que exista algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em dois pontos distintos. Logo, se f é injetora, então para todo $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em, no máximo, um ponto. □

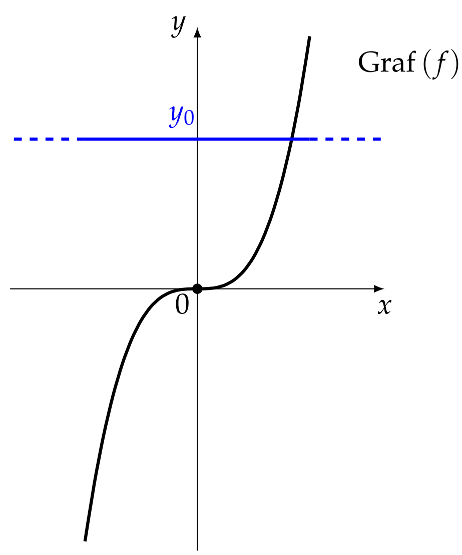
Corolário 2.37 (teste gráfico para injetividade). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Se existir algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em mais de um ponto, então f é uma função injetora.*

Aplicando o **Teste Gráfico de Injetividade**, vamos ver que a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^3 \end{array}$$

é injetora.

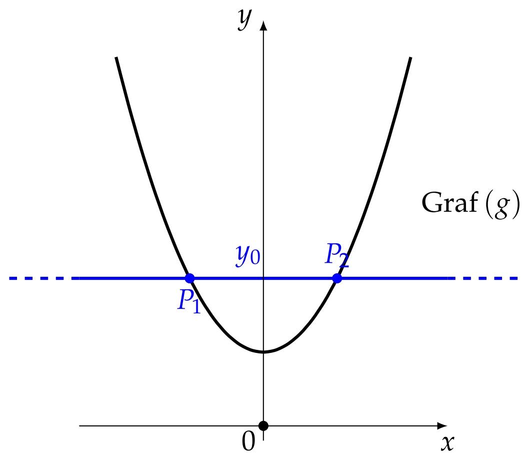
De fato, observe que para qualquer número real $y_0 \in \mathbb{R} = \operatorname{cod}(f)$, a reta de equação $y = y_0$ intercepta $\operatorname{Graf}(f)$ em, no máximo, um ponto:



Pelo mesmo critério, podemos concluir que a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 + 1 \end{array}$$

não é injetora. De fato, qualquer reta horizontal de equação $y = y_0$, com $y_0 > 1$ interceptará o gráfico de g em dois pontos, P_1 e P_1 (logo, não é o caso da interseção ocorrer em, no máximo, um ponto):



Definição 2.38 (função sobrejetora). *Sejam A, B conjuntos e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é* ***sobrejetora*** *se, e somente se:*

$$(\forall y \in B)(\exists x \in A)(y = f(x))$$

ou, equivalentemente:

$$f[A] = \mathrm{Im}\,(f) = B.$$

Para indicar que uma função $f : A \to B$ é sobrejetora, escrevemos $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.

Novamente, para funções de uma variável real a valores reais podemos deduzir sua sobrejetividade observando sua representação geométrica, ou seja, seu gráfico.

Proposição 2.39. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função sobrejetora. Então para todo $b \in B$, a reta de equação $y = b$ intercepta* Graf (f) *em, no mínimo, um ponto.*

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que f seja sobrejetora, ou seja, que:

$$f[A] = \mathrm{im}\,(f) = B,$$

mas que exista algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepta Graf (f). Neste caso, $b_0 \in B$ *mas* $b_0 \notin f[A]$, uma vez que $f[A] = \{b \in B \mid (\exists a \in A)(f(a) = b)\}$, ou seja, $f[A] \neq B$. Disto segue que f não é sobrejetora, o que contraria nossa hipótese. O absurdo provém de supormos que existe $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepte Graf (f). $\square$

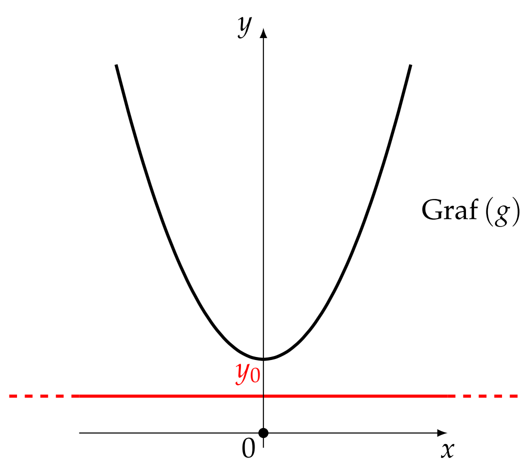
Corolário 2.40 (teste gráfico para sobrejetividade). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Se existir algum $b_0 \in B$ tal que a reta de equação $y = b_0$ não intercepta* Graf (f), *então f não é uma função sobrejetora.*

Consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

e vejamos, aplicando o **teste gráfico para sobrejetividade** que tal função não é sobrejetora.

De fato, para qualquer $y_0 \in \mathbb{R} = \operatorname{cod}(g)$ tal que $y_0 < 1$, a reta horizontal de equação $y = y_0$ não intercepta nenhum ponto do gráfico de g. Isto significa que nenhum $y_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y_0 < 1$ é oriundo de algum elemento do domínio - logo g não pode ser sobrejetora.



No entanto, se considerarmos a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R} & \to & [1, \infty[\\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

veremos que toda reta de equação $y = y_0$, para qualquer $y_0 \in \operatorname{cod}(h) = [1, \infty[$ intercepta o gráfico de h em, pelo menos, um ponto. Logo, h é sobrejetora.

Uma função simultaneamente injetora e sobrejetora é de importância central na comparação entre conjuntos. Apresentamos a seguinte definição:

Definição 2.41 (função bijetora). *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Dizemos que f é* ***bijetora*** *se, e somente se, for simultaneamente injetora e sobrejetora. Para indicar que uma função $f: A \to B$ é bijetora, escrevemos $A \overset{f}{\twoheadrightarrow} B$.*

Pense nisto: enuncie um critério gráfico para bijetividade de uma função $f : A \to B$, similar aos critérios enunciados anteriormente para injetividade e sobrejetividade.

2.2.3 Operações com Funções a Valores Reais

Dada uma função de uma variável real a valores reais, $A \xrightarrow{f} B$, como $A \subset \mathbb{R}$ e $B \subset \mathbb{R}$, podemos operar os elementos de A e de B - e em particular podemos somar, subtrair, multiplicar e, sob certas circunstâncias, dividir elementos do contradomínio de f, pois este é parte do conjunto dos números reais, onde podemos efetuar estas operações. Em vista disto, podemos "operar" com funções de uma variável real a valores reais que admitam elementos na interseção dos seus domínios simplesmente por operar, para cada x, as respectivas imagens das funções.

Temos, portanto, a seguinte:

Definição 2.42. *Sejam* $f : \operatorname{dom}(f) \to \mathbb{R}$ *e* $g : \operatorname{dom}(g) \to \mathbb{R}$ *duas funções tais que* $\operatorname{dom}(f) \cap \operatorname{dom.}(g) \neq \varnothing$.

(i) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f+g: & \operatorname{dom.}(f) \cap \operatorname{dom.}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)+g(x) \end{array}$$

*é denomidada a **soma de** f **e** g;*

(ii) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f-g: & \operatorname{dom.}(f) \cap \operatorname{dom.}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x)-g(x) \end{array}$$

*é denomidada a **diferença de** f **e** g;*

(iii) *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: & \operatorname{dom.}(f) \cap \operatorname{dom.}(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

*é denomidada a **produto de** f **e** g;*

(iv) *Se* $k \in \mathbb{R}$ *é um número qualquer, então a função:*

$$\begin{array}{rccc} k \cdot f: & \operatorname{dom.}(f) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & k \cdot f(x) \end{array}$$

*é denomidada o **produto de** f **pela constante** k;*

(iv) *Se* $(\forall x \in \text{dom.}\,(g))(g(x) \neq 0)$, *então a função:*

$$\begin{array}{rccc} \dfrac{f}{g}: & \text{dom.}\,(f) \cap \text{dom.}\,(g) & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

*é denomidada o **quociente de** f **e** g;*

Definição 2.43 (composição de funções). *Sejam* $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$, $A \xrightarrow{f} B$ *e* $B \xrightarrow{g} C$ *funções (note bem que* $\text{cod}\,(f) = \text{dom.}\,(g)$*). A **composição de** g **com** f é a função:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & A & \to & C \\ & x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}$$

ou seja, é a função $g \circ f$ tal que:

$$(\forall x \in \text{dom.}\,(f))((g \circ f)(x) = g(f(x))).$$

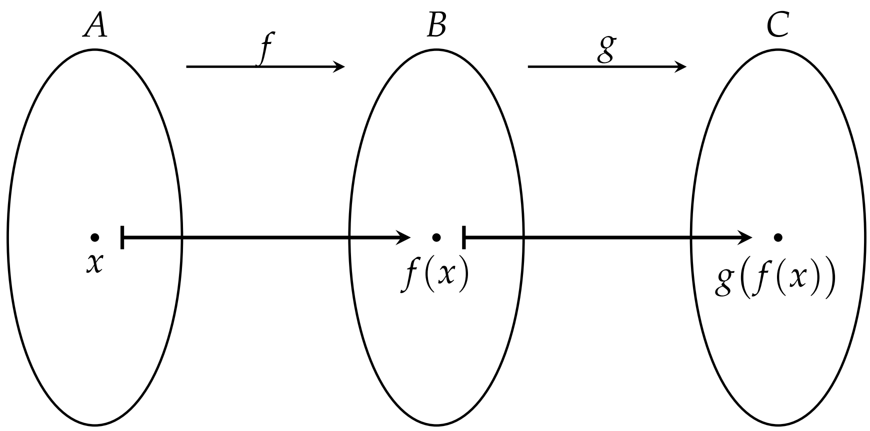
Sempre que $\text{cod}\,(f) = \text{dom.}\,(g)$, *dizemos que g e f são **componíveis**, e podemos definir $g \circ f$.*

Em termos diagramáticos, costumamos dizer que "o diagrama a seguir comuta":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & B \arrow[d, "g"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Isto significa que:

- *f tem como domínio o conjunto A e como contradomínio o conjunto B;*
- *g tem como domínio o conjunto B e como contradomínio o conjunto C;*
- *$g \circ f$ tem como domínio o conjunto A e como contradomínio o conjunto C;*
- *Para qualquer $x \in A$, obtemos o mesmo elemento em C calculando $(g \circ f)(x)$ ou calculando primeiramente $f(x)$ e, em seguida, calculando $g(f(x))$.*



Exemplo 2.44. *Considere:*

$$\begin{array}{rccc} h: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{x+3}{x-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sin(y) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & e^z \end{array}$$

Então, uma vez que $\operatorname{cod}(g) = \mathbb{R} \neq [-1,1] = \operatorname{dom}(f)$, *não podemos definir* $f \circ g$, *ou seja,* f ***não é componível com*** g. *No entanto, como* $\operatorname{cod}(f) = \mathbb{R} = \text{dom.}\ (g)$, *de modo que* g ***é componível com*** f, *e podemos definir:*

$$\begin{array}{rccc} g\circ f: & [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ & z & \mapsto & g(f(z)) = g(e^z) = \sin(e^z) \end{array}$$

Como $\operatorname{cod}(g\circ f) = \mathbb{R} \neq \mathbb{R}\setminus\{3\} = \text{dom.}\ (h)$, *não definimos* $h\circ(g\circ f)$, h ***não é componível com*** $g\circ f$. *No entanto, como* $\operatorname{cod}(h) = \mathbb{R} = \text{dom.}\ (g)$, g ***é componível com*** h, *e definimos:*

$$\begin{array}{rccc} g\circ h: & \mathbb{R}\setminus\{3\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right) = \sin\left(\dfrac{x+3}{x-3}\right) \end{array}$$

Exemplo 2.45. *Sejam:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2+1 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \sqrt{y} \end{array}$$

Uma vez que $\operatorname{cod}(f) = \operatorname{dom.}(g)$*,* g ***é componível com*** f*, e tem-se:*

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(f(x)) = \sqrt{x^2+1} \end{array}$$

Como $\operatorname{cod}(g) = \operatorname{dom.}(f)$*,* f ***é componível com*** g*, e pode-se definir também:*

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & y & \mapsto & f(g(y)) = f(\sqrt{y}) = (\sqrt{y})^2 + 1 = y + 1 \end{array}$$

Este exemplo ilustra que, em geral, ainda que $f \circ g$ *e* $g \circ f$ *estejam ambas definidas,* $f \circ g \neq g \circ f$*.*

Exemplo 2.46. *Considere as funções:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 - 5x + 6 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & \dfrac{1}{y} \end{array}$$

Neste caso, não está definida $g \circ f$*, uma vez que* $\operatorname{cod}(g) = \mathbb{R} \nsubseteq \mathbb{R} \setminus \{0\} = \operatorname{dom.}(f)$ *(pois* $0 \in \operatorname{cod}(f)$ *e* $0 \notin \operatorname{dom.}(g)$*).*

Por outro lado, podemos definir $f \circ g$*, uma vez que* $\operatorname{cod}(g) = \operatorname{dom.}(f)$*:*

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & y & \mapsto & f\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{5}{y} + 6 \end{array}$$

Observação 2.47. *Sejam* A, B, C *conjuntos e* $A \xrightarrow{g} B$*,* $B \xrightarrow{f} C$ *funções. Então* $\operatorname{dom.}(f \circ g) = \operatorname{dom.}(g)$ *e* $\operatorname{cod}(f \circ g) = \operatorname{cod}(f)$*.*

Definição 2.48 (composição de funções). *Sejam* $A, B, C \subseteq \mathbb{R}$*,* $A \xrightarrow{g} B$ *e* $B \xrightarrow{f} C$ *funções (note bem que* $\operatorname{cod}(g) = \operatorname{dom.}(f)$*). A* ***composição de*** f ***com*** g *é a função:*

$$\begin{array}{rccc} f \circ g: & A & \to & C \\ & x & \mapsto & f(g(x)) \end{array}$$

ou seja, é a função $g \circ f$ *tal que:*

$$(\forall x \in \operatorname{dom.}(f))((g \circ f)(x) = g(f(x))).$$

Em termos diagramáticos, costumamos dizer que "o diagrama a seguir comuta":

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f\circ g"'] & B \arrow[d, "f"] \\ & C \end{tikzcd}$$

Isto significa que:

- *g tem como domínio o conjunto A e como contradomínio o conjunto B;*
- *f tem como domínio o conjunto B e como contradomínio o conjunto C;*
- *$f \circ g$ tem como domínio o conjunto A e como contradomínio o conjunto C;*
- *Para qualquer $x \in A$, obtemos o mesmo elemento em C calculando $(f \circ g)(x)$ ou calculando primeiramente $g(x)$ e, em seguida, calculando $f(g(x))$.*

Sob certas condições adequadas, podemos compor várias funções. Sejam $A \xrightarrow{h} B$, $B \xrightarrow{g} C$ e $C \xrightarrow{f} D$ três funções. Então podemos obter $f \circ g : B \to D$ e $g \circ h : A \to C$. Como $\text{cod}\,(h) = \text{dom.}\,(f \circ g)$, define-se:

$$(f \circ g) \circ h : A \to D,$$

e como $\text{cod}\,(g \circ h) = \text{dom.}\,(f)$, define-se:

$$f \circ (g \circ h) : A \to D.$$

A proposição a seguir nos mostra que, em ambos os casos, obtemos a mesma função:

Proposição 2.49 (Associatividade da Composição de Funções). *Sejam A, B, C e D conjuntos, e sejam $f : C \to D, g : B \to C$ e $h : A \to B$ funções. Tem-se:*

$$f \circ (g \circ h) = (f \circ g) \circ h$$

ou seja, o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "h"] \arrow[dr, "g\circ h"'] & B \arrow[d, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ & C \arrow[r, "f"'] & D \end{tikzcd}$$

Demonstração. Já sabemos que $\text{dom}\,(f \circ (g \circ h)) = A = \text{dom.}\,((f \circ g) \circ h)$ e que $\text{cod}\,(f \circ (g \circ h)) = \text{cod}\,((f \circ g) \circ h)$, de modo que para demonstrar a identidade, basta verificarmos que, para qualquer $x \in A$ tem-se:

$$f \circ (g \circ h)(x) = (f \circ g) \circ h(x).$$

Por um lado, tem-se $f \circ (g \circ h)(x) = f((g \circ h)(x)) = f(g(h(x)))$, e por outro lado tem-se $(f \circ g) \circ h(x) = (f \circ g)(h(x)) = f(g(h(x)))$, o que prova o resultado.

□

Proposição 2.50. *Sejam A, B conjuntos e $A \xrightarrow{f} B$ uma função. Tem-se:*

$$(f \circ \mathrm{id}_A = f)\&(\mathrm{id}_B \circ f = f)$$

Demonstração. Tem-se, naturalmente, que dom. $(f \circ \mathrm{id}_A) =$ dom. (f) e cod $(f \circ \mathrm{id}_A) =$ cod (f). Logo, basta mostrarmos que para qualquer $a \in A$ tem-se $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(a)$. De fato, dado qualquer $a \in A$, tem-se $(f \circ \mathrm{id}_A)(a) = f(\mathrm{id}_A(a)) = f(a)$, e segue o resultado. A demonstração de que $\mathrm{id}_B \circ f = f$ é análoga, portanto a omitiremos. □

2.2.4 Inversas Laterais de uma Função: Seções e Retrações

Definição 2.51 (inversa à esquerda). *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $g : B \to A$ é uma **função inversa de f à esquerda** se, e somente se:*

$$(g \circ f = \mathrm{id}_A).$$

Definição 2.52 (seção). *Uma **seção** é uma função que admite inversa à esquerda.*

Definição 2.53 (inversa à direita). *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Uma função $g : B \to A$ é uma **função inversa de f à direita** se, e somente se:*

$$(f \circ g = \mathrm{id}_B).$$

Definição 2.54 (retração). *Uma **retração** é uma função que admite inversa à direita.*

Proposição 2.55. *Toda função sobrejetora é uma retração.*

Demonstração. Seja $f : A \twoheadrightarrow B$ uma sobrejeção, de modo que para cada $y \in B$ existe pelo menos um $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Podemos construir uma inversa à esquerda para f simplesmente escolhendo, para cada $y \in B$ um único elemento $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Seja $g : B \to A$ uma tal aplicação. Tem-se:

$$(\forall y \in B)((f \circ g)(y) = f(x) = y)$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[d, "f"] \\ B \arrow[ur, "g"] \arrow[r, "\mathrm{id}_B"'] & B \end{tikzcd}$$

□

2.2.5 A Inversa de Uma Função

Definição 2.56. *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. A* ***função inversa de*** *f, quando existir, é uma função $g : B \to A$ tal que:*

$$(f \circ g = \mathrm{id}_B) \& (g \circ f = \mathrm{id}_A).$$

Proposição 2.57. *Sejam A e B conjuntos, e seja $f : A \to B$ uma função. Se f admite uma função inversa $g : B \to A$, então g é única.*

Demonstração. Suponhamos que $g, g' : B \to A$ sejam duas funções inversas de f. Mostraremos que $g = g'$. Como g e g' têm os mesmos domínios e contradomínios, pela **Definição 2.25** basta mostrarmos que g e g' têm a mesma lei.

Como g é inversa de f, segue que para qualquer $y \in B$:

$$(f \circ g)(y) = \mathrm{id}_B(y) = y$$

Aplicando g' aos dois membros da igualdade acima e observando que $g' \circ f = \mathrm{id}_A$, segue que:

$$g' \circ (f \circ g)(y) = g' \circ \mathrm{id}_B(y) = g'(y)$$

$$(g' \circ f) \circ g(y) = g'(y)$$

$$\mathrm{id}_B \circ g(y) = g'(y)$$

$$g(y) = g'(y)$$

Uma vez que $(\forall y \in B)(g(y) = g'(y))$, segue do que observamos anteriormente que $g = g'$. □

Teorema 2.58. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ e $A \xrightarrow{f} B$ uma função bijetora. Então existe uma* única *função $B \xrightarrow{f^{-1}} A$ tal que:*

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B \tag{2.1}$$

e:

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A \tag{2.2}$$

Demonstração. Suponhamos, primeiramente, que $f : A \to B$ seja bijetora e, em seguida, vamos construir uma inversa para f. A inversa de f deve ter, como domínio, o conjunto B, e como contradomínio o conjunto A. Devemos, portanto, estabelecer uma relação unívoca e total, $g : B \to A$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_B$ e $g \circ f = \mathrm{id}_A$.

Dado $y \in B$ qualquer, como f é bijetora e, em particular, sobrejetora, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Como f é bijetora e, em particular, injetora, segue que este x tal que $f(x) = y$ é único. Assim, estabelecemos uma função:

$$\begin{array}{rccc} g: & B & \to & A \\ & y & \mapsto & \text{o único } x \text{ tal que } f(x) = y \end{array}$$

Note que a totalidade de g provém do fato de ser f sobrejetora, e a univocidade de g provém do fato de f ser injetora. Note que:

$$(\forall x \in A)(g(f(x)) = x)$$

e que:

$$(\forall y \in B)(f(g(y)) = y),$$

de modo que $g \circ f = \mathrm{id}_A$ e $f \circ g = \mathrm{id}_B$. Outrossim, note que, por construção, esta função g é única. Segue que $g = f^{-1}$.

□

Observação 2.59. *Em termos diagramáticos, dizemos que o "diagrama a seguir comuta"*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "g"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_B"] & \\ & A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

Isto significa que:

- $g \circ f = \mathrm{id}_A$;
- $f \circ g = \mathrm{id}_B$;
- $f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f$;

Definição 2.60 (função inversa). *A função $f^{-1} : B \to A$ dada no **Teorema 2.58** é denominada a **função inversa de** $A \xrightarrow{f} B$.*

Da definição de função inversa segue a:

Proposição 2.61. *Dada uma função $f : A \to B$ bijetora, temos:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(f(a) = b \iff a = f^{-1}(b)).$$

Demonstração. Sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $f(a) = b$. Aplicando f^{-1} aos dois membros desta igualdade, obtemos (pelo fato de f^{-1} ser função):

$$f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b),$$

e como $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$, tem-se:

$$a = \mathrm{id}_A(a) = f^{-1}(f(a)) = f^{-1}(b).$$

Reciprocamente, sejam $a \in A$ e $b \in B$ tais que $a = f^{-1}(b)$. Aplicando f aos dois membros desta igualdade, obtemos (pelo fato de f ser função):

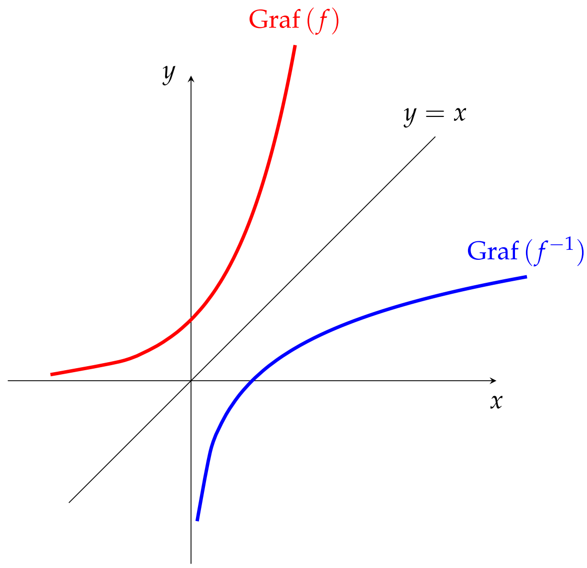
$$f(a) = f(f^{-1}(b)),$$

e como $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$, tem-se:

$$b = \mathrm{id}_B(b) = f \circ f^{-1}(b) \underbrace{=}_{\text{hip.}} a.$$

□

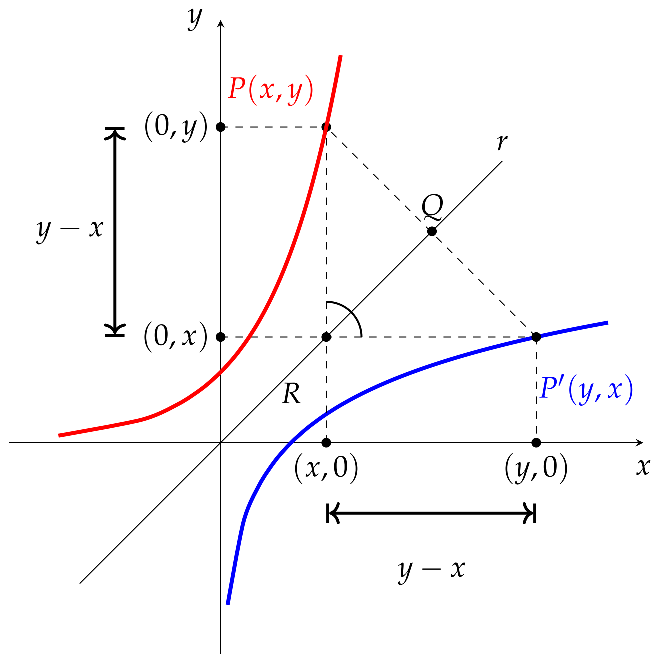
Teorema 2.62. *Se $f : A \to B$ é uma função de uma variável real a valores reais invertível, com inversa $f^{-1} : B \to A$, então $\mathrm{Graf}\,(f)$ e $\mathrm{Graf}\,(f^{-1})$ são simétricos em relação à primeira bissetriz (i.e., a reta de equação $y = x$).*



Demonstração. Seja $P(x, y)$ um ponto de Graf(f), ou seja, tal que $y = f(x)$. Pela **Proposição 2.61**, tem-se $f^{-1}(y) = x$, de modo que $(y, x) \in$ Graf(f^{-1}). Devemos mostrar que $P'(y, x) \in$ Graf(f^{-1}) é simétrico de P em relação à reta r de equação $y = x$, ou seja, que $P(x, y)$ e $P'(y, x)$ são equidistantes da reta r.

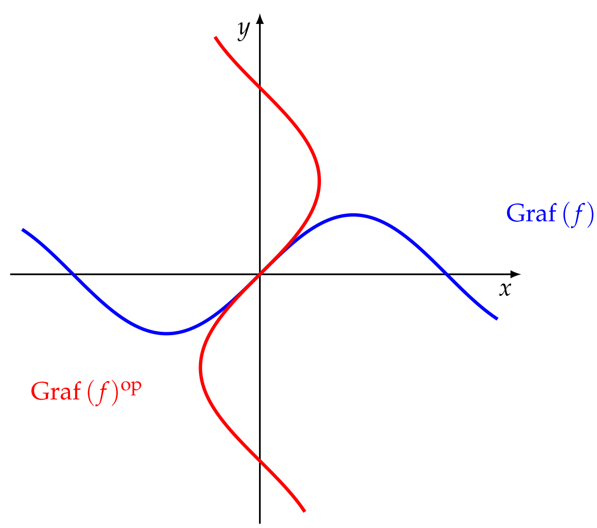
Observamos na figura a seguir que:

- $RP \cong RP'$, pois ambos medem $y - x$;
- $\angle(PRQ) \cong \angle(QRP')$, pois ambos medem $\pi/4$, já que r é a primeira bissetriz;
- RQ é um lado comum aos triângulos ΔPQR e $\Delta P'QR$;



Segue das três observações acima, pelo caso lado-ângulo-lado de congruência de triângulos, que $\Delta PQR \cong \Delta P'QR$. Segue disto que a distância de P a Q, $d(P, Q)$, é igual à distância de P' a Q, $d(P', Q)$. Segue, portanto, que os pontos P e P' são simétricos pela primeira bissetriz. $\square$

Ao removermos a hipótese de invertibilidade de f no teorema anterior, não podemos garantir que a reflexão de $\mathrm{Graf}(f)$ - que denotamos abaixo por $\mathrm{Graf}(f)^{\mathrm{op}}$. pela primeira bissetriz seja gráfico de alguma função. Veja o seguinte exemplo:



Usando-se a **Proposição 2.30**, verifica-se que embora f seja uma função, seu gráfico refletido pela primeira bissetriz, $\mathrm{Graf}(f)^{\mathrm{op}}$ não é gráfico de nenhuma função.

2.3 Relações de Equivalência

Até este ponto estudamos as relações entre conjuntos quaisquer. Nesta subseção, veremos as relações de um conjunto, A, nele mesmo, ou seja, relações $\mathcal{R} \subseteq A \times A$.

Quando trabalhamos com relações de um conjunto nele mesmo continuam válidas todas as definições e propriedades vistas até agora, bastando trocar $A \times B$ por $A \times A$. Uma relação de A em A será denominada por "relação em A".

Definição 2.63 (diagonal de um conjunto). *Dado um conjunto A qualquer, a* ***diagonal de*** *A, denotada por $\Delta(A)$, é o conjunto:*

$$\Delta(A) = \{(a, a) \mid a \in A\}.$$

Definição 2.64 (relação reflexiva). *Sejam A um conjunto e $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ uma relação em A. Dizemos que A é uma* ***relação reflexiva*** *quando:*

$$(\forall x \in A)((x, x) \in \mathcal{R}),$$

ou, equivalentemente, se $\Delta(A) = \{(x, x) \mid x \in A\} \subseteq \mathcal{R}$.

Exemplo 2.65. *Seja $A = \{a, b, c, d\}$. A relação $\mathcal{R}_1 = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, c), (c, d), (d, d)\}$ é reflexiva, enquanto que $\mathcal{R}_2 = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, d), (d, d)\}$* não *é reflexiva, uma vez que $(c, c) \notin \mathcal{R}_2$.*

Exemplo 2.66. *Seja R o conjunto de todas as retas de um plano, e considere a relação $\{(r, s) \in R \times R \mid r \perp s\}$. Como nenhuma reta é perpendicular a si mesma, segue que esta relação não é reflexiva*

Exemplo 2.67. *Sejam E o conjunto de todos os triângulos coplanares de $\mathbb{R}^2$, e considere em E a relação:*

$$\mathcal{R} = \{(t_1, t_2) \in E \times E \mid t_1 \text{ é congruente a } t_2\}$$

é uma relação reflexiva, uma vez que todo triângulo é congruente a si próprio.

Exemplo 2.68. *Considere em $\mathbb{N}$ a relação $\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p|(n - m)\}$, para algum número primo $p \in \mathbb{N}$. Como $p|0$, segue que esta relação é reflexiva – afinal, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $p|(n - n)$ e portanto $(n, n) \in \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid p|(m - n)\}$.*

Definição 2.69 (relação simétrica). *Sejam A um conjunto e $\mathcal{R} \subseteq A \times A$ uma relação. Dizemos que $\mathcal{R}$ é uma relação* ***simétrica*** *se:*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)((x, y) \in \mathcal{R} \Rightarrow (y, x) \in \mathcal{R})$$

Isto significa que, se o par (x, y) pertence à relação, obrigatoriamente o par (y, x) também deve pertencer à relação. Uma relação $\mathcal{R} \subset A \times A$ é **não simétrica** se existir $(x, y) \in \mathcal{R}$ com $x \neq y$ tal que $(y, x) \notin \mathcal{R}$.

Exemplo 2.70. *Seja R o conjunto de todas as retas de um certo plano, e considere a relação $\{(r, s) \in R \times R \mid r//s\}$. Esta relação é simétrica, uma vez que se $r//s$ então forçosamente $s//r$.*

Exemplo 2.71. *Sejam $A = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ e $R = \{(m, n) \in A \times A \mid m|n\}$. A relação R é não-simétrica, uma vez que embora $(2, 4) \in R$, $(4, 2) \notin R$.*

Definição 2.72 (relação antissimétrica). *Seja A um conjunto. Uma relação $R \subseteq A \times A$ é **antissimétrica** se:*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)((((x, y) \in R)\&((y, x) \in R)) \Rightarrow (x = y))$$

Definição 2.73 (relação transitiva). *Seja A um conjunto. Uma relação $R \subseteq A \times A$ é transitiva se:*

$$(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)(((x, y) \in R)\&((y, z) \in R) \Rightarrow ((x, z) \in R))$$

Exemplo 2.74. *No conjunto $\mathbb{N}$ considere a relação:*

$$<= \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (\exists r \in \mathbb{N})(n = m + r)\}$$

é transitiva, uma vez que dados $m, n, p \in \mathbb{N}$, se $m < n$ e $n < p$, podemos concluir que $m < p$.

Exemplo 2.75. *Dado um conjunto A, considere $\wp(A) = \{X \mid X \subseteq A\}$. A relação:*

$$\subset= \{(X, Y) \in \wp(A) \times \wp(A) \mid (\forall x \in A)((x \in X) \Rightarrow (x \in Y))\}$$

é uma relação transitiva.

Definição 2.76 (relação de equivalência). *Dados um conjunto A e uma relação $R \subseteq A \times A$, dizemos que R **é uma relação de equivalência** se, e somente se R for reflexiva, transitiva e simétrica, ou seja, se, e somente se, valerem os seguintes axiomas:*

(R) $(\forall x \in A)((x, x) \in R)$ *(propridade reflexiva);*

(T) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(\forall z \in A)((((x, y) \in R)\&((y, z) \in R)) \Rightarrow ((x, z) \in R))$ *(propriedade transitiva);*

(S) $(\forall x \in A)(\forall y \in A)(((x, y) \in R) \Rightarrow (y, x) \in R)$ *(propriedade simétrica).*

Exemplo 2.77. *Seja A o conjunto de todas as retas coplanares e R a relação de paralelismo, ou seja, $R = \{(r,s) \in A \times A \mid r//s\}$. R é uma relação de equivalência. De fato, dadas quaisquer $r, s, t \in A$, tem-se:*

(R) $(\forall r \in A)(r//r)$;

(T) $(\forall r \in A)(\forall s \in A)(\forall t \in A)((r//s)\&(s//t) \Rightarrow (r//t))$;

(S) $(\forall r \in A)(\forall s \in A)(r//s \Rightarrow s//r)$;

Observação 2.78. *É bastante comum usar o símbolo $\sim$ para denotar uma relação de equivalência em um conjunto A qualquer. Também costumamos escrever $a \sim b$ para denotar $(a,b) \in \sim$. Lemos $a \sim b$ como "a é equivalente a b".*

Definição 2.79 (classe de equivalência). *Sejam A um conjunto, $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência em A e $a \in A$ um elemento. A **classe de equivalência de** a, que denotamos por $[a]$, é o conjunto de todos os elementos de A equivalentes a a, ou seja:*

$$[a] = \{b \in A \mid (a,b) \in R\}$$

Exemplo 2.80. *Com respeito ao **Exemplo 2.77**, dada uma reta $r \in A$,*

$$[r] = \{s \in A \mid r//s\}$$

Costumamos denominar a classe de equivalência acima como "a direção de r".

Definição 2.81 (conjunto quociente). *Sejam A um conjunto e $R \subseteq A \times A$ uma relação de equivalência em A. O **conjunto quociente de** A **por** R é o conjunto de todas as classes de equivalência:*

$$\frac{A}{R} = \{[x] \mid x \in A\}$$

Exemplo 2.82. *Quanto ao **Exemplo 2.77**, ao conjunto quociente:*

$$\frac{A}{R}$$

*denominamos **plano projetivo real**.*

Teorema 2.83. *Sejam A um conjunto e $R \subset A \times A$ uma relação de equivalência. Tem-se:*

(a) Todo elemento de A pertence a alguma classe de equivalência de A/R;

(b) Cada elemento de A pertence a uma única classe de equivalência de A/R, ou seja, se $a, b \in A$ forem tais que $(a,b) \notin R$, teremos $[a] \cap [b] = \varnothing$

Demonstração. Ad (a): [Estrutura da prova: prova direta] Como R é uma relação de equivalência, tem-se que R é, em particular, uma relação reflexiva. Desta forma, dado $a \in A$, obrigatoriamente tem-se $(a, a) \in R$, de modo que $a \in [a]$.

Ad (b): [Estrutura da prova: prova direta] Como R é uma relação de equivalência, tem-se que R é, em particular, uma relação transitiva e simétrica. De fato, se $x \in [a] \cap [b]$, tem-se $x \in [a]$ – de modo que $(x, a) \in R$ – e $x \in [b]$ – de modo que $(x, b) \in R$. Pela simetria de R, tem-se que $(x, a) \in R \Rightarrow (a, x) \in R$, e pela transitividade, segue que $((a, x) \in R) \& ((x, b) \in R)) \Rightarrow (a, b) \in R$. Decorre daí que $[a] = [b]$. □

2.4 Relações de Ordem: Supremo e Ínfimo

Para compreender diversos conceitos a respeito de métricas – como, por exemplo, para definirmos distâncias entre pontos e conjuntos – faremos frequente uso dos conceitos de supremo e de ínfimo. A fim de que este material seja auto-contido, dedicamos esta subseção a apresentar estes conceitos e algumas de suas propriedades.

Definição 2.84 (relação de ordem parcial). *Seja A um conjunto. Uma* relação de ordem parcial $\preceq$ *em A é uma relação entre elementos de A satisfazendo as seguintes condições:*

(PO1) $(\forall a \in A)(a \preceq a)$, *ou seja,* $\Delta(A) \subseteq \preceq$ (**reflexiva**);

(PO2) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)((a \preceq b) \& (b \preceq c) \Rightarrow (a \preceq c))$ (**transitiva**);

Lemos $a \preceq b$ como "a precede b".

Exemplo 2.85. *Seja A um conjunto não vazio. O par $(\wp(A), \subseteq)$ é um conjunto parcialmente ordenado. De fato, dado qualquer $X \in \wp(A)$ (isto é, $X \subseteq A$) tem-se $A \subseteq A$, e dados $X, Y, Z \in \wp(A)$, caso tenhamos $X \subseteq Y$ e $Y \subseteq Z$, teremos $X \subseteq Z$.*

Exemplo 2.86. *Considere o par $\mathfrak{N} = (\mathbb{N}, |)$,em que $| = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid (\exists q \in \mathbb{N})(n = m \cdot q)\}$. Denotamos $(m, n) \in |$ por $m|n$, o que lemos como "m divide n". Vamos verificar que $\mathfrak{N}$ é um conjunto parcialmente ordenado: de fato, como todo número natural divide a si próprio ($(\forall n \in \mathbb{N})(n|n)$) e, se $m, n, p \in \mathbb{N}$ são tais que $m|n$ e $n|p$, então $m|p$. De fato, como $m|n$, existe $q \in \mathbb{N}$ tal que $n = m \cdot q$, e como $n|p$, existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $p = r \cdot n$. Desta forma, $p = (r \cdot q) \cdot m$, donde $m|p$.*

Definição 2.87 (conjunto parcialmente ordenado). *Um* ***conjunto parcialmente ordenado*** *é um par, $(A, \preceq)$,em que A é um conjunto e $\preceq$ é uma ordem parcial em A.*

Seja $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto parcialmente ordenado. Dados dois elementos $a, b \in A$, dizemos que são **comparáveis** se ocorrer, pelo menos, uma das seguintes situações: $a \preceq b$ ou $b \preceq a$.

Exemplo 2.88. *No conjunto parcialmente ordenado dado no **Exemplo 2.85**, dado qualquer $X \in \wp(A)$, $\varnothing$ e X são comparáveis, uma vez que $\varnothing \subseteq X$.*

Exemplo 2.89. *No **Exemplo 2.86**, dados quaisquer primos distintos $p, q \in \mathbb{N}$, tem-se que p e q não são comparáveis, pois não ocorre $p|q$ nem $q|p$.*

Definição 2.90 (relação de ordem). *Dado um conjunto A, uma **relação de ordem** é uma ordem parcial $\preceq$ antissimétrica, ou seja, tal que vale:*

(O1) $(\forall a \in A)(a \preceq a)$;

(O2) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)(\forall c \in A)((a \preceq b)\&(b \preceq c) \Rightarrow (a \preceq c))$;

(O3) $(\forall a \in A)(\forall b \in A)((a \preceq b)\&(b \preceq a) \Rightarrow (a = b))$.

Exemplo 2.91. *Dado um conjunto A qualquer, $\subseteq$ é uma relação de ordem em $\wp(A)$, uma vez que segue do **Axioma da Extensionalidade** que $(A \subseteq B)\&(B \subseteq A) \Rightarrow (A = B)$.*

Definição 2.92 (conjunto ordenado). *Um **conjunto ordenado** é um par, $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$,em que A é um conjunto qualquer e $\preceq$ é uma relação de ordem em A.*

Definição 2.93 (conjunto totalmente ordenado). *Um **conjunto totalmente ordenado** é um par, $(A, \preceq)$,em que A é um conjunto e $\preceq$ é uma ordem em A na qual quaisquer dois elementos de A são comparáveis.*

Definição 2.94 (cota inferior). *Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado, $X \subseteq A$ e $a \in A$. Dizemos que a é uma **cota inferior de** X se:*

$$(\forall x \in X)(a \preceq x).$$

*Uma cota inferior, a, de X será denominada um **mínimo de** X caso $a \in X$, e neste caso escrevemos $a = \min X$.*

Em um conjunto ordenado $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$, dizemos que $X \subseteq A$ é **limitado inferiormente** se existir em A uma cota inferior de X.

Definição 2.95 (cota superior). *Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado, $X \subseteq A$ e $a \in A$. Dizemos que a é uma **cota superior de** X se:*

$$(\forall x \in X)(x \preceq a).$$

*Uma cota superior, a, de X será denominada um **máximo de** X caso $a \in X$, e neste caso escrevemos $a = \max X$.*

Em um conjunto ordenado $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$, dizemos que $X \subseteq A$ é **limitado superiormente** se existir em A uma cota superior de X.

Definição 2.96 (conjunto limitado). *Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado e $X \subseteq A$. Dizemos que X é um **conjunto limitado** se X admitir uma cota superior e uma cota inferior.*

Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado e $X \subseteq A$. Denotaremos por $\lambda(X)$ o conjunto de todas as cotas inferiores de X, ou seja:

$$\lambda(X) = \{a \in A \mid (\forall x \in X)(a \preceq x)\},$$

e denotaremos por $\Lambda(X)$ o conjunto de todas as cotas superiores de X, ou seja:

$$\Lambda(X) = \{a \in A \mid (\forall x \in X)(x \preceq a)\}.$$

Nestes termos, podemos enunciar as seguintes:

Definição 2.97 (ínfimo). *Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado e $X \subseteq A$ um conjunto limitado inferiormente. O **ínfimo** de X, denotado por $\inf X$, é a maior das cotas inferiores de X, ou seja:*

$$\inf X = \max \lambda(X).$$

Definição 2.98 (supremo). *Sejam $\mathfrak{A} = (A, \preceq)$ um conjunto ordenado e $X \subseteq A$ um conjunto limitado superiormente. O **supremo** de X, denotado por $\sup X$, é a menor das cotas superiores de X, ou seja:*

$$\sup X = \min \Lambda(X).$$

Neste texto frequentemente lidaremos com supremo e ínfimo de subconjuntos de $\mathbb{R}$. Assim, no que segue, consideraremos o conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$.

Exemplo 2.99. *O conjunto sem elementos, $\varnothing$, é limitado, por vacuidade.*

Exemplo 2.100. *Para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, qualquer intervalo da forma $]-\infty, a[$ ou $]-\infty, a]$ é limitado superiormente, mas não inferiormente. Todo intervalo da forma $[b, \infty[$ ou $]b, \infty[$ é limitado inferiormente, mas não superiormente. Finalmente, se $a < b$, então os intervalos $[a, b],]a, b],]a, b[, [a, b[$ são todos limitados (superior e inferiormente).*

Exemplo 2.101. *O conjunto:*

$$X = \left\{ \frac{x^2}{x^2+1} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$$

é limitado superiormente e inferiormente. De fato, para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$x^2 \leq x^2 + 1$$

de modo que:

$$\frac{x^2}{x^2+1} \leq 1,$$

e X é limitado superiormente.

Para ver que A é limitado inferiormente, basta observarmos que $0 \leq x^2 < x^2 + 1$, ou seja,

$$0 \leq \frac{x^2}{x^2+1}.$$

Assim,

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(0 \leq \frac{x^2}{x^2+1} \leq 1 \right)$$

donde segue que X é limitado.

Exemplo 2.102. *Qualquer conjunto finito de números reais é limitado. De fato, considere $F = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\} \subset \mathbb{R}$. Como $\mathbb{R}$ está totalmente ordenado, existe em F um elemento mínimo, que denotaremos por $\min(F)$ e um elemento máximo, que denotaremos por $\max(F)$. Tem-se, assim:*

$$(\forall x \in F)(\min F \leq x \leq \max F).$$

Abaixo apresentamos as caracterizações do supremo e do ínfimo de certos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que serão utilizadas frequentemente ao longo do curso.

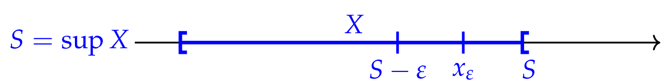
Teorema 2.103. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado superiormente, ou seja, tal que existe $K > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in X)(x \leq K).$$

O número real $S \in \mathbb{R}$ é o supremo de X se, e somente se:

(S1) $(\forall x \in X)(x \leq S)$;

(S2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)(S - \varepsilon < x_\varepsilon \leq S)$



Demonstração. Suponhamos satisfeitas as condições **(S1)** e **(S2)** e mostremos que S é a *menor* das cotas superiores. [Estrutura da prova: *consequentia mirabilis*: $(\neg\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$].

Seja S' uma cota superior de X e suponhamos $S' < S$. Tomando $\varepsilon = S - S' > 0$, existirá, por hipótese, $x_{S-S'} \in X$ tal que $S - \varepsilon = S' < x_\varepsilon \leq S$ – o que contradiz o fato de S' ser cota superior de X.

[Estrutura da prova: contraposição $((\alpha \rightarrow \beta) \leftrightarrow (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha))$] Reciprocamente, suponhamos que S seja o supremo de X. Por definição, S será uma cota superior, logo **(S1)** está automaticamente satisfeita. Basta mostrarmos que vale **(S2)**.

Suponhamos que dado $\varepsilon > 0$ tivéssemos, para todo $x \in X$, $x \leq S - \varepsilon$. Seguiria daí que $S - \varepsilon$ seria uma cota superior de X *menor* do que S, e haveria uma contradição com o fato de S ser a menor das cotas superiores. Assim, para todo $\varepsilon > 0$ existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $S - \varepsilon < x_\varepsilon < S$. □

Exemplo 2.104. *O conjunto $X = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x < 1\} = [0, 1[$ é não-vazio (por exemplo, $0 \in X$) e limitado superiormente (por exemplo, pelo número 1, uma vez que $(\forall x \in [0, 1[)(x < 1 \leq 1)$). Para determinarmos o supremo deste conjunto, devemos encontrar a menor de todas as cotas superiores. Vemos que todo número maior ou igual a 1 é cota superior de $[0, 1[$, o que nos sugere que a <u>menor</u> dessas cotas seja exatamente 1. Temos o seguinte "palpite":*

$$\sup[0, 1[= 1.$$

Vamos ver que este é mesmo o caso.

(S1) está satisfeita, pois conforme observamos acima, 1 é cota superior;

(S2) Vamos ter que demonstrar, agora, que se tirarmos qualquer quantia positiva $\varepsilon > 0$ de 1, por menor que seja essa quantia, $1-\varepsilon$ não é cota superior de $X = [0,1[$ (ou seja, nenhum número menor que 1 é cota superior de X). De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, há (pelo menos) um elemento $x_\varepsilon \in [0,1[$ que "testemunha" que $1-\varepsilon$ não é cota superior: basta tomarmos o ponto médio entre $1-\varepsilon$ e 1, ou seja, basta tomarmos:

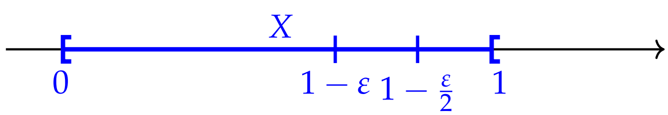
$$x_\varepsilon = 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Temos, assim,

$$1-\varepsilon < 1 - \frac{\varepsilon}{2} = x_\varepsilon < 1.$$

Como este argumento pode ser replicado para qualquer $\varepsilon > 0$, tem-se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in [0,1[)(1-\varepsilon < x_\varepsilon < 1), \ \textit{e vale (S2).}$$



O teorema a seguir pode ser provado de modo análogo à prova do **Teorema 2.103**:

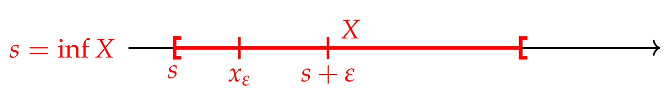
Teorema 2.105. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um conjunto limitado inferiormente, ou seja, tal que existe $K > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in X)(K \leq x).$$

O número real $s \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de X se, e somente se:

(I1) $(\forall x \in X)(s \leq x)$;

(I2) $(\forall \varepsilon > 0)(\exists x_\varepsilon \in X)(s \leq x_\varepsilon < s + \varepsilon)$



Proposição 2.106. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos limitados superiormente. Se $A \subseteq B$, então $\sup A \leq \sup B$.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta. A ideia é demonstrar que $\sup B$ é uma cota superior para A, e como $\sup B$ é a *menor* de todas as cotas superiores de B, seguirá que $\sup B \leq \sup A$.]

Seja $x_0 = \sup B$, de modo que, em particular, $(\forall b \in B)(b \leq x_0)$. Note que como $A \subseteq B$, tem-se $a \in A \Rightarrow a \in B$, e portanto:

$$(\forall a \in A)(a \leq x_0),$$

sendo x_0 uma cota superior para A. Por definição, $\sup A$ é a *menor* de todas as cotas superiores de A, de modo que:

$$\sup A \leq x_0 = \sup B.$$

□

Proposição 2.107. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos limitados inferiormente. Se $A \subseteq B$, então $\inf B \leq \inf A$.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta. A ideia é demonstrar que $\inf B$ é uma cota inferior para A, de modo que como $\inf A$ é, por definição, a *maior* das cotas inferiores, seguirá que $\inf B \leq \inf A$.]

Seja $x_0 = \inf B$, de modo que, em particular, $(\forall b \in B)(x_0 \leq a)$. Note que como $A \subseteq B$, tem-se $a \in A \Rightarrow a \in B$, e portanto:

$$(\forall a \in A)(x_0 \leq a),$$

sendo x_0 uma cota inferior para A. Por definição, $\inf A$ é a *maior* de todas as cotas inferiores de A, de modo que:

$$\inf B \leq \inf A.$$

□

Proposição 2.108. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ não vazios. Se:*

$$(\forall a \in A)(\forall b \in B)(a \leq b),$$

então:

$$\sup A \leq \inf B$$

Demonstração. [Ideia da prova: desdobramento natural das definições] De fato, por hipótese, cada $b \in B$ é uma cota superior para A. Como $\sup A$ é a *menor* das cotas superiores de A, segue-se que para todo $(\forall b \in B)(\sup A \leq b)$.

Decorre da discussão acima, portanto, que $\sup A$ é uma cota inferior para B, e como $\inf B$ é a *maior* das cotas inferiores de B, segue que:

$$\sup A \leq \inf B.$$

□

Proposição 2.109. *Sejam $A, B \subseteq \mathbb{R}$ conjuntos limitados superiormente. Seja:*

$$A + B = \{a + b \mid (a \in A)\&(b \in B)\}$$

Então:

$$\sup(A + B) = \sup A + \sup B$$

Demonstração. [Ideia da prova: aplicação direta do **Teorema 2.103**] De fato, sejam $\alpha = \sup A$ e $\beta = \sup B$. Mostraremos que $\alpha + \beta$ é a menor das cotas superiores de $A + B$.

Seja $\gamma \in A + B$ qualquer, de modo que existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $\gamma = a + b$. Temos certamente $a \leq \alpha$ e $b \leq \beta$, de onde segue que:

$$\gamma = a + b \leq \alpha + \beta = \sup A + \sup B$$

de modo que $\alpha + \beta$ é uma cota superior para $A + B$.

Dado $\varepsilon > 0$, mostremos que $(\alpha + \beta) - \varepsilon$ *não* é cota superior de $A + B$.

De fato, podemos escrever $(\alpha + \beta) - \varepsilon = \left(\alpha - \frac{\varepsilon}{2}\right) + \left(\beta - \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Uma vez que α é supremo de A, $\alpha - \frac{\varepsilon}{2}$ *não* é cota superior de A, de modo que existe $a_{\frac{\varepsilon}{2}} \in A$ tal que $\alpha - \frac{\varepsilon}{2} < a_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \alpha$. Analogamente, como β é supremo de B, $\beta - \frac{\varepsilon}{2}$ *não* é cota superior de B, de modo que existe $b_{\frac{\varepsilon}{2}} \in B$ tal que $\beta - \frac{\varepsilon}{2} < b_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \beta$. Desta forma, tem-se $\gamma_{\frac{\varepsilon}{2}} = a_{\frac{\varepsilon}{2}} + b_{\frac{\varepsilon}{2}} \in A + B$ tal que:

$$(\alpha + \beta) - \varepsilon < \alpha_{\frac{\varepsilon}{2}} + \beta_{\frac{\varepsilon}{2}} \leq \alpha + \beta$$

Logo, nenhum número menor do que $\alpha + \beta$ é cota superior de $A + B$. Segue, portanto, que $\alpha + \beta$ é a *menor das cotas superiores* de $A + B$, ou seja, $\sup(A + B) = \alpha + \beta$. □

Convém registrar alguns fatos sobre o conjunto ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$:

Axioma 2.110 (Axioma do Supremo). *Existe um corpo ordenado, que denotamos por $\mathbb{R}$, que contém $\mathbb{Q}$ enquanto subcorpo, tal que todo conjunto $X \subset \mathbb{R}$ não vazio limitado superiormente admite supremo em $\mathbb{R}$.*

Segue diretamente do axioma acima o seguinte:

Teorema 2.111. *Se $X \subset \mathbb{R}$ é não-vazio e limitado inferiormente, então X admite ínfimo em $\mathbb{R}$.*

Demonstração. Considere o conjunto:

$$-X = \{-x \mid x \in X\}.$$

Uma vez que X é limitado inferiormente, existe $N \in \mathbb{R}$ tal que:

$$(\forall x \in X)(N \leq x)$$

e portanto:

$$(\forall x \in X)(-x \leq -N),$$

de modo que $-X$ é limitado superiormente. Como $X \neq \varnothing$, segue que $-X \neq \varnothing$, e pelo **Axioma do Supremo** existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup(-X)$.

Afirmamos que $\inf X = -\alpha$.

De fato, como α é cota superior para $-X$ tem-se, para todo $x \in X$:

$$-x \leq \alpha$$

donde:

$$-\alpha \leq x,$$

e portanto $-\alpha$ é cota inferior para X (i.e., vale (I1)).

Para qualquer $\varepsilon > 0$, como $\alpha = \sup(-X)$, existe $x_\varepsilon \in X$ tal que $\alpha - \varepsilon < -x_\varepsilon \leq \alpha$, ou, equivalentemente:

$$-\alpha \leq x_\varepsilon < -\alpha + \varepsilon$$

e vale (I2). Logo $-\alpha = \inf X$. □

Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$ (versão 1): Se $x > 0$ e y são dois números reais quaisquer, então existe pelo menos um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot x > y$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que para todo $n \in \mathbb{N}$ tenhamos $nx \leq y$; consideremos então o conjunto:

$$A = \{n \cdot x \mid n \in \mathbb{N}\}.$$

A certamente não é vazio, uma vez que $1 \in A$ (pois $1 \cdot x = x \in A$), e é limitado superiormente por y. Pelo **Axioma do Supremo**, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $\alpha = \sup A$. Como $x > 0$, $\alpha - x < \alpha$; assim, $\alpha - x$ não é cota superior de A (por ser menor que o supremo). Logo, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\alpha - x < m \cdot x$$

e daí segue que:

$$\alpha < (m+1) \cdot x,$$

o que é um absurdo, pois α é o supremo de A e $(m+1) \cdot x \in A$. Deste modo, supor que $(\forall n \in \mathbb{N})(n \cdot x \leq y)$ nos leva a um absurdo. Logo deve existir $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \cdot x > y$. $\square$

Teorema 2.112 (Propriedade Arquimediana de $\mathbb{R}$ (versão 2)). *Em $\mathbb{R}$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$0 < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$$

Demonstração. Consideremos, na **Propriedade Arquimediana (versão 1)**, x como sendo ε e y como sendo 1. Assim, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n_0 \cdot \varepsilon > 1,$$

ou seja,

$$\varepsilon > \frac{1}{n_0}.$$

$\square$

Note que o fato de considerarmos X como subconjunto de $\mathbb{R}$ é essencial para garantir a existência do supremo (que é um elemento do conjunto no qual X está imerso). A propriedade dada pelo **Axioma do Supremo** não é válida, em geral, se não estivermos trabalhando em $\mathbb{R}$. Consideremos o seguinte exemplo que nos ilustra que em $\mathbb{Q}$, nem todo conjunto não vazio e limitado superiormente admite supremo em $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.113. *Considere:*

$$X = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 < 2\} \subset \mathbb{Q}.$$

Note que X é limitado superiormente, pois o número 2 é uma cota superior para X. Com efeito, se $x^2 < 2$ então, em particular, $x < 2$.

Observe, também, que $X \neq \varnothing$, pois $1 \in X$.

Vamos demonstrar que embora este conjunto seja não vazio e limitado em $\mathbb{Q}$, X não admite supremo em $\mathbb{Q}$.

Faremos isto decompondo $\mathbb{Q}$ como reunião de dois subconjuntos, a saber, X e $\mathbb{Q} \setminus X$.

Afirmação (1): *Nenhum elemento de X é supremo de X;*

Com efeito, para todo $d \in X$, mostraremos que existe $h > 0$ tal que $d + h \in X$ - de modo que nenhum elemento de X é cota superior de X e, muito menos o supremo de X.

Dado qualquer número racional $d \in X$, ou seja, tal que $d^2 < 2$, é sempre possível obter um número racional $d + h$, com h número racional positivo, tal que $(d + h)^2 < 2$. Esta desigualdade se verifica se, e somente se:

$$d^2 + 2dh + h^2 < 2,$$

ou seja, se, e somente se:

$$2dh + h^2 < 2 - d^2.$$

Note que como $d \in X$, $2 - d^2 > 0$. Assim, a desigualdade anterior fica:

$$h \cdot (2d + h) < 2 - d^2,$$

ou seja:

$$h < \frac{2 - d^2}{2d + h}.$$

Como $h < 1$, segue que $2d + h < 2d + 1$ e que:

$$\frac{2 - d^2}{2d + 1} < \frac{2 - d^2}{2d + h},$$

de modo que se exigirmos que:

$$0 < h < \frac{2 - d^2}{2d + 1}$$

teremos, consequentemente, $h < (2 - d^2)/(2d + h)$ e, portanto $(d + h)^2 < 2$.

Afirmação (2): *Nenhum elemento de $\mathbb{Q} \setminus X$ é a <u>menor</u> das cotas superiores de X;*

Seja $\alpha \in \mathbb{Q} \setminus X$, de modo que α é uma cota superior para X. Mostraremos que existe $\varepsilon > 0$ tal que $\alpha - \varepsilon$ ainda é cota superior para X.

Um tal $\varepsilon > 0$ deverá ser tal que $2 < (\alpha - \varepsilon)^2$, ou seja, tal que:

$$2 < \alpha^2 - 2\alpha\varepsilon + \varepsilon^2,$$

e como $\alpha^2 > 2$, segue que:

$$2\alpha\varepsilon - \varepsilon^2 < \alpha^2 - 2$$

$$(2\alpha - \varepsilon) \cdot \varepsilon < \alpha^2 - 2$$

e portanto bastaria tomarmos ε satisfazendo:

$$\varepsilon < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha - \varepsilon}.$$

Como $\varepsilon > 0$, tem-se $2\alpha - \varepsilon < 2\alpha$ e, assim:

$$\frac{1}{2\alpha} < \frac{1}{2\alpha - \varepsilon}$$

$$\frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha} < \frac{\alpha^2 - 2}{2\alpha - \varepsilon}$$

Basta, portanto, tomarmos $\varepsilon = \dfrac{\alpha^2 - 2}{2\alpha}$, e teremos que $(\alpha - \varepsilon)$ ainda é cota superior de X - de modo que α não é a menor das cotas superiores de X e, muito menos o supremo de X.

*Das afirmações **(1)** e **(2)** segue que nenhum elemento de $X \cup (\mathbb{Q} \setminus X) = \mathbb{Q}$ pode ser supremo de X. Logo, embora $X \subseteq \mathbb{Q}$ seja não vazio e limitado superiormente, X **não admite supremo em** $\mathbb{Q}$.*

Vamos, agora, comparar os dois conjuntos ordenados $\mathfrak{R} = (\mathbb{R}, \leq)$ e $\mathfrak{Q} = (\mathbb{Q}, \leq)$. Observe que ambos, $\mathbb{R}$ e $\mathbb{Q}$ têm a relação de ordem compatível com a estrutura de corpo. Isto significa que, para $\mathbb{K} \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$ tem-se:

$$a \leq b \Rightarrow (\forall c \in \mathbb{K})(a + c \leq b + c)$$

$$(0 < a)\&(0 < b) \Rightarrow (0 < a \cdot b),$$

onde $+$, $\cdot$ e 0 são, respectivamente, as operações de soma, produto e o elemento neutro da soma do corpo $\mathbb{K}$.

A relação de ordem, tanto em $\mathbb{Q}$ quanto em $\mathbb{R}$, é total, ou seja, para quaisquer dois números racionais p e q, podemos sempre afirmar que $p \leq q$ ou que $q \leq p$, e para quaisquer dois números reais r e s, podemos sempre afirmar que $r \leq s$ ou $s \leq r$.

As relações de ordem em $\mathbb{R}$ e em $\mathbb{Q}$ são densas: isto significa que, dados quaisquer $r, s \in \mathbb{R}$ tais que $r \neq s$ e $r \leq s$, existe $t \in \mathbb{R}$ tal que $r \leq t \leq s$, e dados quaisquer $p, q \in \mathbb{Q}$ tais que $p \neq q$, existe algum $u \in \mathbb{Q}$ tal que $p \leq u \leq q$.

O **Axioma do Supremo** vem, portanto, distinguir $\mathbb{R}$ de $\mathbb{Q}$, uma vez que todo conjunto não-vazio e limitado superiormente em $\mathbb{R}$ admite supremo em $\mathbb{R}$ mas nem todo conjunto não-vazio limitado superiormente em $\mathbb{Q}$ admite um supremo em $\mathbb{Q}$. Isto é o que nos dá a continuidade (no sentido de ausência de lacunas) do conjunto dos números reais.

Capítulo 3

Espaços Métricos

3.1 Motivação: o que é distância?

Conforme apontado por G. Loibel em [**Loi**], um dos conceitos mais importantes da Matemática utilizado também em muitas outras ciências e na tecnologia é a noção de *função contínua*. Nos cursos de Cálculo, ela geralmente se apresenta da seguinte forma:

> Sejam $A \subseteq \mathbb{R}^n$, $\vec{x_0} = (x_1, \cdots, x_n) \in A$. Dizemos que $f : A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ é **contínua em** $\vec{x_0}$ se, dado $\varepsilon > 0$, for possível tomar $\delta > 0$ tal que para todo $\vec{x} \in A$, cuja distância até $\vec{x_0}$ seja *menor* do que δ, tenha-se que a distância de $f(\vec{x})$ a $f(\vec{x_0})$ seja menor do que ε.

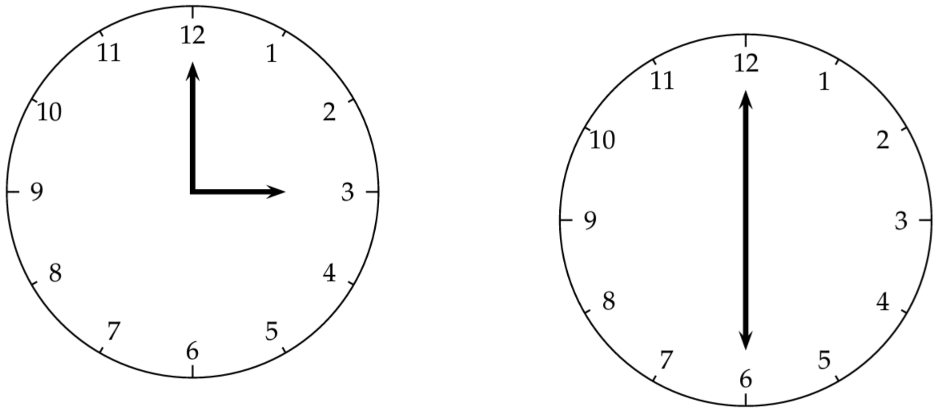
Coloquialmente, podemos dizer que "f é contínua em $\vec{x_0}$ se, a fim de se obter valores de $f(\vec{x})$ **arbitrariamente próximos** de $f(\vec{x_0})$, bastar escolher $\vec{x}$ **suficientemente próximo** de $\vec{x_0}$."

A distância entre dois pontos de $\mathbb{R}^n$ geralmente é medida pela "distância euclidiana", que generaliza a expressão da distância da Geometria Analítica plana ou espacial em coordenadas ortogonais.

No entanto, não utilizamos locuções deste tipo somente no caso de funções definidas e com valores em espaços euclidianos. Considere os seguintes exemplos, apresentados por G. Loibel em [**Loi**]:

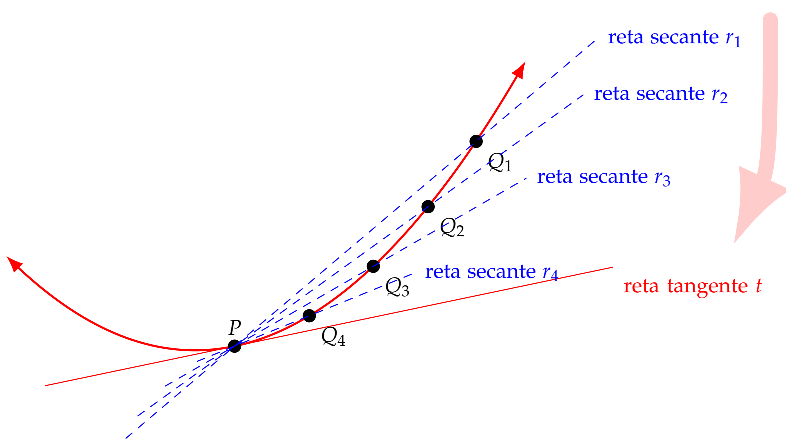
Exemplo 3.1. *Você concordará facilmente com a afirmação de que "às 3 horas os ponteiros de um relógio estão mais próximos entre si do que às 6 horas", ou que"conforme chega meio-dia, o ponteiro dos minutos aproxima-se arbitrariamente do ponteiro das horas."*

Uma formulação matemática mais precisa da primeira das afirmações do exemplo acima seria dizer "duas semirretas perpendiculares estão mais próximas entre si do que duas que



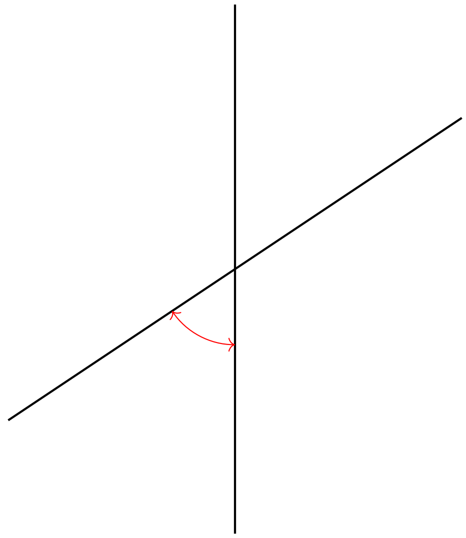
formam um ângulo raso.” A distância entre as semirretas seria, então, medida, pelo *menor* ângulo entre elas.

Exemplo 3.2. *Seja* Γ *uma curva e seja* P *um de seus pontos. Seja* Q *um ponto variável de* Γ. *Para cada* $Q_i \neq P$, *consideremos a reta secante* $r_i = PQ_i$. *Costuma-se dizer que “quando* Q_i *tende a* P, *a reta secante* r_i *tende à reta tangente,* t, *a* Γ *no ponto* P*”, ou então que “para que a secante* PQ_i *fique arbitrariamente próxima da tangente* t, *basta que* Q_i *esteja suficientemente próximo de* P*”.*



No exemplo acima, a distância entre P e Q_i é, novamente, medida pela distância euclidiana. No entanto, o que significa dizer que “a reta r_i está próxima da reta t”?

É claro que para qualquer que seja o ponto ponto $Q_i \neq P$, a reta r_i correspondente corta a reta t no ponto P e, portanto, encontramos nela pontos arbitrariamente afastados da reta t e, reciprocamente, em t existem pontos arbitrariamente distanciados de r_i. Devemos, portanto, medir a *proximidade* das retas, mas não pela proximidade de seus pontos. Usa-se, neste caso, a medida do ângulo (em graus ou radianos, por exemplo).



Exemplo 3.3. *Seja K o conjunto das circunferências de um plano: podemos convencionar que uma circunferência variável Γ se aproxima de uma outra circunferência fixa Δ se, ao mesmo tempo, o centro da primeira se aproxima do centro da segunda e o valor do raio de Γ, r, se aproxima do valor do raio de Δ, s. Dessa forma, podemos definir a distância entre as duas circunferências como a soma da distâncias entre seus centros com o número $|r - s|$.*

Exemplo 3.4. *Seja $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ o conjunto de todas as sequências de números reais. Dadas duas sequências de números reais, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a função:*

$$d\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \cdot \frac{|x_n - y_n|}{1 + |x_n - y_n|}$$

define uma métrica *em $\mathbb{R}^n$.*

Exemplo 3.5. *Seja $M \subseteq \mathbb{R}^n$ um conjunto. Suponhamos que dois quaisquer dos pontos de M possam ser unidos por, pelo menos, um caminho poligonal. Vamos definir em M uma métrica d da seguinte forma: dados $P, Q \in M$, considere o conjunto:*

$$\mathcal{C}_{PQ} = \{\ell(C_{PQ}) \mid C_{PQ} \text{ é um caminho poligonal unindo } P \text{ e } Q\}$$

onde $\ell(C_{PQ})$ é o comprimento do caminho poligonal C_{PQ}. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (P, Q) & \mapsto & \inf \mathcal{C}_{PQ} \end{array}$$

Verificaremos que d, definida acima, é uma métrica.

Como $\mathcal{C}_{PQ}$ é limitado inferiormente pela distância euclidiana entre P e Q, segue que $d(P, Q) > 0$ sempre que $P \neq Q$. A propriedade simétrica é trivial. Quanto à desigualdade triangular, observamos o seguinte: dados P, Q e R, para cada caminho unindo P e Q e cada caminho de Q a R podemos considerar *o caminho poligonal composto que vai de* P *a* R*, cujo comprimento é a soma dos comprimentos dos dois anteriores; isso mostra que* $d(P,R)$ *não pode exceder* $d(P,Q)+d(Q,R)$*. É claro que* $d(P,R)$ *pode ser menor do que a soma, pois podem existir caminhos poligonais de* P *a* R *que não passam por* Q*.*

3.2 O que é um espaço métrico?

A Topologia é a disciplina que tem por finalidade estudar conjuntos dotados de uma estrutura onde façam sentido conceitos como "vizinhança" ou "proximidade" – de modo que nestes conjuntos se possa conceituar "continuidade". Isto permite conceituar operações com limites e continuidade. Uma das maneiras mais naturais de se introduzir estes conceitos é assumir a existência de uma função que, a cada par de pontos, associa uma distância entre esses pontos. Conjuntos munidos de uma tal estrutura são denominados os "espaços métricos".

3.3 O que é uma métrica?

Uma vez que um espaço métrico será um conjunto munido de uma noção de distância, convém introduzirmos a definição precisa de "métrica":

Definição 3.6 (métrica). *Seja M um conjunto. Uma* ***métrica*** *é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

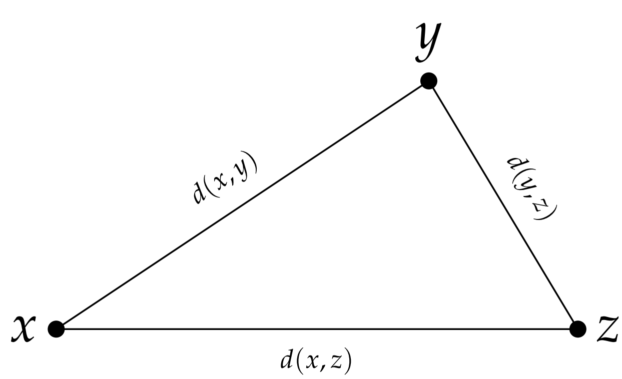
que satisfaz as seguintes propriedades:

(M1) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d(x,y) = 0 \leftrightarrow (x = y))$;

(M2) $(\forall x \in M)(\forall y \in N)(d(x,y) = d(y,x))$;

(M3) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)(d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z))$.

Denominamos as propriedades **(M1)** *(originalmente, "Koinzidenzaxiom") por positividade definida,* **(M2)** *por "****simetria****" (originalmente, "Symmetrieaxiom") e* **(M3)** *é denominada a "****desigualdade triangular****" (originalmente, "Dreiecksaxiom").*



Esta não é a única definição de métrica. Temos o seguinte:

Teorema 3.7. *Sejam M um conjunto e:*

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \to & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

uma função tal que:

(i) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d(x,y) = 0 \iff (x = y))$;

(ii) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)(d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y))$

A relação $d' = \{((x,y), d(x,y)) \in (M \times M) \times \mathbb{R}_+ \mid (x \in M)\&(y \in M)\}$ *é uma função, e*

$$\begin{array}{rccc} d': & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

é uma métrica.

Demonstração. A relação d' é, evidentemente, unívoca, uma vez que d é uma função. Resta-nos apenas verificar que d' é uma relação total, ou seja, que a todo par $(x,y) \in M \times M$ corresponde um número real não negativo (ou seja, um elemento do contradomínio que, neste caso, é $\mathbb{R}$, e não $\mathbb{R}_+$).

Dado qualquer par $(x,y) \in M \times M$, fazendo $x = z$ no item *(ii)* tem-se:

$$0 = d(x,x) \leq d(x,y) + d(x,y) = 2 \cdot d(x,y)$$

ou seja,

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(0 \leq d(x,y))$$

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(0 \leq d'(x,y))$$

Assim, d' é uma função e satisfaz **(M1)** (pois satisfaz *(i)*).

Note que, tomando $x = y$ em *(ii)*, segue que:

$$(\forall y \in M)(\forall z \in M)(d(y,z) \leq d(z,y))$$

Desta forma valem, para quaisquer $w, t \in M$:

$$d(w,t) \leq d(t,w), \text{ fazendo } w = y \text{ e } t = z \tag{3.1}$$

e

$$d(t,w) \leq d(w,t), \text{ fazendo } t = y \text{ e } w = z \tag{3.2}$$

De (3.1) e (3.2), segue que:

$$(\forall w \in M)(\forall t \in M)(d'(w,t) = d'(t,w)).$$

Finalmente, segue da propriedade **(M2)** que acabamos de demonstrar e de *(ii)* que:

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)(d'(x,z) \leq d'(x,y) + d'(y,z)).$$

Assim, d' é uma métrica sobre M. □

Definição 3.8 (espaço métrico). *Um **espaço métrico** $\mathcal{M}$ é um par:*

$$\mathcal{M} = (M, d : M \times M \to \mathbb{R}_+),$$

em que M é um conjunto qualquer e $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ é uma métrica sobre M.

Exemplo 3.9. *Em $\mathbb{R}$ temos a função:*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$$

que é uma métrica em $\mathbb{R}$, denominada "a métrica usual" de $\mathbb{R}$. Verifique que d é, de fato, uma métrica, ou seja, que d satisfaz **(M1)**, **(M2)** *e* **(M3)**.

Nos espaços vetoriais $\mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, temos, no mínimo, três generalizações dessa métrica.

Exemplo 3.10 (métrica euclidiana). *Consideremos a função:*

$$\begin{array}{rccc} d_E: & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} \end{array}$$

Vamos verificar que esta função é uma métrica.

(M1): *Sejam $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ pontos tais que $d_E((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = 0$, de modo que:*

$$\sqrt{(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2} = 0$$

Elevando os dois membros da igualdade acima ao quadrado, segue que:

$$(x_1-y_1)^2 + \cdots + (x_n-y_n)^2 = 0$$

Disto decorre que $x_1 - y_1 = 0, \cdots, x_n - y_n = 0$, logo $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$. A recíproca vale trivialmente.

(M2): *Dados* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *temos:*

$$d_E((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2} =$$

$$\sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2} = d_E((y_1, \cdots, y_n), (x_1, \cdots, x_n))$$

(M3): *Consideremos um terceiro ponto,* $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^3$, *e os números* $a_i = x_i - y_i, b_i = y_i - z_i, i \in \{1, \cdots, n\}$. *Temos assim, para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$, $a_i + b_i = x_i - z_i$. *Demonstrar que vale a desigualdade triangular é, portanto, equivalente a demonstrar que:*

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

Para verificarmos a veracidade desta desigualdade, basta verificarmos que ao elevar os dois membros ao quadrado temos uma desigualdade válida. Fazendo isto, obtemos:

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i + \sum_{i=1}^{n} b_i^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 2\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

que será válida se, e somente se:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \cdot b_i \leq \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

que é a conhecida ***Desigualdade de Schwarz****.*

Por satisfazer (M1), (M2) e (M3), segue que d_E *é uma métrica. Nós costumamos nos referir a esta métrica como a "métrica euclidiana".*

Exemplo 3.11 (métrica do taxista). *Consideremos a função:*

$$\begin{array}{cccc} d_T : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| \end{array}$$

Verifiquemos que d_T *é uma métrica.*

(M1): *Dados* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *tais que:*

$$d_T((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = 0$$

$$|x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = 0$$

A soma de números não negativos é zero se, e somente se, todos os números já forem zero, ou seja:

$$|x_1 - y_1| = 0, \cdots, |x_n - y_n| = 0,$$

de modo que $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$*, e portanto* $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$.

(M2): *Como, para qualquer* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *tem-se* $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$*, vale:*

$$d_T((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = |x_1 - y_1| + \cdots + |x_n - y_n| = |y_1 - x_1| + \cdots + |y_n - x_n| =$$

$$= d_T((y_1, \cdots, y_n), (x_1, \cdots, x_n)).$$

(M3): *Sejam* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*. A desigualdade triangular segue diretamente do fato de que, dado qualquer* $(z_1, \cdots, z_n) \in \mathbb{R}^n$*, para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *vale:*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

De fato, daí segue que:

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i| \leq \sum_{i=1}^{n} |x_i - z_i| + \sum_{i=1}^{n} |z_i - y_i|$$

$$d_T((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \leq d_T((x_1, \cdots, x_n), (z_1, \cdots, z_n)) + d_T((z_1, \cdots, z_n), (y_1, \cdots, y_n))$$

Como d_T *satisfaz (M1), (M2) e (M3), segue que* d_T *é uma métrica, denominada a "métrica do taxista".*

Exemplo 3.12 (métrica do máximo). *Considere a seguinte função:*

$$\begin{array}{rccc} d_M : & \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} \end{array}$$

Verifiquemos que d_M *é uma métrica.*

(M1): *Sejam* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ *tais que* $d_M((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = 0$*. Então* $\max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} = 0$*. Como* $\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \cdots, n\}\}$ *é um conjunto de números não negativos, isto implica que para* todo $i \in \{1, \cdots, n\}$ *temos* $|x_i - y_i| = 0$*, de modo que* $x_1 = y_1, \cdots, x_n = y_n$*, e portanto* $(x_1, \cdots, x_n) = (y_1, \cdots, y_n)$.

(M2): *Dados* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$*, temos, para todo* $i \in \{1, \cdots, n\}$*,* $|x_i - y_i| = |y_i - x_i|$*, de modo que:*

$$d_M((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) = \max\{|x_i - y_i| \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} =$$

$$= \max\{|y_i - x_i| \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} = d_M((y_1, \cdots, y_n), (x_1, \cdots, x_n))$$

(M3): *Finalmente, dados* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)$ *e* $(z_1, \cdots z_n)$ *em* $\mathbb{R}^n$*, temos, para qualquer* $i \in \{1, \cdots, n\}$*:*

$$|x_i - y_i| \leq |x_i - z_i| + |z_i - y_i|$$

donde segue que:

Observe que sempre vale, para quaisquer $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ e $\vec{y} = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$d_M(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_T(\vec{x}, \vec{y}) \leq d_E(\vec{x}, \vec{y}) \leq n \cdot d_M(\vec{x}, \vec{y})$$

Para o caso de $n = 2$, consideremos o caso de dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2) que têm ambas as coordenadas distintas. Juntamente com o ponto (y_1, x_2), (x_1, y_1) e (x_2, y_2) determinam um triângulo retângulo, do qual $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ mede a hipotenusa, $d_T((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ mede a soma dos catetos e $d_M((x_1, y_1), (x_2, y_2))$ mede o maior dos catetos. Neste caso, as desigualdades se interpretam facilmente.

Exemplo 3.13 (**métrica discreta**, ou **métrica zero-um**). *Seja* X *um conjunto qualquer, e defina em* X *a seguinte função:*

$$\begin{array}{rrcl} d_D: & X \times X & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} 1, & se \ \ x \neq y \\ 0, & se \ \ x = y \end{cases} \end{array}$$

Definição 3.14 (**norma**). *Neste exemplo, seja* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$*. Recorde que, dado um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial* $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{K}})$*, uma* ***norma*** *em* V *é uma função:*

$$\begin{array}{rrcl} \| \cdot \|: & V & \to & \mathbb{R}_+ \\ & v & \mapsto & \|v\| \end{array}$$

que satisfaz as seguintes condições:

(N1) $(\forall v \in V)(\|v\| = 0 \leftrightarrow v = 0)$

(N2) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall v \in V)(\|\lambda \cdot_{\mathbb{K}} v\| = |\lambda| \|v\|)$

(N3) $(\forall u \in V)(\forall v \in V)(\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|)$

Exemplo 3.15 (**espaços vetoriais normados**). *Seja* $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{K}}, \| \cdot \|)$ *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial normado. Podemos dotar* V *da estrutura de espaço métrico definindo a seguinte função:*

$$\begin{array}{rrcl} d_{\| \cdot \|}: & V \times V & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (\vec{u}, \vec{v}) & \mapsto & \|\vec{u} - \vec{v}\| \end{array}$$

Verificaremos que $d_{\|\cdot\|}$ é uma métrica.

(M1): *Sejam $x, y \in V$ quaisquer tais que $d_{\|\cdot\|}(x,y) = 0$, ou seja, tais que $\|x-y\| = 0$. Da propriedade* **(N1)** *segue que $x - y = 0$, de modo que $x = y$.*

(M2): *Sejam $x, y \in V$ quaisquer. Tem-se:*

$$d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x-y\| = \|-(y-x)\| = |-1|\|y-x\| = \|y-x\| = d_{\|\cdot\|}(y,x).$$

(M3): *Dados $x, y, z \in V$ quaisquer, tem-se, por* **(N3)**:

$$d_{\|\cdot\|}(x,z) = \|x-z\| = \|x-y+y-z\| \leq \|x-y\| + \|y-z\| = d_{\|\cdot\|}(x,y) + d_{\|\cdot\|}(y,z)$$

*Assim, a toda norma $\|\cdot\|$ em um espaço vetorial está associada uma métrica, $d_{\|\cdot\|}$, denominada "**a métrica associada com a norma** $\|\cdot\|$".*

Definição 3.16 (métrica induzida). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $N \subseteq M$. Podemos definir em N a **métrica induzida** $d_N = d \restriction_{N \times N}$:*

$$\begin{array}{rccc} d_N : & N \times N & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

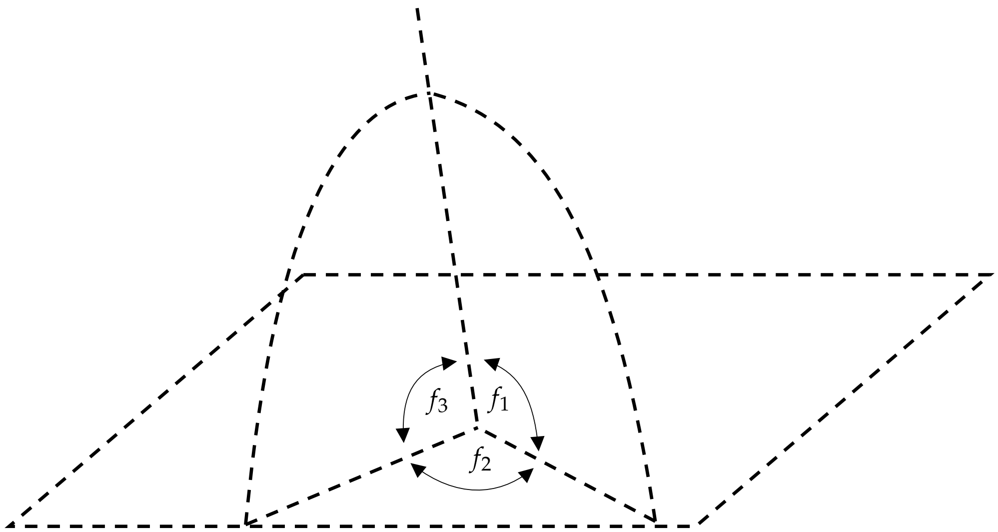
*Neste caso, dizemos que (N, d_N) é **subespaço métrico** do espaço (M, d).*

$$\begin{tikzcd} M \times M \arrow[r, "d"] & \mathbb{R}_+ \\ N \times N \arrow[u, "\iota_{N\times N}^{M\times N}"] \arrow[ur, "d_N"'] & \end{tikzcd}$$

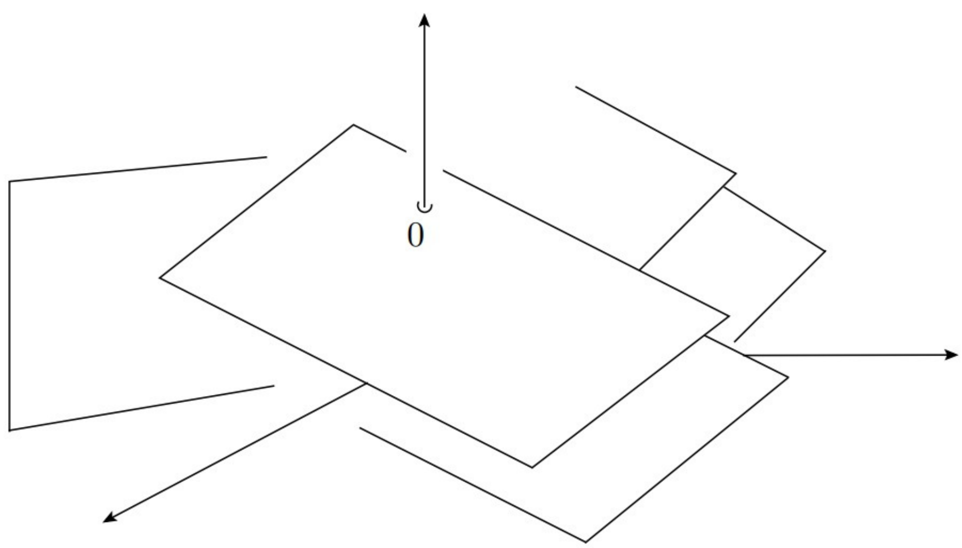
Exemplo 3.17 (estrela de retas de centro O). *A **estrela de retas de centro** O, $E = E_0$ no espaço tridimensional é o conjunto de todas as retas que passam por O. Definimos a distância entre duas retas como sendo o menor ângulo entre estas. As propriedades* **(M1)** *e* **(M2)** *são imediatas. A desigualdade triangular é obtida mediante o seguinte teorema da Geometria Elementar: "num triedro, a medida do ângulo da face maior é menor que a soma das medidas dos ângulos das outras faces". Enunciamos este teorema em seguida:*

Teorema 3.18. *Em todo triedro, qualquer face é menor que a soma das outras duas. Assim, , sendo f_1, f_2 e f_3 as faces de um triedro, temos:*

$$\begin{cases} f_1 < f_2 + f_3 \\ f_2 < f_1 + f_3 \\ f_3 < f_1 + f_2 \end{cases}$$



Exemplo 3.19 (estrela de planos). *O conjunto de todos os planos passando por um ponto O do espaço é uma **estrela de planos**. Podemos usar o ângulo entre dois planos como a distância. Para tal, basta medirmos o ângulo entre as perpendiculares a estes pontos.*



Exemplo 3.20. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{K}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial com produto interno. Seja, ainda, $H(\mathcal{V})$ o conjunto de todos os subespaços de codimensão 1 de $\mathcal{V}$. O complemento ortogonal de um hiperplano é um subespaço de dimensão 1. Isto nos permite introduzir em $H(\mathcal{V})$ uma métrica medindo a distância de dois hiperplanos pela distância entre seus complementos ortogonais.*

Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Em $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, considere a seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \iff (\exists k \in \mathbb{K})((k \neq 0) \& (y = kx))$$

Definição 3.21 (plano projetivo). *O **plano projetivo** é o conjunto das classes de equivalência de $\mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ pela relação de equivalência acima, e é denotado por $P^2(\mathbb{K})$.*

A cada uma destas classes corresponde uma reta de $\mathbb{K}^3$ passando pela origem e reciprocamente. Dado um ponto $P = (x_0, x_1, x_2) \in \mathbb{K}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$, sua classe de equivalência $\bar{P} = (x_0 : x_1 : x_2)$ são as coordenadas homogêneas do ponto $\bar{P}$ (usamos os dois pontos para lembrar do fato que que a trinca acima está definida a menos de multiplicação por uma constante não nula).

Exemplo 3.22. *Sejam $\mathbb{K}$ um corpo e $\mathcal{V} = (V, +, \cdot_{\mathbb{K}})$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial. Seja $P(V)$ o conjunto de todos os subespaços de V de dimensão 1. $P(\mathcal{V})$ é chamado de **espaço projetivo associado ao espaço vetorial** $\mathcal{V}$. Se $\mathcal{V}$ for um espaço vetorial real munido de produto interno, podemos munir $P(\mathcal{V})$ de uma métrica usando o ângulo entre estes subespaços. Para obter a desigualdade triangular, basta observar que três "pontos" de $P(\mathcal{V})$ são dados por três retas que determinam um espaço tridimensional, no qual podemos usar o raciocínio do **Exemplo 3.18**.*

Exemplo 3.23. *Seja $\mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ o espaço vetorial de todas as funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$. Definamos:*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \mapsto & \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a,b]\} \end{array}$$

Vamos verificar que d é, de fato, uma métrica.

(M1): *Sejam $f, g \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$ tais que $d(f,g) = 0$, de modo que $\sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a,b]\} = 0$. Sendo o supremo um limitante superior, temos para todo $t \in [a,b]$:*

$$0 \leq |f(t) - g(t)| \leq 0$$

de modo que $(\forall t \in [a,b])(f(t) = g(t))$. Uma vez que estas funções têm mesmo domínio e mesmo contradomínio, segue que $f = g$. A recíproca é trivialmente válida.

(M2): *Como é válido que, para todo $t \in [a,b]$, $|f(t) - g(t)| = |g(t) - f(t)|$, segue que:*

$$d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a,b]\} = \sup\{|g(t) - f(t)| \mid t \in [a,b]\} = d(g,f).$$

(M3): *Dados $f, g, h \in \mathcal{C}([a,b], \mathbb{R})$, para todo $t \in [a,b]$ vale:*

$$|f(t) - h(t)| \leq |f(t) - g(t)| + |g(t) - h(t)|$$

Logo,

$$\sup\{|f(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\} \leq \sup\{|f(t)-g(t)|+|g(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\}$$

*Devido à propriedade do supremo dada na **Proposição 2.109**, segue que:*

$$\begin{aligned}\sup\{|f(t)-g(t)|+|g(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\} &= \\ = \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t\in[a,b]\} &+ \sup\{|g(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\}\end{aligned}$$

Portanto, segue que:

$$\begin{aligned}\sup\{|f(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\} &\leq \\ \leq \sup\{|f(t)-g(t)| \mid t\in[a,b]\} &+ \sup\{|g(t)-h(t)| \mid t\in[a,b]\}\end{aligned}$$

ou seja,

$$d(f,h) \leq d(f,g)+d(g,h).$$

Por satisfazer **(M1)**, **(M2)** *e* **(M3)**, *segue que d define, de fato, uma métrica em* $\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$.

Exemplo 3.24. *Considere um sistema de coordenadas cartesianas, Oxy em um certo plano mergulhado no espaço* $\mathbb{R}^3$. *Cada reta desse plano pode ser descrita por uma equação do tipo:*

$$ax+by+c=0,$$

em que $a^2+b^2\neq 0$. *Duas tais equações* $ax+by+c=0$ *e* $a'x+b'y+c'=0$ *representam a mesma reta se, e somente se,* $\{(a,b,c),(a',b',c')\}\subseteq\mathbb{R}^3$ *for um conjunto linearmente dependente, ou, ainda, se, e somente se,* $\langle\{(a,b,c)\}\rangle=\langle\{(a',b',c')\}\rangle$. *Desta forma, a cada elemento de* $P(\mathbb{R}^3)$ *corresponde uma reta do plano, exceto o subespaço gerado pelo vetor* $(0,0,1)$. *Munindo* $\mathbb{R}^3$ *do produto interno usual, podemos definir a distância entre duas retas do plano como a distância dos elementos de* $P(\mathbb{R}^3)$ *que lhes correspondem.*

Definição 3.25 (subespaço métrico). *Dado um espaço métrico* $\mathcal{M}=(M,d)$, *podemos tornar qualquer de seus subconjuntos* $N\subseteq M$ *em espaço métrico ao definirmos em* N *a função:*

$$\begin{array}{rccc} d_N: & N\times N & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y)\end{array}$$

*denominada a **métrica induzida por** d **em** N. Um tal espaço* $\mathcal{N}=(N,d_N)$ *é denominado um **subespaço métrico de*** $\mathcal{N}$

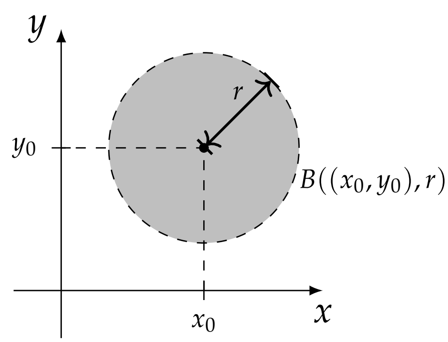
3.4 Conceitos Métricos

Nesta seção introduziremos alguns conceitos típicos dos espaços métricos juntamente com alguns exemplos, e em seguida estudaremos suas principais propriedades.

Definição 3.26 (bola aberta). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $r > 0$. A* ***bola aberta de centro*** x_0 ***e raio*** r *é o conjunto:*

$$B(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < r\}$$

No espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_E)$, uma bola aberta de centro em (x_0, y_0) e raio r tem o seguinte aspecto:



Exemplo 3.27. *Esboçar a bola aberta de centro $(0, 0)$ e raio 1 no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_T)$, onde d_T é a métrica do taxista.*

Solução: sabemos que $B((0,0), 1) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_T((x, y), (0, 0)) < 1\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$. Vamos, primeiramente, determinar a curva que delimita a bola aberta: ela é constituída dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $|x| + |y| = 1$. Aqui, temos quatro casos a considerar:

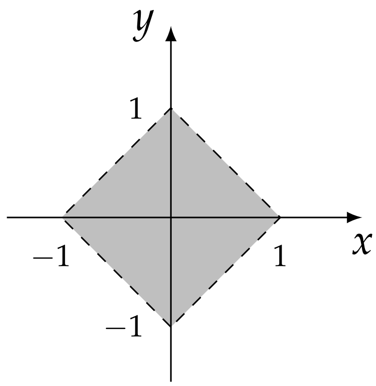
(1) (x, y) está no primeiro quadrante: neste caso, $x > 0$ e $y > 0$, de modo que a curva que delimita a bola aberta é dada por $|x| + |y| = x + y = 1$, ou seja, $y = 1 - x$;

(2) (x, y) está no segundo quadrante: neste caso, $x < 0$ e $y > 0$, de modo que a curva que delimita a bola é dada por $|x| + |y| = -x + y = 1$, ou seja, $y = 1 + x$;

(3) (x, y) está no terceiro quadrante: neste caso, $x < 0$ e $y < 0$, de modo que a curva que delimita a bola é dada por $|x| + |y| = -x - y = 1$, ou seja, $y = -1 - x$;

(4) (x, y) está no quarto quadrante: neste caso, $x > 0$ e $y < 0$, de modo que a curva que delimita a bola é dada por $|x| + |y| = x - y = 1$, ou seja $y = x - 1$;

Portanto, no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_T)$, uma bola aberta de centro em $(0,0)$ e raio 1 é constituída por todos os pontos (x,y) internos à curva obtida pela concatenação dos quatro segmentos acima. A bola tem o seguinte aspecto:



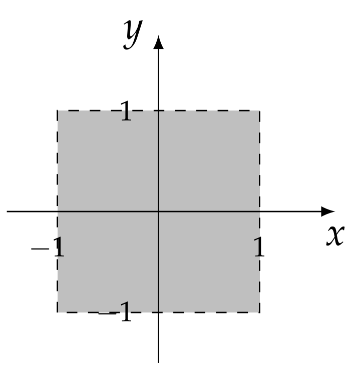
$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| < 1\}$

Exemplo 3.28. *Esboçar $B((0,0),1)$ no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_M)$,em que d_M é a métrica do máximo.*

Solução: Tem-se:

$$B((0,0),1) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid d_M((x,y),(0,0)) < 1\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} < 1\}$$

Vamos, primeiramente, determinar a curva que delimita a bola aberta: ela é constituída dos pontos $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $\max\{|x|,|y|\} = 1$. Mas $\max\{|x|,|y|\} = 1$ ocorre exatamente para pontos da forma $(x,1)$ e $(x,-1)$, com $-1 \leq x \leq 1$, e da forma $(1,y)$ e $(-1,y)$, com $-1 \leq y \leq 1$. Logo, a curva é o quadrado de vértices em $(-1,-1),(-1,1),(1,1)$ e $(1,-1)$. Portanto, no espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_T)$, a bola aberta de centro em $(0,0)$ e raio 1 é constituída por todos os pontos do plano interiores a esse quadrado, ou seja:

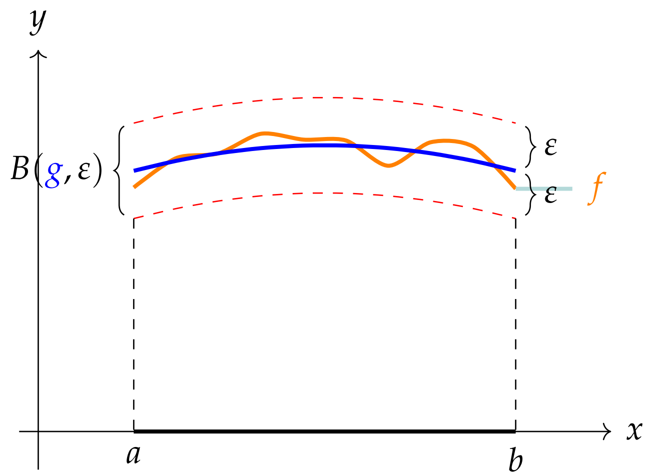


$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \max\{|x|,|y|\} < 1\}$

Exemplo 3.29. *Consideremos o espaço métrico $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), d)$,em que $d(f,g) = \sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a,b]\}$. Dados uma função $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ e um número $\varepsilon > 0$, a bola aberta de centro em g e raio $\varepsilon > 0$ é:*

$$B(g,\varepsilon) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \mid (f \text{ é contínua}) \& (\sup\{|f(t) - g(t)| \mid t \in [a,b]\} < \varepsilon)\}$$

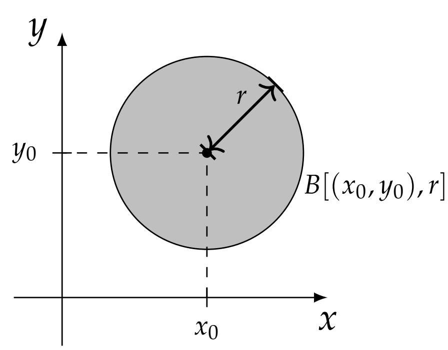
Neste caso, a bola aberta é constituída por todas as funções contínuas $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ cujo gráfico se encontra contido inteiramente acima da curva $\{(x, g(x) - \varepsilon) \mid x \in [a,b]\}$ e abaixo da curva $\{(x, g(x) + \varepsilon) \mid x \in [a,b]\}$, como esboçamos a seguir:



Definição 3.30 (bola fechada). *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $r > 0$. A* ***bola fechada de centro*** *x_0* ***e raio*** *r é o conjunto:*

$$B[x_0, r] = \{x \in M \mid d(x, x_0) \leq r\}$$

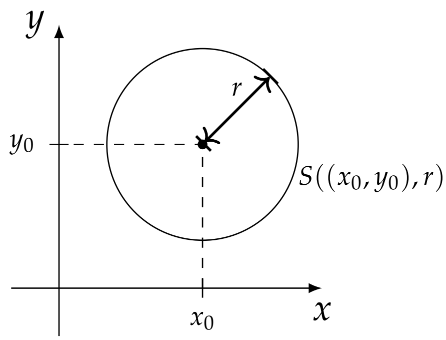
No espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_E)$, uma bola fechada de centro em (x_0, y_0) e raio r tem o seguinte aspecto:



Definição 3.31 (esfera). *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $r > 0$. A* ***esfera de centro*** *x_0* ***e raio*** *r é o conjunto:*

$$S(x_0, r) = \{x \in M \mid d(x, x_0) = r\}$$

No espaço métrico $(\mathbb{R}^2, d_E)$, a esfera de centro em (x_0, y_0) e raio r tem o seguinte aspecto:



Evidentemente tem-se:

$$B[x_0, r] = S(x_0, r) \cup B(x_0, r)$$

Dependendo das métricas, o "aspecto" das bolas pode ser o mais variado do ponto de vista da Geometria Elementar (como vimos no **Exemplo 3.29**). Em muitos casos, pode ser difícil ou mesmo impossível fazer uma imagem mental desses objetos.

3.5 Propriedades Básicas das Bolas Abertas

Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $x_0, y_0 \in M$, $\delta, \delta_1, \delta_2 > 0$.

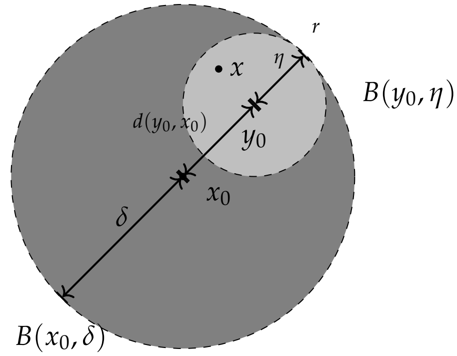
Proposição 3.32. *Se $\delta_1 \leq \delta_2$, tem-se $B(x_0, \delta_1) \subseteq B(x_0, \delta_2)$.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] De fato, dado qualquer $x \in B(x_0, \delta_1)$, temos $d(x, x_0) < \delta_1 \leq \delta_2$, ou seja, $d(x, x_0) < \delta_2$, de modo que $x \in B(x_0, \delta_2)$. Assim, $B(x_0, \delta_1) \subseteq B(x_0, \delta_2)$ □

Proposição 3.33. *Dado $y_0 \in B(x_0, \delta)$, existe $\eta > 0$ tal que $B(y_0, \eta) \subset B(x_0, \delta)$.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Considere $\eta = \delta - d(y_0, x_0) > 0$. Afirmamos que $B(y_0, \eta) \subset B(x_0, \delta)$.

De fato, dado $x \in B(y_0, \eta)$, tem-se $d(x, y_0) < \eta = \delta - d(y_0, x_0)$, de modo que pela **Desigualdade Triangular** tem-se $d(x, x_0) \leq d(x, y_0) + d(y_0, x_0) < d(y_0, x_0) + \delta = \delta - d(y_0, x_0) + d(y_0, x_0) = \delta$, de modo que $x \in B(x_0, \delta)$. Como $x \in B(y_0, \eta)$ é arbitrário, segue que $B(y_0, \eta) \subset B(x_0, \delta)$.



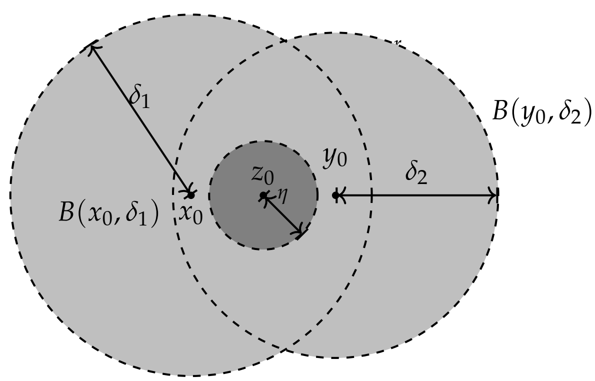
□

Proposição 3.34. *Sejam $B(x_0, \delta_1)$ e $B(y_0, \delta_2)$ duas bolas abertas não disjuntas. Se $z_0 \in B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2)$, existe $\eta > 0$ tal que:*

$$B(z_0, \eta) \subset B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2)$$

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Dado $z_0 \in B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2)$ tem-se, em particular, $z_0 \in B(x_0, \delta_1)$ e $z_0 \in B(y_0, \delta_2)$. Pela **Proposição 3.32** existem $\eta_1 > 0$ tal que $B(z_0, \eta_1) \subset B(x_0, \delta_1)$ e $\eta_2 > 0$ tal que $B(z_0, \eta_2) \subset B(y_0, \delta_2)$. Basta, portanto, tomarmos $\eta = \min\{\eta_1, \eta_2\}$, e teremos:

$$B(z_0, \eta) \subset B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2).$$



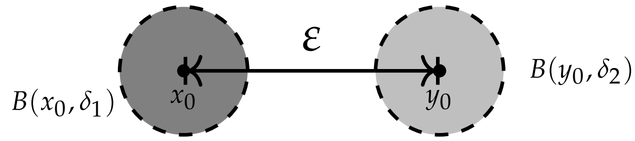
□

Proposição 3.35. *Se $x_0 \neq y_0$, então existe $\delta > 0$ tal que:*

$$B(x_0, \delta) \cap B(y_0, \delta) = \varnothing.$$

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] De fato, seja $\varepsilon = d(x_0, y_0) > 0$, e tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Afirmamos que:

$$B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) = \varnothing.$$



De fato, suponhamos por absurdo que exista $z \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \cap B\left(y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right)$. Por um lado, tem-se:

$$x \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.3}$$

e por outro:

$$x \in B\left(y_0, \frac{\varepsilon}{2}\right) \tag{3.4}$$

Por (3.3) tem-se $d(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ e por (3.4) tem-se $d(x, y_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Mas tem-se:

$$\varepsilon = d(x_0, y_0)$$

e pela **Desigualdade Triangular**, temos:

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y_0) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

donde conclui-se que $\varepsilon < \varepsilon$, que é um absurdo. Logo, segue o resultado. □

Proposição 3.36. *Se $\delta_1 + \delta_2 \leq d(x_0, y_0)$, então:*

$$B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2) = \varnothing.$$

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que exista $x \in B(x_0, \delta_1) \cap B(y_0, \delta_2)$, de modo que $d(x, x_0) < \delta_1$ e $d(x, y_0) < \delta_2$. Assim,

$$d(x_0, y_0) \leq d(x_0, x) + d(x, y_0) < \delta_1 + \delta_2 < d(x_0, y_0)$$

ou seja,

$$d(x_0, y_0) < d(x_0, y_0),$$

o que é um absurdo. □

3.5.1 Pseudo-métricas e Seminormas

Definição 3.37 (pseudo-métrica). *Uma **pseudo-métrica** em um conjunto M é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

que satisfaz os seguintes axiomas:

(PM1) $(\forall x \in M)(d(x,x) = 0)$;

(PM2) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d(x,y) = d(y,x))$;

(PM3) $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\forall z \in M)(d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z))$.

Observe que, diferentemente do que se exige para função ser uma métrica, aqui não requeremos que $x \neq y$ implique $d(x,y) > 0$: podem existir pontos distintos, $x \neq y$, tais que $d(x,y) = 0$.

Exemplo 3.38. *Sejam $\varnothing \neq S \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{F}_S = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid (\exists K > 0)(\forall x \in S)(|f(x)| < K)\}$, e considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{F}_S \times \mathcal{F}_S & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \mapsto & \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in S\} \end{array}$$

Afirmamos que d é uma pseudo-métrica.

*Ad **(PM2)**: Dadas $f, g \in \mathcal{F}_S$, tem-se:*

$$(\forall x \in S)(|f(x) - g(x)| = |g(x) - f(x)|)$$

de modo que:

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in S\} = \sup\{|g(x) - f(x)| \mid x \in S\} = d(g,f).$$

*Ad **(PM3)**: Sejam $f, g, h \in \mathcal{F}_S$. Temos:*

$$(\forall x \in S)(|f(x) - h(x)| = |f(x) - g(x) + g(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|)$$

*Assim, pela **Observação 2.106**:*

$$\sup\{|f(x) - h(x)| \mid x \in S\} \leq \sup\{|f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)| \mid x \in S\}$$

*e pela **Observação 2.109**:*

$$\sup\{|f(x) - h(x)| \mid x \in S\} \leq \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in S\} + \sup\{|g(x) - h(x)| \mid x \in S\}$$

logo,

$$d(f,h) \leq d(f,g) + d(g,h).$$

Observe que:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, & se\ x \in S \\ 0, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus S \end{cases} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

são elementos distintos *de* $\mathcal{F}_S$ *tais que:*

$$d(f,g) = \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in S\} = 0.$$

Definição 3.39 (seminorma). *Sejam* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ *e* $\mathcal{V} = (V, +, -, \cdot)$ *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial. Uma* ***seminorma*** *é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|: & V & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & |x| \end{array}$$

que satisfaz:

(SN1) $(\forall x \in V)(|x| \geq 0)$

(SN2) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall x \in V)(|\lambda \cdot x| = |\lambda| \cdot |x|)$;

(SN3) $(\forall x \in V)(\forall y \in V)(|x + y| \leq |x| + |y|)$

Exemplo 3.40. *Considere no* $\mathbb{R}-$*espaço vetorial* $\mathcal{R} = (\mathbb{R}^n, +, \cdot)$, *para certo* $i \in \{1, \cdots, n\}$ *fixado, a função:*

$$\begin{array}{rccc} |\cdot|_i: & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & |x_i| \end{array}$$

Vamos verificar que, de fato, $|\cdot|_i$ *é uma seminorma.*

Ad **(SN1)**: *Dado qualquer* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *tem-se* $|(x_1, \cdots, x_n)|_i = |x_i| \geq 0$ *(propriedade do valor absoluto,* $|\cdot|$*).*

Ad **(SN2)**: *Dados* $\lambda \in \mathbb{R}$ *e* $(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, *temos* $|\lambda \cdot (x_1, \cdots, x_n)|_i = |(\lambda \cdot x_1, \cdots, \lambda \cdot x_n)|_i = |\lambda \cdot x_i| = |\lambda| \cdot |x_i| = |\lambda| \cdot |(x_1, \cdots, x_n)|_i$;

Ad **(SN3)**: *Dados* $(x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, *tem-se:*

$$\begin{aligned}|(x_1,\cdots,x_n)+(y_1,\cdots,y_n)|_i &= |(x_1+y_1,\cdots,x_n+y_n)|_i = \\ &= |x_i+y_i| \leq |x_i|+|y_i| = |(x_1,\cdots,x_n)|_i + |(y_1,\cdots,y_n)|_i\end{aligned}$$

Observe que é possível que se tenha $|(x_1,\cdots,x_n)|_i = 0$ sem que $(x_1,\cdots,x_n) = (0,\cdots,0)$. Consideremos a $n-$upla $(1,0,\cdots,0) \in \mathbb{R}^n$, que certamente é diferente do vetor nulo. Tem-se, no entanto, $|(1,0,\cdots,0)|_i = |0| = 0$.

Proposição 3.41. *Em todo $\mathcal{K}-$espaço vetorial $\mathcal{V} = (V,+,\cdot)$, uma seminorma $|\cdot| : V \to \mathbb{R}_+$ induz uma pseudo-métrica:*

$$\begin{array}{rccc} d_{|\cdot|}: & M\times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$$

Observação 3.42. *Seja $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço pseudo-métrico. Definamos a relação:*

$$\sim = \{(x,y) \in M\times M \mid d(x,y) = 0\}.$$

Mostraremos que $\sim$ é uma relação de equivalência.

Reflexividade: *Pelo axioma* **(PM1)**, *tem-se para todo $x \in M$, $d(x,x) = 0$ – e portanto, para todo $x \in M$ tem-se $x \sim x$;*

Simetria: *Pelo axioma* **(PM3)** *tem-se, para quaisquer $x,y \in M$ $d(x,y) = d(y,x)$. Assim, se $x \sim y$, e portanto $d(x,y) = 0$, segue que $d(y,x) = d(x,y) = 0$, e portanto $y \sim x$.*

Transitividade: *Sejam $x,y,z \in M$ tais que $x \sim y$ (e portanto $d(x,y) = 0$) e $y \sim z$ (e portanto $d(y,z) = 0$). Pelo axioma* **(PM4)** *temos:*

$$0 \leq d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = 0 + 0 = 0$$

de modo que $d(x,z) = 0$ e $x \sim z$.

Consideremos, para cada $x \in M$, o conjunto:

$$[x] = \{y \in M \mid x \sim y\} = \{y \in M \mid d(x,y) = 0\},$$

e tomemos:

$$\widetilde{M} = \{[x] \mid x \in M\}$$

Podemos munir $\widetilde{M}$ de uma relação:

$$\widetilde{d} = \{(([x],[y]),d(x,y)) \mid ([x],[y]) \in \widetilde{M}\times\widetilde{M}\} \subseteq (\widetilde{M}\times\widetilde{M})\times\mathbb{R}_+.$$

Primeiramente, observe que $\widetilde{d}$ é uma função, ou seja, é uma relação unívoca e total.

Univocidade: *Dado* $([x],[y]) \in \widetilde{M} \times \widetilde{M}$*, sejam* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ *tais que* $([x_1],[y_1]) = ([x_2],[y_2])$*. Como* $[x_1] = [x_2]$ *tem-se* $x_1 \sim x_2$*, ou seja,* $d(x_1,x_2) = 0$*, e como* $[y_1] = [y_2]$ *tem-se* $y_1 \sim y_2$*, ou seja,* $d(y_1,y_2) = 0$*. Assim, temos:*

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y_1)$$

e também:

$$d(x_2,y_1) \leq d(x_2,y_2) + d(y_2,y_1)$$

e portanto:

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_1,x_2) + d(x_2,y_2) + d(y_2,y_1) = d(x_2,y_2)$$

ou seja,

$$d(x_1,y_1) \leq d(x_2,y_2).$$

Também,

$$d(x_2,y_2) \leq d(x_2,x_1) + d(x_1,y_2)$$

e também:

$$d(x_1,y_2) \leq d(x_1,y_1) + d(y_1,y_2)$$

e portanto:

$$d(x_2,y_2) \leq d(x_2,x_1) + d(x_1,y_1) + d(y_1,y_2) = d(x_1,y_1)$$

ou seja,

$$d(x_2,y_2) \leq d(x_1,y_1).$$

Segue, assim, que $d(x_1,y_1) = d(x_2,y_2)$*.*

Portanto, se $([x_1],[y_1]) = ([x_2],[y_2])$*, então* $(([x_1],[y_2]), d(x_1,x_2)) = (([x_2],[y_2]), d(x_2,y_2))$*, e* $\widetilde{d}$ *é uma relação unívoca.*

Totalidade: *Segue do fato de que* $\operatorname{dom}(d) = M \times M$*.*

Temos, desta forma, uma função:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{d}: & \widetilde{M} \times \widetilde{M} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ([x],[y]) & \mapsto & d(x,y) \end{array}$$

Vamos verificar que $\widetilde{d}$ é, de fato, uma métrica.

(M1): *Para qualquer $[x] \in \widetilde{M}$ temos $\widetilde{d}([x],[x]) = d(x,x) = 0$. Também, dados quaisquer $[x],[y] \in \widetilde{M}$, se $\widetilde{d}([x],[y]) = d(x,y) = 0$ então $x \sim y$, de modo que $[x] = [y]$.*

(M2): *Dados quaisquer $[x],[y] \in \widetilde{M}$, temos:*

$$\widetilde{d}([x],[y]) = d(x,y) = d(y,x) = \widetilde{d}([y],[x]).$$

(M3): *Para quaisquer $[x],[y],[z] \in \widetilde{M}$ tem-se:*

$$\widetilde{d}([x],[z]) = d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) = \widetilde{d}([x],[y]) + \widetilde{d}([y],[z])$$

Desta forma, a todo espaço pseudo-métrico, (M,d) está associado um único espaço métrico $(\widetilde{M},\widetilde{d})$.

Exercícios sobre Métricas

1.1. Considere o conjunto $X = \{x,y,z,w\}$, e defina:

$$\begin{array}{rccc} d: & X \times X & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & 2 \\ & (x,z) & \mapsto & 2 \\ & (y,z) & \mapsto & 2 \\ & (x,w) & \mapsto & 1 \\ & (y,w) & \mapsto & 1 \\ & (z,w) & \mapsto & 1 \\ & (x,x) & \mapsto & 0 \\ & (y,x) & \mapsto & 2 \\ & (y,y) & \mapsto & 0 \\ & (z,x) & \mapsto & 2 \\ & (z,y) & \mapsto & 2 \\ & (z,z) & \mapsto & 0 \\ & (w,x) & \mapsto & 1 \\ & (w,y) & \mapsto & 1 \\ & (w,z) & \mapsto & 1 \\ & (w,w) & \mapsto & 0 \end{array}$$

Verificar que d é uma métrica sobre X.

1.2 Seja $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico. Mostrar que as seguintes funções são métricas:

(i)

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \min\{1, d(x,y)\} \end{array}$$

(ii)

$$\begin{array}{rccc} \beta: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \sqrt{d(x,y)} \end{array}$$

(iii)

$$\begin{array}{rccc} \gamma: & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \end{array}$$

1.3 Seja $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ o conjunto de todas as funções contínuas de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$. Mostrar que a função:

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{B}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \mapsto & \int_0^1 |f(t)-g(t)|dt \end{array}$$

é uma métrica. Interprete esta métrica geometricamente.

1.4 Mostrar que se $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função estritamente crescente então:

$$\begin{array}{rccc} d_f: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & |f(x)-f(y)| \end{array}$$

é uma métrica sobre $\mathbb{R}$.

1.5 Seja $\mathcal{G} = (G, +_G, -_G, e_G)$ um grupo abeliano, ou seja, valem:

(Ab1) $(\forall g_1 \in G)(\forall g_2 \in G)(\forall g_3 \in G)(g_1 +_G (g_2 +_G g_3) = (g_1 +_G g_2) +_G g_3)$;

(Ab2) $(\forall g \in G)(g +_G e_G = g = e_G +_G g)$;

(Ab3) $(\forall g \in G)(g +_G (-_G g) = e_G = (-_G g) +_G g)$;

(Ab4) $(\forall g_1 \in G)(\forall g_2 \in G)(g_1 +_G g_2 = g_2 +_G g_1)$

e suponha que exista uma função:

$$f: G \to \mathbb{R}$$

satisfazendo as seguintes propriedades:

(a) $f(e_G) = 0$

(b) $(\forall x \in G)((x \neq e_G) \Rightarrow f(x) > 0)$

(c) $(\forall x \in G)(f(-_G x) = f(x))$;

(d) $(\forall x \in G)(\forall y \in G)(f(x +_G y) \leq f(x) + f(y))$.

Mostrar que:

$$\begin{array}{rccc} d: & G \times G & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & f(x -_G y) \end{array}$$

é uma métrica em G.

1.6 Seja $M = \{a_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ um conjunto tal que $i \neq j \Rightarrow a_i \neq a_j$. Verifique que a função:

$$\begin{array}{rccc} d: & M \times M & \rightarrow & \mathbb{R}_+ \\ & (a_i, a_j) & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{ se } i = j \\ \dfrac{1}{i} + \dfrac{1}{j}, \text{ se } i \neq j \end{cases} \end{array}$$

é uma métrica sobre M.

1.7 Construir um modelo no plano do espaço métrico $\mathcal{T} = (\{a, b, c\}, d)$,em que d é a métrica zero-um.

1.8 Numa folha de papel marque seis pontos quaisquer, de preferência não todos alinhados. Construa triângulos com esses pontos. Dê valores às distâncias entre os pontos mantendo a propriedade da desigualdade triangular: todo lado é menor que a soma dos outros dois. A figura que você obteve é um espaço métrico?

3.6 Espaços Métricos e Funções Limitadas

Definição 3.43 (espaço métrico limitado). *Um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ é **limitado** se existirem um ponto $x_0 \in M$ e um número real $r > 0$ tais que:*

$$M = B(x_0, r).$$

Equivalentemente, um espaço métrico (M, d) é limitado se, e somente se, $\{d(x, y) \mid (x \in M)\&(y \in M)\}$ é um conjunto limitado superiormente.

Note que, se na definição acima $s > r$, temos também $M = B(x_0, s)$.

Lema 3.44. *Se $\mathcal{M} = (M, d)$ é um espaço métrico limitado e $y \in M$, então existe $s > 0$ tal que $M = B(y, s)$.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Como $\mathcal{M}$ é limitado, existem $x_0 \in M$ e $r > 0$ tais que $M = B(x_0, r)$. Basta, portanto, tomarmos $s = 2r$ e teremos, para qualquer $z \in M$:

$$d(z, y) \leq d(z, x_0) + d(y, x_0) < r + r = 2r = s.$$

Assim, $M = B(y, s)$. □

Utilizando o lema acima, vemos que se $\mathcal{M}$ for um espaço métrico limitado, então existe um número $K > 0$ tal que a distância entre quaisquer dois pontos de M nunca supera K. Isto motiva a seguinte:

Definição 3.45 (diâmetro). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico limitado. O* ***diâmetro*** *de $\mathcal{M}$ é:*

$$diam\,(\mathcal{M}) = \sup\{d(x,y) \mid (x \in M)\&(y \in M)\}$$

O diâmetro de um subconjunto $N \subseteq M$ será o diâmetro do espaço métrico $\mathcal{N} = (N, d\restriction_{N\times N})$, munido da métrica induzida.

Exemplo 3.46. *Consideremos o espaço métrico $\mathcal{M} = (\mathbb{R}, d)$,em que d é dada por:*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathbb{R}\times\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & |x-y| \end{array}$$

O diâmetro do conjunto $[a,b] \subseteq \mathbb{R}$ é o diâmetro do espaço métrico $\mathcal{N} = ([a,b], d\restriction_{[a,b]\times[a,b]})$:

$$diam\,([a,b]) = \sup\{|x-y| \mid (x \in [a,b])\&(y \in [a,b])\} = |b-a|$$

Exemplo 3.47. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $r > 0$. Então:*

$$\mathrm{diam}\,(B(x_0, r)) \leq 2r.$$

Com efeito, dados qualquer $x, y \in B(x_0, r)$ tem-se:

$$d(x,y) \leq d(x,x_0) + d(y,x_0) < r + r = 2r,$$

de modo que $2r$ é uma cota superior para o conjunto $X = \{d(x,y) \mid (x \in B(x_0,r))\&(y \in B(x_0,r))\}$. Como $\mathrm{diam}\,(B(x_0,r))$ é a *menor* de todas as cotas superiores de X, segue imediatamente que:

$$\mathrm{diam}\,(B(x_0, r)) \leq 2r$$

A desigualdade, $\mathrm{diam}\,(B(x_0,r)) < 2r$ pode efetivamente acontecer. De fato, consideremos um conjunto $M \neq \varnothing$ munido da métrica zero-um. Dado, então, um ponto $x_0 \in M$ e tomando um número $\delta > 0$ tal que $0 < \delta \leq 1$, tem-se:

$$B(x_0, \delta) = \{x_0\},$$

cujo diâmetro é zero, e portanto *estritamente menor* que 2δ.

Exemplo 3.48. *Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\mathcal{V} = (V, +_V, -_V, \cdot_{\mathbb{K}}, 0_V, \|\cdot\|_V)$ um espaço vetorial normado. Ao considerarmos o espaço métrico $(V, d_{\|\cdot\|})$,em que $d_{\|\cdot\|}(x,y) = \|x -_V y\|$, para qualquer $x_0 \in V$ temos:*

$$\mathrm{diam}\,(B(x_0, \delta)) = 2\delta$$

De fato, suponhamos, por absurdo, que exista $\eta < 2\delta$ tal que $\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) = \eta < 2\delta$. *Seja λ tal que $\eta < \lambda < 2\delta$. Dado um vetor não nulo, $x \in V \setminus \{0_V\}$, tem-se:*

$$y = x_0 + \frac{\lambda}{2\|x\|} \cdot x \;\; e \;\; z = x_0 - \frac{\lambda}{2\|x\|} \cdot x$$

pertencentes a $B(x_0, \delta)$, uma vez que:

$$d_{\|\cdot\|_V}(y, x_0) = \left\| \frac{\lambda}{2\|x\|} \cdot x \right\|_V = \frac{\lambda}{2} < \delta$$

$$d_{\|\cdot\|_V}(z, x_0) = \left\| \frac{\lambda}{2\|x\|} \cdot x \right\|_V = \frac{\lambda}{2} < \delta$$

Mas,

$$d_{\|\cdot\|_V}(y, z) = \|y - z\|_V = \left\| \frac{\lambda}{2\|x\|} \cdot x \right\|_V = \lambda > \eta$$

de modo que y e z são pontos de $B(x_0, \delta)$ cuja distância entre si é maior que o diâmetro da bola – o que é um absurdo.

Este absurdo garante, portanto, que não existe $\eta < 2\delta$ tal que $\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) = \eta$. *Sabe-se que* $\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) \leq 2\delta$, *logo tem-se:*

$$(\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) \not< 2\delta) \& (\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) \leq 2\delta)$$

e portanto:

$$\operatorname{diam}(B(x_0, \delta)) = 2\delta.$$

Definição 3.49 (função limitada). *Sejam X um conjunto e $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Dizemos que $f : X \to M$ é uma **função limitada** se, e somente se o conjunto $f[X] \subseteq M$ for limitado. Equivalentemenre, a função $f : X \to M$ é limitada se, e somente se, existirem $x_0 \in M$ e $R > 0$ tais que:*

$$(\forall x \in X)(d(f(x), x_0) < R)$$

As funções que não *são limitadas são denominadas **funções ilimitadas**.*

Exemplo 3.50. *Consideremos $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$ e a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{1 + x^2} \end{array}$$

Neste caso, verifica-se que $f[\mathbb{R}] =]0,1]$. Esta função é limitada, bastando tomarmos $x_0 = \frac{1}{2}$, $R = \dfrac{1}{2}$, e teremos:

$$(\forall x \in \mathbb{R}) \left(d\left(\frac{1}{1+x^2}, \frac{1}{2}\right) = \left|\frac{1}{1+x^2} - \frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} \cdot \left|\frac{1-x^2}{1+x^2}\right| \leq \frac{1}{2} \cdot 1 \right)$$

Por sua vez, a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é ilimitada, uma vez que $f[\mathbb{R}] = \mathbb{R}$, que é ilimitado.

3.7 Métricas Equivalentes

Seja $M \neq \varnothing$ um conjunto. Consideraremos duas métricas em M:

$$d : M \times M \to \mathbb{R}_+$$

$$d' : M \times M \to \mathbb{R}_+$$

não necessariamente iguais. Nestas condições, dados $x_0 \in M$ e $\delta > 0$, para evitar confusões, denotaremos por $B_d(x_0, \delta)$ a bola aberta de centro em x_0 e raio δ segundo a métrica d, ou seja:

$$B_d(x_0, \delta) = \{x \in M \mid d(x, x_0) < \delta\}$$

e denotaremos por $B_{d'}(x_0, \delta)$ a bola aberta de centro em x_0 e raio δ segundo a métrica d', ou seja:

$$B_{d'}(x_0, \delta) = \{x \in M \mid d'(x, x_0) < \delta\}$$

Definição 3.51. *Sejam $M \neq \varnothing$ e d e d' duas métricas. Dizemos que d e d' são* ***métricas equivalentes*** *se, para cada $x_0 \in M$, dado qualquer $\delta > 0$ existir um $\eta > 0$ tal que:*

$$B_{d'}(x_0, \eta) \subset B_d(x_0, \delta)$$

e vice-versa, ou seja, dado qualquer $\eta > 0$ existir um $\zeta > 0$ tal que:

$$B_d(x_0, \zeta) \subset B_{d'}(x_0, \eta).$$

Se d e d' são métricas equivalentes, escreveremos $d \sim d'$.

Exemplo 3.52. *Em $\mathbb{R}^2$ consideremos as métricas:*

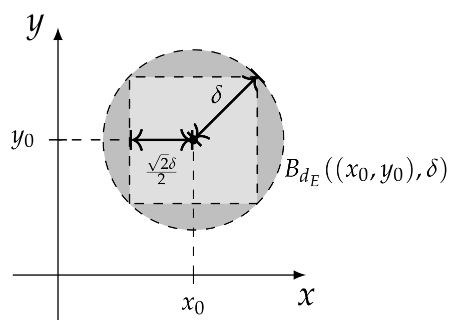
$$\begin{array}{rccc} d_E : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} d_M : & \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \max\{|x_2 - x_1|, |y_2 - y_1|\} \end{array}$$

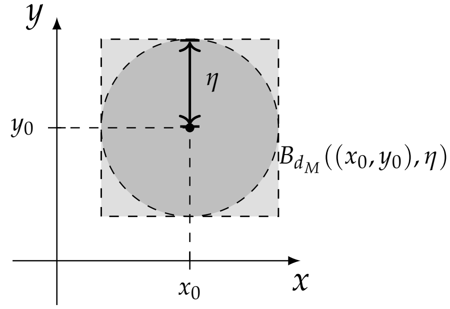
Vamos verificar que estas duas métricas são equivalentes. Sejam $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ qualquer e $\delta > 0$. Sabemos que $B_{d_E}((x_0, y_0), \delta)$ é o círculo (sem a circunferência) centrado em (x_0, y_0) e com raio igual a δ. Queremos encontrar $\eta > 0$ tal que $B_{d_M}((x_0, y_0), \eta) \subseteq B_{d_E}(x_0, \delta)$, que sabemos ser o interior de um quadrado cujo centro geométrico coincide com (x_0, y_0) e cujo lado mede 2η, esteja inteiramente contida em $B_{d_E}((x_0, y_0), \delta)$. A diagonal do quadrado $B_{d_M}((x_0, y_0), \eta)$ mede $2\sqrt{2}\eta$, de modo que para $B_{d_M}((x_0, y_0), \eta)$ estar inteiramente contido em $B_{d_E}((x_0, y_0), \delta)$, basta que tomemos $2\sqrt{2}\eta \leq 2\delta$, ou seja, $\eta \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\delta$. Como basta que escolhamos um valor para η, podemos tomar $\eta = \frac{\sqrt{2}\delta}{2}$, e teremos:

$$B_{d_M}\left((x_0, y_0), \frac{\sqrt{2}\delta}{2}\right) \subset B_{d_E}((x_0, y_0), \delta)$$



Reciprocamente, dado $\eta > 0$, sabe-se que $B_{d_M}((x_0, y_0), \eta)$ é um quadrado cujo centro geométrico coincide com (x_0, y_0) e cujo lado mede 2η. Assim, se tomarmos qualquer $\zeta \leq \eta$ – ou, em particular, $\zeta = \eta$ – teremos:

$$B_{d_E}((x_0, y_0), \sqrt{2}\eta) \subset B_{d_M}((x_0, y_0), \eta)$$



Segue, assim, que $d_M \sim d_E$.

A seguir, apresentamos uma condição suficiente para que duas métricas sobre um mesmo conjunto sejam equivalentes:

Proposição 3.53. *Sejam* M *um conjunto não vazio e* $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ *duas métricas sobre* M. *Se existirem números reais* $\alpha > 0, \beta > 0$ *tais que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y))$$

então $d_1 \sim d_2$.

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Sejam $x_0 \in M$ um ponto qualquer e $r > 0$ dado. Mostremos que:

$$B_{d_2}(x_0, \alpha \cdot r) \subset B_{d_1}(x_0, r)$$

Dado $x \in B_{d_2}(x_0, \alpha \cdot r)$, tem-se $d_2(x, x_0) < \alpha \cdot r$, e como, por hipótese, $\alpha \cdot d_1(x, x_0) \leq d_2(x, x_0)$, tem-se $\alpha \cdot d_1(x, x_0) < \alpha \cdot r$. Segue daí que $d_1(x, x_0) < r$ e, portanto, $x \in B_{d_1}(x_0, r)$.

Reciprocamente, provaremos que:

$$B_{d_1}\left(x_0, \frac{r}{\beta}\right) \subset B_{d_2}(x_0, r).$$

Dado $x \in B_{d_1}\left(x_0, \frac{r}{\beta}\right)$, tem-se por definição:

$$d_1(x, x_0) < \frac{r}{\beta},$$

de onde segue que $\beta \cdot d_1(x, x_0) < r$. Porém, $d_2(x, x_0) \leq \beta \cdot d_1(x, x_0)$, e portanto $d_2(x, x_0) < r$, o que garante que $x \in B_{d_2}(x_0, r)$.

Desta forma, segue que $d_1 \sim d_2$. □

Observação 3.54. *[Estrutura da argumentação: a fim de mostrar que* $\beta \not\to \alpha$*, mostra-se que* $\beta \wedge \neg\alpha$*]* *A recíproca da* ***Proposição 3.53*** *é falsa, ou seja, se* d_1, d_2 *são métricas equivalentes sobre um conjunto* M, *pode não existir* $\alpha > 0$ *tal que* $(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y))$ *ou pode não existir* $\beta > 0$ *tal que* $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y))$ *(ou ambos). Considere em* $\mathbb{R}$ *as métricas:*

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

e a métrica usual, $d_E(x,y) = |x-y|$.

Afirmação 1: *$d \sim d_E$;*

Sejam $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}$. Já sabemos que $B_{d_E}(x,\delta) =]x_0-\delta, x_0+\delta[$, então vamos buscar uma descrição para $B_d(x_0,\eta)$. Tem-se:

$$x \in B_d(x_0,\eta) \iff \frac{|x-x_0|}{1+|x-x_0|} < \eta.$$

Para $0 < \eta < 1$, vale:

$$\frac{|x-x_0|}{1+|x-x_0|} < \eta \iff |x-x_0| < \frac{\eta}{1-\eta} \tag{3.5}$$

Assim, escolhendo um η tal que $0 < \eta \leq \dfrac{\delta}{1+\delta}$, tem-se:

$$0 < \eta \leq \frac{\delta}{1+\delta} \Rightarrow \eta + \eta \cdot \delta \leq \delta \iff \eta \leq \delta \cdot (1-\eta) \Rightarrow \frac{\eta}{1-\eta} \leq \delta.$$

Em particular, escolhendo $\eta = \dfrac{\delta}{2\cdot(1+\delta)}$, teremos $\dfrac{\eta}{1-\eta} < \delta$ e:

$$B_d\,(x_0,\eta) \subset B_{d_E}(x_0,\delta),$$

pois:

$$x \in B_d\,(x_0,\eta) \iff \frac{|x-x_0|}{1+|x-x_0|} < \eta \overset{(3.5)}{\iff} |x-x_0| < \frac{\eta}{1-\eta} < \delta \Rightarrow x \in B_{d_E}(x_0,\delta).$$

Agora, dado $\eta > 0$ devemos exibir $\zeta > 0$ tal que $B_{d_E}(x_0,\zeta) \subset B_d(x_0,\eta)$.

Já vimos que se $0 < \eta < 1$, vale:

$$\frac{|x-x_0|}{1+|x-x_0|} < \eta \iff |x-x_0| < \frac{\eta}{1-\eta} \tag{3.6}$$

Assim, dado $0 < \eta < 1$, basta tomarmos $\zeta = \dfrac{\eta}{2\cdot(1-\eta)} < \dfrac{\eta}{1-\eta}$ e teremos:

$$x \in B_{d_E}(x_0,\zeta) \iff |x-x_0| < \zeta \Rightarrow \frac{|x-x_0|}{1+|x-x_0|} < \eta \iff d(x,x_0) < \eta \iff x \in B_d(x_0,\eta).$$

Tendo em vista que, para quaisquer $x,y \in \mathbb{R}$ tem-se $d(x,y) < 1$, o caso em que $1 \leq \eta$ se torna mais simples de analisar: $B_d(x_0,\eta) = \mathbb{R}$, logo para qualquer $\zeta > 0$ tem-se:

$$B_{d_E}(x_0,\zeta) =]x_0-\zeta, x_0+\zeta[\subset \mathbb{R} = B_d(x_0,\eta).$$

Assim, segue que $d \sim d_E$.

Afirmação 2: *Não existem constantes $\alpha, \beta > 0$ tais que:*

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in R)(\alpha \cdot d_E(x,y) \leq d(x,y) \leq \beta \cdot d_E(x,y))$$

Para demonstrar isto, basta provarmos que não é possível encontrar $\alpha > 0$ tal que:

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\alpha \cdot d_E(x,y) \leq d(x,y))$$

Note, por um lado, que dados quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$|x-y| < 1 + |x-y|$$

de modo que:

$$\frac{|x-y|}{1+|x-y|} < 1$$

ou seja,

$$(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(d(x,y) < 1) \tag{3.7}$$

Afirmamos que a sentença abaixo é falsa*:*

$$(\exists \alpha > 0)(\forall x \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(\alpha \cdot d_E(x,y) \leq d(x,y)).$$

De fato, dado qualquer $\alpha > 0$, é possível tomar pontos $x_0, y_0 \in \mathbb{R}$ tais que $\dfrac{1}{\alpha} \leq |x_0 - y_0| = d_E(x_0, y_0)$, e assim:

$$(\forall \alpha > 0)(\exists x_0 \in \mathbb{R})(\exists y_0 \in \mathbb{R})\left(1 = \alpha \cdot \frac{1}{\alpha} \leq \alpha \cdot d_E(x_0,y_0) \leq d(x_0,y_0)\right),$$

o que é uma contradição com (3.7).

3.8 Normas Equivalentes

Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e $\mathcal{V} = (V, +, -, \cdot)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial. Sejam, ainda, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}_+$ duas normas sobre $\mathcal{V}$. Tais normas induzem métricas, que denotaremos por $d_{\|\cdot\|_1}$ e $d_{\|\cdot\|_2}$,em que $d_{\|\cdot\|_1}(x,y) = \|x-y\|_1$ e $d_{\|\cdot\|_2}(x,y) = \|x-y\|_2$.

Definição 3.55. *Sejam $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{V} = (V, +, -, \cdot)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial e $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2 : V \to \mathbb{R}_+$ duas normas sobre $\mathcal{V}$. Dizemos que $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são* ***normas equivalentes*** *se, e somente se as respectivas métricas induzidas forem equivalentes, isto é, $d_{\|\cdot\|_1} \sim d_{\|\cdot\|_2}$.*

Proposição 3.56. *Duas normas, $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sobre o espaço vetorial $\mathcal{V}$ são equivalentes se, e somente se,*

$$(\exists\alpha > 0)(\exists\beta > 0)(\forall u \in V)(\alpha \cdot \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \cdot \|u\|_1)$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) [Estrutura da prova: prova direta] Suponhamos, primeiramente, que existem $\alpha, \beta > 0$ tais que:

$$(\forall w \in V)(\alpha \cdot \|w\|_1 \leq \|w\|_2 \leq \beta \cdot \|w\|_1)$$

Dados $u, v \in V$, a fórmula acima é válida, por hipótese, para $w = u - v$, ou seja, tem-se:

$$\alpha \cdot \|u - v\|_1 \leq \|u - v\|_2 \leq \beta \cdot \|u - v\|_1$$

Logo, por definição, vale:

$$\alpha \cdot d_{\|\cdot\|_1}(u, v) \leq d_{\|\cdot\|_2}(u, v) \leq \beta \cdot d_{\|\cdot\|_1}(u, v).$$

Pela **Proposição 3.53**, segue que $d_{\|\cdot\|_1} \sim d_{\|\cdot\|_2}$ e assim $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ são, por definição, normas equivalentes.

($\Rightarrow$) [Estrutura da prova: prova direta] Reciprocamente, suponhamos que as normas $\|\cdot\|_1$ e $\|\cdot\|_2$ sejam equivalentes. Logo, dada a bola $B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, 1)$, existirá um $\lambda > 0$ tal que:

$$B_{d_{\|\cdot\|_2}}(0, \lambda) \subset B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, 1)$$

Tomando um número real $\alpha > 0$ tal que $0 < \alpha < \lambda$, para todo $u \in V \setminus \{0\}$, o vetor $\frac{\alpha \cdot u}{\|u\|_2}$ pertence à bola $B_{\|\cdot\|_2}(0, \lambda)$, visto que:

$$\left\| \frac{\alpha \cdot u}{\|u\|_2} \right\|_2 = \frac{\alpha \cdot \|u\|_2}{\|u\|_2} = \alpha < \lambda$$

logo este vetor também pertence à bola $B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, 1)$, o que tem como consequência:

$$\left\| \frac{\alpha \cdot u}{\|u\|_2} \right\|_1 < 1$$

ou seja,

$$\alpha \cdot \|u\|_1 < \|u\|_2.$$

Por outro lado, dada a bola $B_{d_{\|\cdot\|_2}}(0, 1)$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, \lambda) \subset B_{d_{\|\cdot\|_2}}(0, 1)$. Tomemos $\beta \in \mathbb{R}$ tal que:

$$0 < \frac{1}{\beta} < \lambda$$

Para todo $u \in V \setminus \{0\}$, o vetor $\frac{u}{\beta \cdot \|u\|_1}$ pertence à bola $B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, \lambda)$, uma vez que:

$$\left\| \frac{u}{\beta \cdot \|u\|_1} \right\|_1 = \frac{\|u\|_1}{\beta \cdot \|u\|_1} = \frac{1}{\beta} < \lambda$$

Logo, $\frac{u}{\beta \cdot \|u\|_1}$ também pertence a $B_{d_{\|\cdot\|_2}}(0, 1)$, o que acarreta:

$$\left\| \frac{u}{\beta \cdot \|u\|_1} \right\|_2 < 1,$$

ou seja,

$$\|u\|_2 < \beta \cdot \|u\|_1$$

Assim, temos:

$$\alpha \cdot \|u\|_1 < \|u\|_2 < \beta \cdot \|u\|_1$$

para todo vetor $u \neq 0$. Se considerarmos também o vetor nulo de V, teremos exatamente a tese:

$$(\exists \alpha > 0)(\exists \beta > 0)(\alpha \cdot \|u\|_1 \leq \|u\|_2 \leq \beta \cdot \|u\|_1)$$

para todo $u \in V$, como queríamos demonstrar. $\square$

Exemplo 3.57. *Seja $\mathcal{C} = (\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}), +, -, \cdot)$ o $\mathbb{R}-$espaço vetorial das funções contínuas (no sentido do Cálculo I) de $[0,1]$ em $\mathbb{R}$, e considere as normas:*

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \|_\infty : & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & f & \mapsto & \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{rccc} \| \cdot \|_1 : & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & f & \mapsto & \int_0^1 |f(x)| dx \end{array}$$

Mostraremos que estas normas não são equivalentes. Para tanto, consideraremos a bola:

$$B_{d_{\|\cdot\|_\infty}}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

e mostraremos que, para qualquer número real $\lambda > 0$ tem-se:

$$B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, \lambda) \not\subset B_{d_{\|\cdot\|_\infty}}\left(0, \frac{1}{2}\right)$$

De fato, seja $a > 0$ tal que $a < \min\{2\lambda, 1\}$. A função:

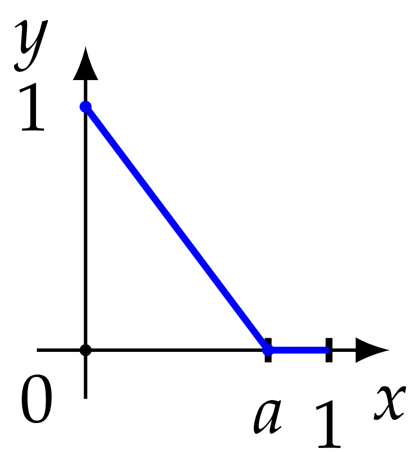
$$\begin{array}{rccc} f: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -\dfrac{1}{a} \cdot x + 1, \ se \ 0 \leq x \leq a \\ 0, \ se \ a \leq x \leq 1 \end{cases} \end{array}$$

é tal que $f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Note que $f \in B_{d_{\|\cdot\|_1}}(0, \lambda)$, *De fato, vale:*

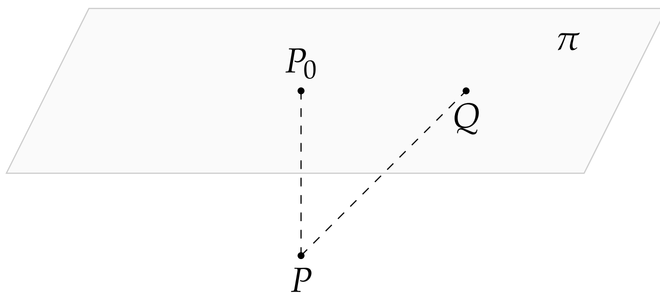
$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx = \frac{a}{2} < \lambda$$

Mas note que $\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| \mid x \in [0,1]\} = 1$, *de modo que* $f \notin B_{d_{\|\cdot\|_\infty}}\left(0, \frac{1}{2}\right)$.



3.9 Distâncias entre pontos e conjuntos

Sejam P um ponto do espaço tridimensional e π um plano no qual P não incide. Definimos a distância entre o ponto P e o plano π como sendo a distância entre o ponto P e o ponto P_0 que é a interseção de π com a reta perpendicular a π que contém o ponto P. Nós definimos a distância entre o ponto e a reta deste modo devido ao seguinte (e bem conhecido) resultado: "O segmento perpendicular a um certo plano por um ponto dado tem medida menor (ou é menor) que qualquer segmento de oblíqua a esse plano, pelo ponto dado."



Isto significa que, para qualquer $Q \in \pi$, tem-se med. $(\overline{PP_0}) \leq$ med. $(\overline{PQ})$.

Veremos, na sequência, que esta definição está englobada num contexto mais amplo, o dos espaços métricos em geral.

Definição 3.58. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $X \subseteq M$ um subconjunto não-vazio. A **distância entre** x_0 **e** X é denotada por $d(a, X)$ e dada por:*

$$d(x_0, X) = \inf\{d(x_0, x) \mid x \in X\}$$

Proposição 3.59. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $X \subseteq M$ um subconjunto não vazio e $x_0, y_0 \in M$. Tem-se:*

$$|d(x_0, X) - d(y_0, X)| \leq d(x_0, y_0)$$

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Devemos mostrar que:

$$-d(x_0, y_0) \leq d(x_0, X) - d(y_0, X) \leq d(x_0, y_0).$$

Note que para todo $x \in X$ tem-se:

$$d(x_0, X) \overset{\substack{\text{def.}\\ \uparrow}}{=} \inf\{d(x_0, x) \mid x \in X\} \leq d(x_0, x) \overbrace{\leq}^{\text{D.T.}} d(x_0, y_0) + d(y_0, x)$$

ou seja,

$$d(x_0, X) - d(x_0, y_0) \leq d(y_0, x)$$

Uma vez que:

$$(\forall x \in X)[d(x_0, X) - d(x_0, y_0) \leq d(y_0, x)]$$

segue que $d(x_0, X) - d(x_0, y_0)$ é uma cota inferior para o conjunto $\{d(y_0, x) \mid x \in X\}$. Sendo o ínfimo de um conjunto a *maior* de suas cotas inferiores, segue que:

$$d(x_0, X) - d(x_0, y_0) \leq \inf\{d(b, x) \mid x \in X\} = d(b, X).$$

e portanto:

$$d(x_0, X) - d(y_0, X) \leq d(x_0, y_0).$$

Agora, se na desigualdade acima permutarmos y_0 e x_0, usando a simetria da métrica, obtemos:

$$d(y_0, X) - d(x_0, X) \leq d(y_0, x_0) = d(x_0, y_0),$$

e multiplicando os dois membros por -1, segue que:

$$-d(x_0, y_0) \leq d(x_0, X) - d(y_0, X).$$

Assim,

$$-d(x_0, y_0) \leq d(x_0, X) - d(y_0, X) \leq d(x_0, y_0),$$

ou seja,

$$|d(x_0, X) - d(y_0, X)| \leq d(x_0, y_0).$$

□

Corolário 3.60. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $x_0, y_0, x \in M$. Vale que:*

$$|d(x_0, x) - d(y_0, x)| \leq d(x_0, y_0).$$

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Com efeito, tomando $X = \{x\}$ e observando que:

$$d(x_0, X) = \inf\{d(x_0, x) \mid x \in \{x\}\} = d(x_0, x),$$
$$d(y_0, X) = \inf\{d(y_0, x) \mid x \in \{x\}\} = d(y_0, x),$$

segue o resultado. □

Definição 3.61 (distância entre dois subconjuntos). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X, Y \subseteq M$ dois subconjuntos não-vazios. A **distância entre** X **e** Y é denotada por $d(X, Y)$ e dada por:*

$$d(X, Y) = \inf\{d(x, y) \mid (x \in X)\&(y \in Y)\}$$

Note que quando $X \cap Y \neq \varnothing$, tem-se:

$$d(X, Y) = 0.$$

De fato, neste caso existe $z \in X \cap Y$, de modo que:

$$0 = d(z, z) \in \{d(x, y) \mid (x \in X)\&(y \in Y)\}$$

e portanto:

$$0 \leq \inf\{d(x, y) \mid (x \in X)\&(y \in Y)\} \leq 0$$

3.10 Três Métricas para o Produto Cartesiano de Espaços Métricos

Sejam $\mathcal{M}_1 = (M_1, d_1), \cdots, \mathcal{M}_n = (M_n, d_n)$ espaços métricos. A exemplo das métricas introduzidas em $\mathbb{R}^n$ nas seções anteriores, podemos definir, canonicamente, três métricas sobre o produto cartesiano:

$$\prod_{i=1}^{n} M_i = M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_i \times \cdots M_n = \{(x_1, x_2, \cdots, x_i, \cdots, x_n) \mid (\forall i \in \{1, \cdots, n\})(x_i \in M_i)\}$$

Colocamos:

$$\begin{array}{rccc} d_E: & (\prod_{i=1}^{n} M_i) \times (\prod_{i=1}^{n} M_i) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (d_i(x_i, y_i))^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d_S: & (\prod_{i=1}^{n} M_i) \times (\prod_{i=1}^{n} M_i) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} d_M: & (\prod_{i=1}^{n} M_i) \times (\prod_{i=1}^{n} M_i) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) & \mapsto & \max\{d_i(x_i, y_i) \mid i \in \{1, \cdots, n\}\} \end{array}$$

Teorema 3.62. *Sejam $\mathcal{M}_1 = (M_1, d_1), \cdots, \mathcal{M}_n = (M_n, d_n)$ espaços métricos. As métricas d_E, d_S, d_M, no produto $\prod_{i=1}^{n} M_i$ são todas equivalentes.*

Demonstração. [Estratégia da prova: utilizar a **Proposição 3.53**] Note que valem, para quaisquer $x = (x_1, \cdots, x_n), y = (y_1, \cdots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i$ as desigualdades:

$$\begin{aligned} d_M(x, y) &= \max\{d(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} \leq d_E(x, y) = \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2} \leq \\ &\leq \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2} + \cdots + \sqrt{d_n(x_n, y_n)^2} = d_1(x_1, y_1) + \cdots + d_n(x_n, y_n) = d_S(x, y) \leq \\ &\leq n \cdot \max\{d_i(x_i, y_i) \mid 1 \leq i \leq n\} = n \cdot d_M(x, y) \end{aligned}$$

ou seja:

$$\left(\forall x \in \prod_{i=1}^{n} M_i\right) \left(\forall y \in \prod_{i=1}^{n} M_i\right) (d_M(x, y) \leq d_E(x, y) \leq d_S(x, y) \leq n \cdot d_M(x, y))$$

Pela **Proposição 3.53**, segue que $d_M \sim d_E$ e $d_S \sim d_M$. $\square$

3.11 Isometrias

Definição 3.63 (imersão isométrica). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ dois espaços métricos e seja $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é uma* ***imersão isométrica*** *se, e somente se:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y)),$$

isto é, se f preservar distâncias.

Vemos imediatamente que toda imersão isométrica é injetora: de fato, dados $x, y \in M$ tais que $x \neq y$, vale $d_M(x, y) > 0$, de modo que $d_N(f(x), f(y)) = d_M(x, y) > 0$, ou seja, $f(x) \neq f(y)$.

Definição 3.64 (isometria). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ dois espaços métricos e seja $f : M \to N$ uma imersão isométrica. Se f for sobrejetora, dizemos que f é uma* ***isometria****.*

Exemplo 3.65. *Dado qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, a função identidade:*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{id}_M : & M & \to & M \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

é uma isometria.

Exemplo 3.66. *Considere o espaço métrico $\mathcal{C} = (\mathbb{C}, d)$,em que:*

$$\begin{array}{rccc} d : & \mathbb{C} \times \mathbb{C} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (z, w) & \mapsto & |z - w| \end{array}$$

e fixemos $u \in \mathbb{C}$ tal que $|u| = 1$. A função:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & z & \mapsto & u \cdot z \end{array}$$

é uma isometria. De fato,

$$d(f(z), f(w)) = d(u \cdot z, u \cdot w) = |u \cdot z - u \cdot w| = |u| \cdot |z - w| = d(z, w).$$

Exemplo 3.67. *Considere o $\mathbb{R}-$espaço vetorial com produto interno $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, e considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|})$,em que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Fixado qualquer $\vec{a} \in \mathbb{R}^n$, a função:*

$$\begin{array}{rccc} T_{\vec{a}} : & \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R}^n \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{a} + \vec{v} \end{array}$$

*denomina-se uma **translação** em $\mathbb{R}^n$. Observe que $T_{\vec{a}}$ é uma isometria de $(\mathbb{R}, d_{\|\cdot\|})$: dados quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d_{\|\cdot\|}(T_{\vec{a}}(\vec{u}), T_{\vec{a}}(\vec{v})) = \|T_{\vec{a}}(\vec{u}) - T_{\vec{a}}(\vec{v})\| = \|\vec{a} + \vec{u} - (\vec{a} + \vec{v})\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = d_{\|\cdot\|}(\vec{u}, \vec{v}).$$

Definição 3.68. *Seja o $\mathbb{R}-$espaço vetorial com produto interno $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Um operador $U : (\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle) \to (\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ é um **operador ortogonal** se:*

$$(\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n)(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n)(\langle U(\vec{u}), U(\vec{v})\rangle = \langle \vec{u}, \vec{v}\rangle)$$

Exemplo 3.69. *Considere o $\mathbb{R}-$espaço vetorial com produto interno $(\mathbb{R}^n, +, \cdot_{\mathbb{R}}, \langle\cdot,\cdot\rangle)$, e considere o espaço métrico $(\mathbb{R}^n, d_{\|\cdot\|})$,em que $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. Todo operador ortogonal é uma isometria de $(\mathbb{R}, d_{\|\cdot\|})$. Com efeito, dados quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$, tem-se:*

$$d_{\|\cdot\|}(U(\vec{u}), U(\vec{v}))^2 = \|U(\vec{u}) - U(\vec{v})\|^2 = \langle U(\vec{u}) - U(\vec{v}), U(\vec{u}) - U(\vec{v})\rangle =$$

$$= \langle U(\vec{u} - \vec{v}), U(\vec{u} - \vec{v})\rangle = \langle \vec{u} - \vec{v}, \vec{u} - \vec{v}\rangle = \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = d_{\|\cdot\|}(\vec{u}, \vec{v})^2$$

donde segue que:

$$(\forall \vec{u} \in \mathbb{R}^n)(\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^n)(d_{\|\cdot\|}(U(\vec{u}), U(\vec{v})) = d_{\|\cdot\|}(\vec{u}, \vec{v}))$$

Observação 3.70. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ dois espaços métricos e seja $f : M \to N$ uma imersão isométrica. Então f se expressa como a composição de uma inclusão com uma isometria.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "f\restriction_M"'] & N \\ f[M] \arrow[ur, "\iota^N_{f[M]}"'] & \end{tikzcd}$$

Proposição 3.71. *Sejam X um conjunto não-vazio qualquer (sem estrutura, a priori) e (M, d) um espaço métrico. Dada uma função injetora $g : X \to M$, a função:*

$$\begin{array}{rccc} \delta : & X \times X & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \mapsto & d(g(x), g(y)) \end{array}$$

é uma métrica em X tal que $g : (X, \delta) \to (M, d)$ é uma imersão isométrica de (X, δ) em (M, d).

Demonstração. [Estrutura da prova: desdobramento direto da definição].

Note, primeiramente, que δ é uma métrica, uma vez que temos:

(M1) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\delta(x,y) = 0 \iff d(g(x),g(y)) = 0 \iff g(x) = g(y) \iff x = y)$;

(M2) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\delta(x,y) = d(g(x),g(y)) = d(g(y),g(x)) = \delta(y,x))$;

(M3) $(\forall x \in X)(\forall y \in X)(\forall z \in X)(\delta(x,z) = d(g(x),g(z)) \leq d(g(x),g(y)) + d(g(y),g(z)) = \delta(x,y) + \delta(y,z))$.

Para verificar que g é uma imersão isométrica, note que dados quaisquer $x, y \in X$ vale: $d(g(x),g(y)) \overset{\text{def}}{=} \delta(x,y)$. □

Proposição 3.72. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M), \mathcal{N} = (N, d_N)$ e $\mathcal{P} = (P, d_P)$ espaços métricos, e sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ isometrias. Então $g \circ f : M \to P$ é uma isometria.*

Demonstração. [Estrutura da prova: prova direta] Primeiramente recordamos que a composição de bijeções é uma bijeção. Logo, $g \circ f$ é, em particular, sobrejetora.

Dados quaisquer $x, y \in M$, devemos verificar que:

$$d_P(g \circ f(x), g \circ f(y)) = d_M(x,y).$$

De fato, tem-se:

$$d_P(g \circ f(x), g \circ f(y)) = d_P(g(f(x)), g(f(y))) = d_N(f(x), f(y)) = d_M(x,y).$$

□

Proposição 3.73. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M), \mathcal{N} = (N, d_N)$ espaços métricos. Se $f : M \to N$ é uma isometria, então $f^{-1} : N \to M$ também é uma isometria.*

Demonstração. Com efeito, sejam $y_1, y_2 \in N$ quaisquer. Sendo f bijetora, existem únicos $x_1, x_2 \in M$ tais que $f(x_1) = y_1$ e $f(x_2) = y_2$. Assim, tem-se:

$$d_M(f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2)) = d_M(f^{-1}(f(x_1)), f^{-1}(f(x_2))) = d_M(x_1, x_2) = d_N(f(x_1), f(x_2)) =$$

$$= d_N(y_1, y_2).$$

□

Exemplo 3.74. *Seja* $\mathcal{M} = (M, d_M)$ *um espaço métrico. O conjunto:*

$$Iso\,(\mathcal{M}) = \{f : M \to M \mid f \text{ é uma isometria}\},$$

munido da operação de composição, é um grupo, ou seja,

$$Iso\,(\mathcal{M}) = (Iso\,(\mathcal{M}), \circ : Iso\,(\mathcal{M}) \times Iso\,(\mathcal{M}) \to Iso\,(\mathcal{M}))$$

que para cada $f \in Iso\,(\mathcal{M})$*, o oposto é* f^{-1}*, e o elemento neutro é* id_M*, é um grupo.*

Definição 3.75 (isometria local). *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d_M), \mathcal{N} = (N, d_N)$ *espaços métricos e seja* $f : M \to N$ *uma função. Dizemos que* f *é uma* ***isometria local*** *se, e somente se, para todo* $x \in M$ *existir um número positivo* $r_x > 0$ *tal que:*

$$f \restriction_{B(x,r_x)}: B(x, r_x) \to B(f(x), r_x)$$

é uma isometria.

Proposição 3.76. *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d_M), \mathcal{N} = (N, d_N)$ *e* $\mathcal{P} = (P, d_P)$ *espaços métricos, e sejam* $f : M \to N$ *e* $g : N \to P$ *isometrias locais. Então* $g \circ f : M \to P$ *é uma isometria local.*

3.12 Abertos e Fechados

Nesta parte introduziremos certos conceitos em que os valores das distâncias não são o mais importante, mas o fato de estes serem grandes ou pequenos. As métricas são usadas como instrumentos e não mais como o objeto principal do nosso estudo. Veremos que métricas diferentes podem produzir mesmos resultados. Os conjuntos abertos, que estudaremos em primeiro lugar, constituem a noção central e são parte do liame que conduz dos espaços métricos aos espaços topológicos.

3.13 Conjuntos Abertos

Definição 3.77 (ponto interior/vizinhança). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e consideremos $A \subseteq M$ e $x_0 \in A$. Dizemos que x_0 é um **ponto interior de** A, ou que A é uma **vizinhança de** x_0, se existir $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$.*

Em outras palavras, x_0 é interior a A se, além de x_0, todos os pontos suficientemente próximos de x_0 pertencem a A. É imediato que se $A \subset B$ e A é vizinhança de x_0, então B também é vizinhança de x_0. Alternativamente, se x_0 é ponto interior de A e $A \subset B$, então x_0 também é um ponto interior de B.

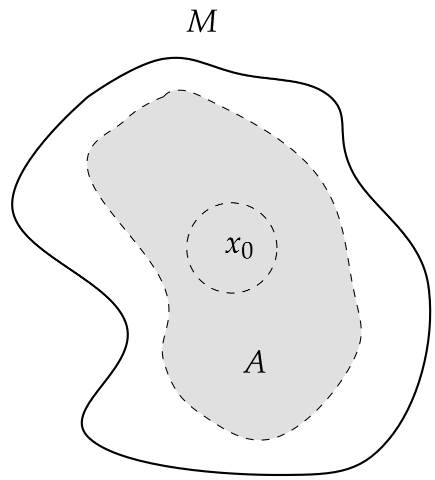
Definição 3.78 (interior de um conjunto). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e consideremos $A \subseteq M$. O conjunto de todos os pontos interiores de A é denominado **o interior de** A, e será denotado por:*

$$\text{int.}(A) = \overset{\circ}{A} = \{x \in M \mid (\exists \delta > 0)(B(x, \delta) \subset A)\}$$

Definição 3.79 (conjunto aberto). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e consideremos $A \subseteq M$. Dizemos que A é **aberto** se, e somente se:*

$$A = \text{int.}(A).$$

Equivalentemente, A é aberto se, e somente se, para todo $x_0 \in A$ existir $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$.



Proposição 3.80. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq M$. Tem-se, sempre,* $\text{int}(A) \subseteq A$.

Demonstração. Dado qualquer $x_0 \in \text{int.}(A)$, existirá $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset A$. Como $x_0 \in B(x_0, \delta) \subset A$, segue que $x_0 \in A$. □

Exemplo 3.81. *Pela **Proposição 3.33**, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, toda bola aberta é um conjunto aberto.*

Observação 3.82. *Pode ocorrer $A \not\subseteq \text{int}(A)$. De fato, no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}^2, d_E)$,em que $d_E((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$, considere $\delta > 0$ e $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$:*

$$B[(x_0, y_0), \delta] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta\}$$

Seja $(x_0 + \delta, y_0) \in B[(x_0, y_0), \delta]$, que é um ponto tal que $\sqrt{(x_0 + \delta - x_0)^2 + (y_0 - y_0)^2} = \delta$. Afirmamos que nenhuma *bola aberta centrada em $(x_0 + \delta, y_0)$ pode estar inteiramente contida em $B[(x_0, y_0), \delta]$.*

Seja $\eta > 0$ qualquer. Mostraremos que $B((x_0 + \delta, y_0), \eta) \not\subseteq B[(x_0, y_0), \delta]$: basta tomarmos o ponto $\left(x_0 + \delta + \frac{\eta}{2}, y_0\right) \in B((x_0 + \delta, y_0), \eta)$, que é tal que:

$$d_E\left((x_0, y_0), \left(x_0 + \delta + \frac{\eta}{2}, y_0\right)\right) = \sqrt{\left(x_0 + \delta + \frac{\eta}{2} - x_0\right)^2 + (y_0 - y_0)^2} = \sqrt{\left(\delta + \frac{\eta}{2}\right)^2} =$$

$$= \left|\delta + \frac{\eta}{2}\right| = \delta + \frac{\eta}{2} > \delta,$$

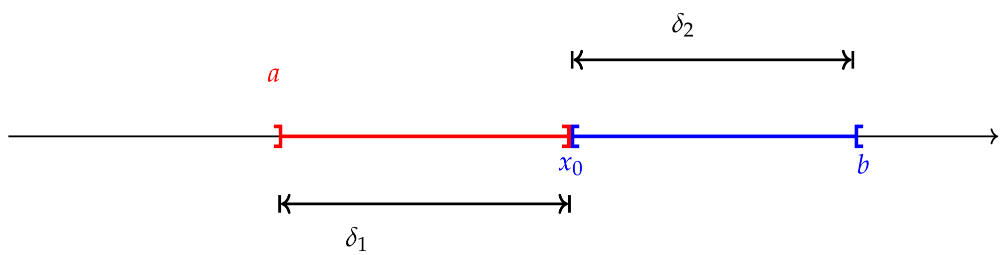
de tal modo que $\left(x_0 + \delta + \frac{\eta}{2}, y_0\right)$ sempre é um ponto de $B((x_0 + \delta, y_0), \eta)$ que não pertence *a $B[(x_0, y_0), \delta]$. Assim,*

$$(\forall \eta > 0)(B((x_0+\delta, y_0), \eta) \not\subseteq B((x_0, y_0), \delta)),$$

e portanto $(x_0+\delta, y_0) \in B[(x_0,y_0),\delta]$ *mas* $(x_0+\delta, y_0) \notin \operatorname{int}(B[(x_0,y_0),\delta])$.

Exemplo 3.83. *Considere* $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,*em que* $d(x,y) = |x-y|$. *Dados quaisquer* $a < b$, *o conjunto* $]a,b[\subset \mathbb{R}$ *é aberto. De fato, dado qualquer* $x_0 \in]a,b[$, *sejam* $\delta_1 = d(a,x_0) = |a-x_0|$ *e* $\delta_2 = d(b,x_0) = |b-x_0|$. *Basta tomarmos* $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, *e teremos:*

$$B(x_0,\delta) =]x_0-\delta, x_0+\delta[\subset]a,b[$$



Proposição 3.84. *Seja* $\mathcal{M} = (M,d)$ *um espaço métrico e consideremos* $\wp(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \text{int.}: & \wp(M) & \to & \wp(M) \\ & A & \mapsto & \text{int.}(A) \end{array}$$

é tal que:

(a) $\text{int.}(A) \subseteq A$ *(deflacionário);*

(b) $A \subset B \Rightarrow \text{int.}(A) \subset \text{int.}(B)$ *(monótono);*

(c) $\text{int.}(\text{int.}(A)) = \text{int.}(A)$ *(idempotente);*

Demonstração. Ad (a): Veja a **Proposição 3.80**.

Ad (b): Seja $x_0 \in \text{int.}(A)$, de modo que existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0,\delta) \subset A$. Uma vez que $A \subset B$, segue que $B(x_0,\delta) \subset A \subset B$, e portanto $x_0 \in \text{int.}(B)$.

Ad (c): Pelo item *(a)*, segue imediatamente que $\text{int.}(\text{int.}(A)) \subseteq \text{int.}(A)$. Resta-nos demonstrar que $\text{int.}(A) \subseteq \text{int.}(\text{int.}(A))$.

Dado $x_0 \in \text{int.}(A)$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0,\delta) \subset A$. Mostraremos que $B(x_0,\delta) \subset \text{int.}(A)$.

Pela **Proposição 3.33**, dado qualquer $x \in B(x_0, \delta)$, existe $\eta > 0$ tal que $B(x, \eta) \subset B(x_0, \delta)$. Como $B(x_0, \delta) \subset A$, segue, por (b), que

$$B(x_0, \delta) = \text{int.}\,(B(x_0, \delta)) \subset \text{int.}\,(A)$$

de onde segue que como $B(x, \eta) \subset B(x_0, \delta)$ então $B(x, \eta) \subset \text{int.}\,(A)$. Assim, $x \in \text{int.}\,(\text{int.}\,(A))$ □

Observação 3.85. *Em virtude do item (a) da* ***Proposição 3.84****, dado um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ qualquer, a fim de demonstrar que um conjunto $A \subset M$ é aberto, basta mostrar que $A \subset \text{int.}\,(A)$.*

Observe que o conjunto de todos os abertos de um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, $\text{Open}\,(M, d)$ contém sempre os conjuntos $\varnothing$ e M, bem como é fechado sob algumas operações "conjuntistas": interseção finita e reunião qualquer. Posteriormente veremos que as propriedades abaixo são exatamente as propriedades que definem uma "topologia" sobre um conjunto.

Teorema 3.86. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico qualquer, e seja $\text{Open}\,(M, d)$ o conjunto de todos os subconjuntos abertos de $\mathcal{M}$, isto é:*

$$\text{Open}\,(M, d) = \{U \subseteq M \mid \text{int.}(U) = U\}.$$

$\text{Open}\,(M, d)$ satisfaz as seguintes propriedades:

(A1) *$M, \varnothing \in \text{Open}\,(M, d)$;*

(A2) *Se I é um conjunto qualquer e $\{U_i \mid i \in I\} \subseteq \text{Open}\,(M, d)$, então:*

$$\bigcup_{i \in I} U_i \in \text{Open}\,(M, d)$$

(A3) *Se $U_1, U_2, \cdots, U_n \in \text{Open}\,(M, d)$, então:*

$$U_1 \cap U_2 \cap \cdots \cap U_n \in \text{Open}\,(M, d)$$

Demonstração. Ad (A1): Por um lado, tem-se sempre $\text{int.}\,(\varnothing) \subset \varnothing$. Como o conjunto vazio é subconjunto de qualquer conjunto, segue também que $\varnothing \subset \text{int.}\,(\varnothing)$. Segue assim que $\text{int.}\,(\varnothing) = \varnothing$.

Ad (A2): Pela **Observação 3.85**, basta mostrarmos que dado qualquer $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Mas, de fato, dado $x \in \bigcup_{i \in I} U_i$ existe algum $i_0 \in I$ tal que $x \in U_{i_0}$. Como, por hipótese, U_{i_0} é aberto, existirá algum $\delta_{i_0} > 0$ tal que $B(x, \delta_{i_0}) \subset U_{i_0} \subset \bigcup_{i \in I} U_i$. Logo, $x \in \text{int.}\,\left(\bigcup_{i \in I} U_i\right)$.

Ad (A3): Novamente, basta mostrarmos que:

$$U_1 \cap \cdots \cap U_n \subseteq \text{int.}\,(U_1 \cap \cdots \cap U_n).$$

Dado $x \in U_1 \cap \cdots \cap U_n$, tem-se:

$$(x \in U_1)\&(x \in U_2)\& \cdots \&(x \in U_n).$$

Como cada $U_i, i \in \{1, \cdots, n\}$, é aberto, exisitirão $\delta_i > 0, i \in \{0, \cdots, n\}$ tais que:

$$(B(x,\delta_1) \subset U_1)\&(B(x,\delta_2) \subset U_2)\& \cdots \&(B(x,\delta_n) \subset U_n)$$

Assim, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \cdots, \delta_n\}$, tem-se:

$$(\forall i \in \{1, \cdots, n\})(B(x,\delta) \subset U_i),$$

e portanto:

$$B(x,\delta) \subset U_1 \cap U_2 \cap \cdots, \cap U_n$$

Assim, segue que $U_1 \cap \cdots \cap U_n \in \text{Open}\,(M,d)$. □

Proposição 3.87. *Seja $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico. Tem-se que $U \subseteq M$ é aberto se, e somente se, for uma reunião de bolas abertas.*

Demonstração. Com efeito, se $U \subseteq M$ é aberto, tem-se $\text{int.}\,(U) = U$, de modo que para todo $x \in U$ existirá algum $\delta_x > 0$ tal que $B(x,\delta_x) \subseteq U$. Assim, tem-se:

$$\bigcup_{x \in U} B(x,\delta_x) = U.$$

Reciprocamente, se U for uma reunião *qualquer* de bolas abertas, como cada bola aberta é um conjunto aberto (veja o **Exemplo 3.81**) e a reunião arbitrária de conjuntos abertos é um conjunto aberto (veja o **Teorema 3.86**), segue que U é aberto.

□

Lema 3.88. *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico e $\mathcal{N} = (N,d_N)$ um subespaço. Denotando por $B_N(x_0,\delta) = \{x \in N \mid d(x,x_0) < \delta\} = \{x \in N \mid d_N(x,x_0) < \delta\}$, temos:*

$$B_N(x_0,\delta) = N \cap B(x_0,\delta).$$

Demonstração. Dado $x \in B_N(x_0,\delta)$, tem-se, por definição de $B_N(x_0,\delta)$, $x \in N$ e $d_N(x,x_0) = d(x,x_0) < \delta$, de modo que $x \in B(x_0,\delta)$. Assim, segue que $B_N(x_0,\delta) \subseteq N \cap B(x_0,\delta)$.

Reciprocamente, dado $x \in N \cap B(x_0,\delta)$, tem-se $d_N(x,x_0) = d(x,x_0) < \delta$, de modo que $x \in B_N(x_0,\delta)$. Logo, $N \cap B(x_0,\delta) \subseteq B_N(x_0,\delta)$. □

Proposição 3.89. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ um subespaço métrico de $\mathcal{M}$. Um subconjunto $U \subset N$ é aberto se, e somente se, for igual à interseção de N com um conjunto aberto de $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Suponhamos que $U \subset N$ seja aberto. Pela **Proposição 3.87**, podemos escrever:

$$U = \bigcup_{x \in U} B_N(x, \delta_x),$$

Tomando $\mathcal{U}$ como a reunião das bolas abertas correspondentes na métrica d:

$$\mathcal{U} = \bigcup_{x \in U} B(x, \delta_x),$$

que é um aberto de $\mathcal{M}$, teremos:

$$\mathcal{U} \cap N = U,$$

de modo que U é a interseção de N com um aberto de $\mathcal{M}$.

Reciprocamente, suponhamos que U seja a interseção de N com um aberto, $\mathcal{U}$, de $\mathcal{M}$, ou seja, $U = N \cap \mathcal{U}$. Dado $x \in U$ tem-se, em particular, $x \in \mathcal{U}$ – de modo que, como $\mathcal{U} = \text{int.}(\mathcal{U})$, existe $\delta_x > 0$ tal que $B(x, \delta_x) \subset \mathcal{U}$. Fazendo a interseção com N, $N \cap B(x, \delta_x)$, pelo **Lema 3.88**, obtemos $B_N(x, \delta_x) \subset U$ – ou seja, U é uma vizinhança de x. Como x é um ponto qualquer, tem-se que U, sendo vizinhança de todos os seus pontos, é um conjunto aberto em N.

$\square$

Proposição 3.90. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ um subespaço métrico aberto de $\mathcal{M}$ (ou seja, $N \subseteq M$). Um conjunto $U \subseteq N$ é aberto em $\mathcal{M}$ se, e somente se, U é aberto em $\mathcal{N}$.*

Demonstração. Se $U \subseteq N$ for aberto em $\mathcal{M}$, pela **Proposição 3.89**, U também será aberto em $\mathcal{N}$, pois $U = U \cap N$.

Se U for aberto em $\mathcal{N}$, existe $\mathcal{U}$ aberto em $\mathcal{M}$ tal que $U = \mathcal{U} \cap N$. Uma vez que $N \subseteq M$ é aberto, segue que U, por ser uma interseção de abertos de $\mathcal{M}$, é também um aberto de $\mathcal{M}$. $\square$

Proposição 3.91. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A \subseteq M$. O interior de A é o maior subconjunto aberto de A. Equivalentemente, se U é um aberto de $\mathcal{M}$ tal que $U \subset A$, então $U \subseteq \text{int.}(A)$.*

Demonstração. Já vimos que $\text{int.}(\text{int.}(A)) = \text{int.}(A)$ – ou seja, que $\text{int.}(A)$ é um subconjunto aberto de A.

Seja U um aberto de $\mathcal{M}$ tal que $U \subset A$. Dado $x \in U$, como U é aberto, existirá $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset U \subseteq A$. Deste modo, dado $x \in U$ existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \subset A$, ou seja, $x \in \text{int.}(A)$. Segue, portanto, que $U \subseteq \text{int.}(A)$. $\square$

Definição 3.92 (vizinhança de subconjunto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $C, V \subset M$. Dizemos que V* ***é uma vizinhança de*** *C se, e somente se, existir um aberto U tal que $C \subset U \subset V$.*

Definição 3.93 (ponto isolado). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $x_0 \in M$. Se $\{x_0\}$ é aberto, dizemos que x_0 é um* ***ponto isolado****.*

Note que dizer que um ponto $x_0 \in M$ é isolado corresponde a dizer que existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) = \{x_0\}$.

Definição 3.94 (ponto aderente). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $x_0 \in M$. Dizemos que x_0* ***é um ponto aderente de*** *X se, e somente se:*

$$(\forall \delta > 0)(B(x_0, \delta) \cap X \neq \varnothing)$$

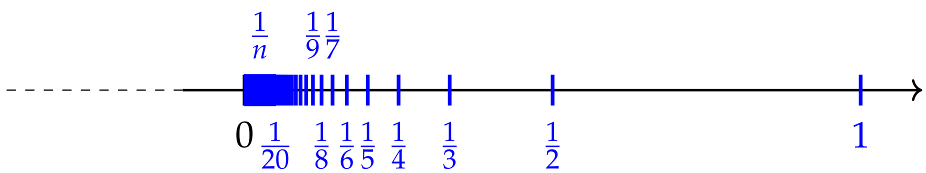
Definição 3.95 (espaço discreto). *Um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ é* ***discreto*** *se, e somente se, todos os seus pontos forem isolados.*

Definição 3.96 (ponto de acumulação). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $x_0 \in M$. Dizemos que x_0* ***é um ponto de acumulação de*** *X se para todo $\delta > 0$, o conjunto $X \cap B(x_0, \delta)$ sempre contiver um ponto distinto de x_0, ou seja, se valer:*

$$(\forall \delta > 0)((B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \cap X \neq \varnothing)$$

Exemplo 3.97. *Considere o espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, \leq)$,em que $d(x, y) = |x - y|$. O número 0 é ponto de acumulação do conjunto:*

$$X = \left\{ \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}.$$



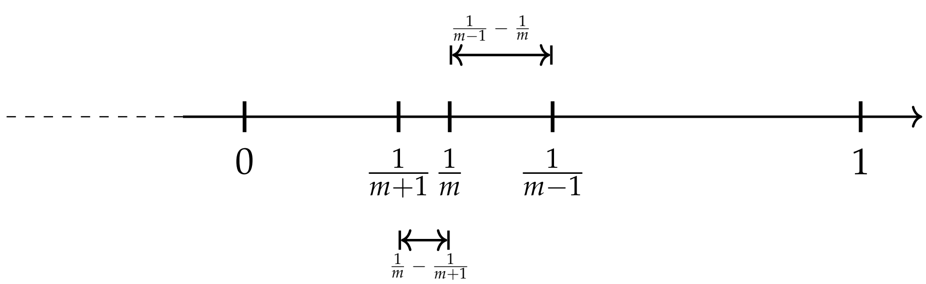
De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, uma vez que $\mathbb{R}$ satisfaz a ***Propriedade Arquimediana****, segue existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$0 < \underbrace{\frac{1}{n_0}}_{\in X} < 0 + \varepsilon,$$

e portanto $\frac{1}{n_0} \in X \cap]0-\varepsilon, 0+\varepsilon[= X \cap B(0,\varepsilon)$.

Note que para qualquer $m \in \mathbb{N}$, embora $\frac{1}{m} \in X$, $\frac{1}{m}$ não é ponto de acumulação de X. De fato, tomemos $\varepsilon = \min\left\{\frac{1}{m} - \frac{1}{m+1}, \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m}\right\} = \min\left\{\frac{1}{m(m+1)}, \frac{1}{m(m-1)}\right\}$, tem-se

$$]m-\varepsilon, m+\varepsilon[\cap X = \left\{\frac{1}{m}\right\}$$



de modo que não é toda bola aberta com centro em $1/m$ que contém pontos de X diferentes de $1/m$.

Definição 3.98 (conjunto derivado). *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. O* ***derivado de*** *X, que denotamos por X', é o conjunto de todos os pontos de acumulação de X.*

Lema 3.99. *Sejam $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico, $X \subseteq M$. Tem-se $(X')' \subset X'$.*

Demonstração. Seja $x_0 \in (X')'$. Dado $\delta > 0$, devemos demonstrar que existe $z_0 \in X \cap (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$. Como, por hipótese, $x_0 \in (X')'$, existe $y_0 \in X' \cap (B(x_0,\delta) \setminus \{x_0\})$. Escolhamos $\gamma > 0$ tal que $\gamma < \min\{d(x_0,y_0), \delta - d(x_0,y_0)\}$. Nestas condições, temos:

$$B(y_0,\gamma) \subset B(x_0,\delta).$$

De fato, dado $y \in B(y_0, \gamma)$ tem-se, simultaneamente, $d(y, y_0) < d(x_0, y_0)$ e $d(y, y_0) < \delta - d(x_0, y_0)$. Pela **Desigualdade Triangular**, tem-se:

$$d(y, x_0) \leq d(y, y_0) + d(y_0, x_0) < \delta - d(x_0, y_0) + d(x_0, y_0) = \delta.$$

Tem-se, assim que $y \in B(x_0, \delta)$, e portanto $B(y_0, \gamma) \subset B(x_0, \delta)$.

Como $y_0 \in X'$, existe $z_0 \in X \cap (B(y_0, \gamma) \setminus \{y_0\}) \subset X \cap B(x_0, \delta)$ com $z_0 \neq x_0$, ou seja, existe $z_0 \in X \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})$, de modo que $x_0 \in X'$. □

Proposição 3.100. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X, Y \subseteq M$ tais que $X \subset Y$. Então tem-se $X' \subset Y'$.*

Demonstração. De fato, dado $x_0 \in X'$, para todo $\delta > 0$ existe $y_0 \in X \cap B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}$. Como $X \subset Y$, tem-se $X \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \subset Y \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\})$, de modo que $Y \cap (B(x_0, \delta) \setminus \{x_0\}) \neq \varnothing$ (pois contém um conjunto não vazio). Assim, $x_0 \in Y'$. □

Proposição 3.101. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X, Y \subseteq M$. Tem-se:*

$$X' \cup Y' \subseteq (X \cup Y)'.$$

Demonstração. Uma vez que $X \subset X \cup Y$, segue da **Proposição 3.100** que $X' \subset (X \cup Y)'$. Analogamente, conclui-se que $Y' \subset (X \cup Y)'$. Assim,

$$X' \cup Y' \subset (X \cup Y)'.$$

□

Definição 3.102 (fecho de um conjunto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. O **fecho** (ou **aderência**) de X, denotado por $\mathrm{Cl.}\,(X)$, é:*

$$\mathrm{Cl.}\,(X) = X \cup X'.$$

Definição 3.103 (conjunto fechado). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. O conjunto X é **fechado** se, e somente se, $\mathrm{Cl.}\,(X) = X$, ou seja, se, e somente se, contiver todos os seus pontos de acumulação, $X' \subset X$.*

Denotaremos o conjunto de todos os subconjuntos fechados de um espaço métrico (M, d) por $\mathrm{Closed}\,(M, d)$.

Proposição 3.104. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $F \subseteq M$. O conjunto F é fechado em $\mathcal{M}$ se, e somente se, $M \setminus F$ for aberto. Equivalentemente,*

$$F \in \operatorname{Closed}(M, d) \iff M \setminus F \in \operatorname{Open}(M, d).$$

Demonstração. Seja $F \subseteq M$ fechado. Mostraremos que $M \setminus F \subseteq \operatorname{int.}(M \setminus F)$.

Dado $x_0 \in M \setminus F$, como x_0 não pode ser ponto de acumulação de F (uma vez que F, sendo fechado, contém todos os seus pontos de acumulação), existe $\delta_0 > 0$ tal que $F \cap (B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\}) = \varnothing$. Desta forma, $B(x_0, \delta_0) \subset M \setminus F$, e $x_0 \in \operatorname{int.}(M \setminus F)$.

Reciprocamente, suponhamos que $M \setminus F$ seja aberto. Então dado qualquer $x_0 \in M \setminus F$ existe algum $\delta_0 > 0$ tal que $B(x_0, \delta_0) \subset M \setminus F$, ou seja, $B(x_0, \delta_0) \cap F = \varnothing$, e *a fortiori*, $F \cap B(x_0, \delta_0) \setminus \{x_0\} = \varnothing$. Segue que x_0 não é ponto de acumulação de F. Assim sendo, F já contém todos os seus pontos de acumulação, e é fechado. $\square$

Teorema 3.105 (Leis de De Morgan). *Sejam M um conjunto e $\{F_i\}_{i \in I}$ uma família de subconjuntos de M. Tem-se:*

(DM1) $M \setminus (\bigcup_{i \in I} F_i) = \bigcap_{i \in I} (M \setminus F_i)$;

(DM2) $M \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i) = \bigcup_{i \in I} (M \setminus F_i)$;

Demonstração. Ad **(DM1)**: Dado $x \in M \setminus (\bigcup_{i \in I} F_i)$, tem-se que $x \notin \bigcup_{i \in I} F_i$. isto significa que, para qualquer $i \in I$, $x \notin F_i$, ou seja, $(\forall i \in I)(x \in M \setminus F_i)$. Isto significa que $x \in \bigcap_{i \in I} (M \setminus F_i)$.

Ad **(DM2)**: Dado $x \in M \setminus (\bigcap_{i \in I} F_i)$, tem-se que $x \notin \bigcap_{i \in I} F_i$. Isto significa que existe pelo menos um $i_0 \in I$ tal que $x \notin F_{i_0}$, ou seja, tal que $x \in M \setminus F_{i_0}$. Mas isto significa:

$$x \in \bigcup_{i \in I} M \setminus F_i.$$

$\square$

Corolário 3.106. *Seja* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico e seja* $\text{Closed}\,(M,d) = \{F \subseteq M \mid F$ *é fechado*$\}$. *Tem-se:*

(F1) $\varnothing$ *e* M *são fechados em* $\mathcal{M}$, *ou seja,* $\varnothing, M \in \text{Closed}\,(M,d)$;

(F2) *Se* $\{F_i\}_{i\in I}$ *é uma família qualquer de fechados, ou seja, se* $\{F_i\}_{i\in I} \subset \text{Closed}\,(M,d)$ *então* $\bigcap_{i\in I} F_i \in \text{Closed}\,(M,d)$, *ou seja,* $\bigcap_{i\in I} F_i$ *é fechado em* $\mathcal{M}$;

(F3) *Se* $F_1, \cdots, F_n \in \text{Closed}\,(M,d)$, *então* $F_1 \cup \cdots \cup F_n \in \text{Closed}\,(M,d)$, *ou seja,* $F_1 \cup \cdots \cup F_n$ *é um subconjunto fechado de* $\mathcal{M}$.

Demonstração. Ad **(F1)**: Sabemos, pelo **Teorema 3.86**, que M é aberto em M, de modo que, pela **Proposição 3.104**, $\varnothing = M \setminus M$ é fechado. Analogamente, como $\varnothing$ é um subconjunto aberto de M, segue que $M = M \setminus \varnothing$ é um subconjunto fechado de M.

Ad **(F2)**: Se $\{F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos fechados de M, pela **Proposição 3.104** tem-se que $\{M \setminus F_i\}_{i\in I}$ é uma família de subconjuntos abertos de M. Pelo item **(A2)** do **Teorema 3.86**, segue que:

$$\bigcup_{i\in I} M \setminus F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Mas, pelas **Leis de De Morgan**, tem-se que:

$$M \setminus \left(\bigcap_{i\in I} F_i\right) = \bigcup_{i\in I} M \setminus F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Logo, pela **Proposição 3.104**, $\bigcap_{i\in I} F_i$ é um subconjunto fechado de M;

Ad **(F3)**: Pela **Proposição 3.104**, tem-se que $M \setminus F_1, \cdots, M \setminus F_n$ são subconjuntos abertos de M. Pelo item **(A3)**, tem-se que:

$$\bigcap_{i=1}^{n} M \setminus F_i$$

é um subconjunto aberto de M. Pelas **Leis de De Morgan**, tem-se que:

$$M \setminus \left(\bigcap_{i=1}^{n} F_i\right) = \bigcup_{i=1}^{n} M \setminus F_i$$

é um subconjunto aberto de M e, pela **Proposição 3.104**, segue que $\bigcup_{i=1}^{n} F_i$ é um subconjunto fechado de M.

$\square$

Proposição 3.107. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. Tem-se $X \subseteq \text{Cl.}(X)$.*

Demonstração. Uma vez que $\text{Cl.}(X) = X \cup X'$, segue que $X \subseteq X \cup X' = \text{Cl.}(X)$. □

Proposição 3.108. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X, Y \subseteq M$. Se $X \subseteq Y$ então $\text{Cl.}(X) \subseteq \text{Cl.}(Y)$.*

Demonstração. Pela **Proposição 3.108**, como $X \subset Y$, tem-se $X' \subset Y'$. Desta forma, segue que:

$$\text{Cl.}(X) = X \cup X' \subset Y \cup Y' = \text{Cl.}(Y).$$

□

Teorema 3.109. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x_0 \in M$ e $X \subseteq M$ não vazio. Tem-se $d(x_0, X) = d(x_0, \text{Cl.}(X))$*

Demonstração. Como $X \subseteq \text{Cl.}(X)$, tem-se:

$$\{d(x_0, x) \mid x \in X\} \subseteq \{d(x_0, x) \mid x \in \text{Cl.}(X)\}$$

e portanto:

$$d(x_0, \text{Cl.}(X)) = \inf\{d(x_0, x) \mid x \in \text{Cl.}(X)\} \leq \inf\{d(x_0, x) \mid x \in X\} = d(x_0, X)$$

[**Ideia da prova de que** $d(x_0, \text{Cl.}(X)) \not< d(x_0, X)$: se tivéssemos $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < d(x_0, X)$ existiria algum $m \in \mathbb{R}$ tal que $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m < d(x_0, X)$ ou seja, tal que $(d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m) \wedge (m < d(x_0, X))$. Desta forma, se mostrarmos que, para todo $m \in \mathbb{R}$ tem-se $\neg((d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m) \wedge (m < d(x_0, X)))$, equivalentemente, $(d(x_0, \text{Cl.}(X)) \geq m) \vee (m \geq d(x_0, X))$, lembrando que são equivalentes $\alpha \to \beta$ e $\neg\alpha \vee \beta$, se mostrarmos que para qualquer que seja $m \in \mathbb{R}$, $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m \Rightarrow d(x_0, X) < m$, teremos mostrado que $d(x_0, \text{Cl.}(X)) \not< d(x_0, X)$.]

A fim de demonstrar o resultado, basta mostrarmos que não ocorre $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < d(x_0, X)$. Se este fosse o caso, existiria algum número real m tal que $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m < d(x_0, X)$. Para mostrar que a desigualdade não ocorre, bastará mostrarmos que sempre que $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m$ tem-se $d(x_0, X) < m$.

Se $d(x_0, \text{Cl.}(X)) < m$, então existe algum $\bar{x} \in \text{Cl.}(X)$ tal que $d(x_0, \bar{x}) < m$ (se não, $d(x_0, \text{Cl.}(X))$ não seria um ínfimo). Como $\bar{x}$ é um ponto aderente a X, dado $\varepsilon = m - d(x_0, \bar{x}) > 0$, existe $x \in X$ tal que $d(\bar{x}, x) < \varepsilon = m - d(x_0, \bar{x})$. Da **Desigualdade Triangular** segue que:

$$d(x_0, X) \leq d(x_0, x) \leq d(x_0, \bar{x}) + d(\bar{x}, x) < d(x_0, \bar{x}) + m - d(x_0, \bar{x}) = m$$

Logo,

$$(d(x_0, \text{Cl.}\,(X)) \leq d(x_0, X))\&(d(x_0, \text{Cl.}\,(X)) \not< d(x_0, X))$$

ou seja,

$$d(x_0, \text{Cl.}\,(X)) = d(x_0, X).$$

□

O resultado que acabamos de demonstrar nos diz, coloquialmente, que a distância de qualquer ponto $x_0 \in M$ a um conjunto X é exatamente igual à sua distância ao fecho de X, $\text{Cl.}\,(X)$. Em particular, se $x \in \text{Cl.}\,(X)$ então $d(x, X) = d(x, \text{Cl.}\,(X)) = 0$.

Proposição 3.110. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subseteq M$ um conjunto. O fecho de X, $\text{Cl.}\,(X)$, é um subconjunto fechado de M.*

Demonstração. Uma vez que $\text{Cl.}\,(X) = X \cup X'$, tem-se $X \subset X \cup X' = \text{Cl.}\,(X)$.

Para demonstrarmos a inclusão recíproca, basta observar que, para qualquer $x \in X$, tem-se que se $x \in \text{Cl.}\,(\text{Cl.}\,(X))$ então, $d(x, \text{Cl.}\,(X)) = 0$ o que implica, pelo **Teorema 3.109**, que $d(x, X) = 0$, ou seja, $x \in \text{Cl.}\,(X)$. □

Proposição 3.111. *Dados um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e $A \subseteq M$, $\text{Cl.}\,(A)$ é o menor fechado que contém A.*

Demonstração. Seja $F \subset M$ um conjunto fechado tal que $A \subset F$. Pelo item (b) da **Proposição 3.113**, tem-se $\text{Cl.}\,(A) \subset \text{Cl.}\,(F)$, e como F é fechado tem-se, por definição, $\text{Cl.}\,(F) = F$. Segue, assim, que $\text{Cl.}\,(A) \subset F$. □

Proposição 3.112. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X, Y \subseteq M$. Tem-se:*

$$\text{Cl.}\,(X \cup Y) = \text{Cl.}\,(X) \cup \text{Cl.}\,(Y).$$

Demonstração. Temos, por um lado, $\text{Cl.}\,(X) \cup \text{Cl.}\,(Y) = (X \cup X') \cup (Y \cup Y') = (X \cup Y) \cup (X' \cup Y')$. Pela **Proposição 3.101**, tem-se que $(X \cup Y) \cup (X' \cup Y') \subseteq (X \cup Y) \cup (X \cup Y)' = \text{Cl.}\,(X \cup Y)$. Logo,

$$\text{Cl.}\,(X) \cup \text{Cl.}\,(Y) \subseteq \text{Cl.}\,(X \cup Y).$$

Observe, agora que, por **(F3)**, $\text{Cl.}\,(X) \cup \text{Cl.}\,(Y)$ é fechado, pois é a reunião (finita) de dois conjuntos fechados. Note também que, uma vez que $X \subseteq \text{Cl.}\,(X)$ e $Y \subseteq \text{Cl.}\,(Y)$, vale

$X \cup Y \subseteq \mathrm{Cl.}\,(X) \cup \mathrm{Cl.}\,(Y)$.

Segue, portanto, que $\mathrm{Cl.}\,(X) \cup \mathrm{Cl.}\,(Y)$ é um conjunto fechado que contém $X \cup Y$. Vimos, na **Proposição 3.111**, que $\mathrm{Cl.}\,(X \cup Y)$ é o *menor* fechado que contém $X \cup Y$, logo:

$$\mathrm{Cl.}\,(X \cup Y) \subseteq \mathrm{Cl.}\,(X) \cup \mathrm{Cl.}\,(Y).$$

Como valem ambas as inclusões, segue que:

$$\mathrm{Cl.}\,(X \cup Y) = \mathrm{Cl.}\,(X) \cup \mathrm{Cl.}\,(Y).$$

□

A proposição a seguir sintetiza alguns fatos sobre a função (o "operador de") fecho:

Proposição 3.113. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e consideremos $\wp(M) = \{X \mid X \subseteq M\}$. A função:*

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{Cl.}: & \wp(M) & \to & \wp(M) \\ & X & \mapsto & \mathrm{Cl.}\,(X) \end{array}$$

é tal que:

(a) $X \subseteq \mathrm{Cl.}\,(X)$ *(inflacionário);*

(b) $X \subset Y \Rightarrow \mathrm{Cl.}\,(X) \subset \mathrm{Cl.}\,(Y)$ *(monótono);*

(c) $\mathrm{Cl.}\,(\mathrm{Cl.}(X)) = \mathrm{Cl.}\,(X)$ *(idempotente)*

Proposição 3.114. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ um subespaço. Então $F \subset N$ é fechado em $\mathcal{N}$ se, e somente se, for a interseção de N com um fechado de $\mathcal{M}$.*

Demonstração. [Estratégia da prova: usar o **Teorema 3.104**] Tem-se que $F \subseteq N$ é fechado em N se, e somente se, $N \setminus F$ é aberto em N. Mas $N \setminus F$ é aberto em N se, e somente se, existir um aberto $U \subset M$ tal que $U \cap N = N \setminus F$. Finalmente, $U \subseteq M$ é aberto em M se, e somente se, $\widetilde{F} = M \setminus U \subseteq M$ é fechado em M. Finalmente, note que:

$$\widetilde{F} \cap N = (M \setminus U) \cap N = M \setminus (U \cap N) = M \setminus (N \setminus F) = F.$$

□

Proposição 3.115. *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $N \subset M$ fechado em $\mathcal{M}$. Uma condição necessária e suficiente para que $F \subset N$ seja fechado em $\mathcal{N}$ é que F seja fechado em $\mathcal{M}$.*

Demonstração. Se $F \subset N$ é fechado, pela **Proposição 3.114**, existe $\widetilde{F} \subset M$ tal que $F = \widetilde{F} \cap N$. Isto significa que F é interseção de dois subconjuntos fechados de M (a saber, $\widetilde{F}$ e N [que é fechado por hipótese]), sendo, portanto (pela propriedade **(F2)**), um fechado de M. Assim,

$$F \overset{\text{fech.}}{\subset} N \overset{N \text{ fech.}}{\Longrightarrow} F \overset{\text{fech.}}{\subset} M.$$

Reciprocamente, se F for tal que existe um fechado $\widetilde{F} \subset M$ tal que $F = \widetilde{F} \cap N$, então pela **Proposição 3.114** segue que F é fechado em N. □

Definição 3.116 (subconjunto denso). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. Dizemos que X é **denso em** M se, e somente se, $\mathrm{Cl.}(X) = M$. Equivalentemente, X é denso em M se, e somente se, dados quaisquer $x_0 \in M$ e $\delta > 0$, $B(x_0, \delta) \cap X \neq \varnothing$.*

Exemplo 3.117. *No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, o conjunto $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$ é denso.*

Afirmação 1: *entre quaisquer dois números reais existe um número racional.*

*Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Pela **Propriedade Arquimediana** de $\mathbb{R}$, segue que dado $\varepsilon = b - a > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$0 < \frac{1}{n} < b - a.$$

*Considere, agora, $A = \{p \in \mathbb{N} \mid p > n \cdot a\}$, de modo que $A \neq \varnothing$. Com efeito, se tivéssemos $A = \varnothing$, então $n \cdot a$ seria uma cota superior para $\mathbb{N}$, o que é absurdo uma vez que $\mathbb{R}$ é arquimediano. Consequentemente, $A \subset \mathbb{N}$ e $A \neq \varnothing$. Pelo **Princípio da Boa Ordem**, A admite um elemento mínimo, que denotaremos por $m = \min A$. Como $m \in A$, tem-se:*

$$\frac{m}{n} > a,$$

e $m \leq p$ para todo $p \in A$. Note, ainda, que $m - 1 \notin A$. Assim,

$$\frac{m}{n} = \frac{m - 1 + 1}{n} = \frac{m - 1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b - a) = b$$

Segue, portanto, que $\frac{m}{n}$ é um número racional entre a e b.

Afirmação 2: *$\mathbb{Q}$ é denso em $\mathbb{R}$.*

De fato, seja $r \in \mathbb{R}$. Dado qualquer $\delta > 0$, tem-se:

$$B(r, \delta) \cap \mathbb{R} =]r - \delta, r + \delta[\cap \mathbb{R}$$

*Uma vez que $r - \delta, r \in \mathbb{R}$ são tais que $r - \delta < r$, pela **Afirmação 1**, segue que existe algum número racional, $\frac{m}{n}$ tal que:*

$$\frac{m}{n} \in]r-\delta, r[\cap\mathbb{R} \subset]r-\delta, r+\delta[\cap\mathbb{R}.$$

Assim, $\text{Cl.}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

3.13.1 A Fronteira de um Conjunto

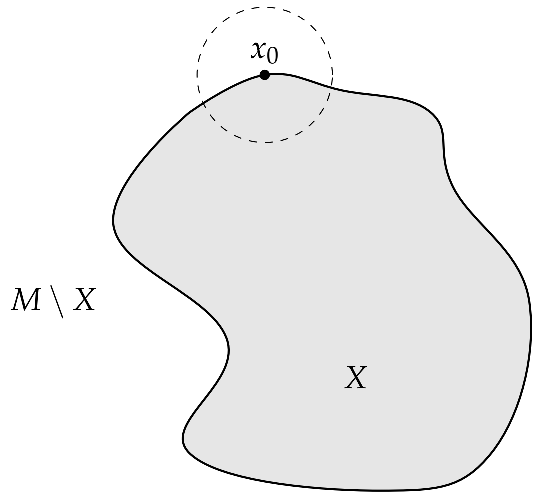
Na Geometria Elementar estudam-se figuras planas, como polígonos e círculos, e figuras espaciais, como poliedros e outros sólidos no espaço. Essas figuras têm contornos que, no primeiro caso, são poligonais fechadas ou circunferências e, no segundo, são superfícies poliedrais ou mais gerais. Esses contornos dividem o plano ou o espaço em duas regiões, uma limitada constituída pelos pontos internos à figura em estudo e a outra ilimitada que representa a parte que é externa à nossa figura.

Podemos nos perguntar como caracterizar, em termos da métrica, os pontos que pertencem à "fronteira entre a parte interna e a parte externa". Nos exemplos considerados, ocorre o seguinte: o ponto não pode ser interior à figura nem interior ao seu complementar. Isso significa que arbitrariamente próximo a um ponto de fronteira existem tanto pontos da figura quanto de seu complementar. Em outras palavras, a distância do "ponto de fronteira" à figura é nula, e o mesmo ocorre com sua distância ao complemento.

Fato semelhante ocorre na reta que é "fronteira" de um semiplano. Generalizando esses fatos para subconjuntos quaisquer de um espaço métrico, chegamos à seguinte:

Definição 3.118 (ponto de fronteira). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $X \subseteq M$ e $x_0 \in M$. Dizemos que x_0 é **ponto de fronteira de** X se, e somente se, para qualquer $\varepsilon > 0$ tivermos, simultaneamente:*

$$B(x_0, \varepsilon) \cap X \neq \varnothing \text{ e } B(x_0, \varepsilon) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing$$



Definição 3.119 (fronteira de um conjunto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subseteq M$. A* ***fronteira de*** *X, que denotamos por* $\operatorname{Fr.}(X)$ *ou por ∂X é o conjunto:*

$$\operatorname{Fr.}(X) = \partial X = \{x \in M \mid (\forall \varepsilon > 0)((B(x,\varepsilon) \cap X \neq \varnothing)\&(B(x,\varepsilon) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing))\}$$

Apesar de ter se originado na ideia de contorno, a noção de fronteira é muito mais complexa, como ilustram alguns exemplos a seguir.

Exemplo 3.120. *No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x - y|$, a fronteira do conjunto $[a,b]$ é $\{a,b\}$, ou seja, $\partial[a,b] = \{a,b\}$.*

Exemplo 3.121. *No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x - y|$, a fronteira do conjunto $\mathbb{Q}$ é $\mathbb{R}$, ou seja, $\partial\mathbb{Q} = \mathbb{R}$.*

Proposição 3.122. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subset M$. Então tem-se* $\operatorname{Fr.}(X) = \operatorname{Fr.}(M \setminus X)$.

Demonstração. Uma vez que $M \setminus (M \setminus X) = X$, $x_0 \in \operatorname{Fr.}(M \setminus X)$ se, e somente se,

$$(\forall \delta > 0)(B(x_0,\delta) \cap M \setminus (M \setminus X) \neq \varnothing)\&(B(x_0,\delta) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing)$$

ou seja,

$$(\forall \delta > 0)(B(x_0,\delta) \cap X \neq \varnothing)\&(B(x_0,\delta) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing)$$

ou seja, se, e somente se, $x_0 \in \operatorname{Fr.}(X)$. Assim, $\operatorname{Fr.}(X) = \operatorname{Fr.}(M \setminus X)$. $\square$

Teorema 3.123. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $X \subset M$.*

$$M = \operatorname{int.}(X) \cup \operatorname{Fr.}(X) \cup \operatorname{int.}(M \setminus X)$$

Demonstração. A inclusão $\operatorname{int.}(X) \cup \operatorname{Fr.}(X) \cup \operatorname{int.}(M \setminus X) \subseteq M$ é sempre válida. Mostremos que a recíproca é verdadeira.

Dado $x \in M$, há somente duas possibilidades: $x \in X$ ou $x \in M \setminus X$.

Se $x \in X$, então $x \in \operatorname{int.}(X)$ ou $x \in X \setminus \operatorname{int.}(X)$. Caso $x \notin \operatorname{int.}(X)$, então $x \in X \setminus \operatorname{int.}(X)$, de modo que para todo $\delta > 0$, $B(x, \delta) \not\subset X$. Isto significa que para todo $\delta > 0$ tem-se $B(x, \delta) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing$, e como $x \in B(x, \delta) \cap X$, segue que $x \in \operatorname{Fr.}(X)$. Logo $x \in X \Rightarrow (x \in \operatorname{int.}(X)) \vee (x \in \operatorname{Fr.}(X))$.

Se $x \in M \setminus X$, então $x \in \operatorname{int.}(M \setminus X)$ ou $x \in (M \setminus X) \setminus \operatorname{int.}(M \setminus X)$. Caso $x \notin \operatorname{int.}(M \setminus X)$, então para todo $\delta > 0$ tem-se $B(x, \delta) \not\subset M \setminus X$, de modo que para todo $\delta > 0$, $B(x, \delta) \cap X \neq \varnothing$. Como $x \in B(x, \delta) \cap (M \setminus X) \neq \varnothing$, segue que $x \in \operatorname{Fr.}(M \setminus X) \overset{\textbf{Prp. } 3.122}{=} \operatorname{Fr.}(X)$.

Mostramos, assim, que:

$$x \in M \Rightarrow \begin{cases} x \in X \Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{int.}(X) \\ x \in \operatorname{Fr.}(X) \end{cases} \\ x \in M \setminus X \Rightarrow \begin{cases} x \in \operatorname{int.}(M \setminus X) \\ x \in \operatorname{Fr.}(M \setminus X) = \operatorname{Fr.}(X) \end{cases} \end{cases}$$

Assim, $M \subseteq \operatorname{int.}(X) \cup \operatorname{Fr.}(X) \cup \operatorname{int.}(M \setminus X)$, e vale:

$$M = \operatorname{int.}(X) \cup \operatorname{Fr.}(X) \cup \operatorname{int.}(M \setminus X)$$

□

Exercícios sobre Vizinhanças, Conjuntos Abertos e Fechados

2.1 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $V \subseteq M$ e $x \in M$. Argumentar que V é uma vizinhança de x se, e somente se, V é uma vizinhança de $\{x\}$.

2.2 Mostrar que, em qualquer espaço métrico, o complemento de uma bola fechada é um conjunto aberto.

2.3 Exibir uma família de subconjuntos abertos de um espaço métrico cuja interseção não seja aberta.

2.4 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$. Mostrar que $\text{int.}\,(A \cap B) = \text{int.}\,(A) \cap \text{int.}\,(B)$.

2.5 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$. Mostrar que $\text{int.}\,(A \cup B) = \text{int.}\,(A) \cup \text{int.}\,(B)$. Exibir um exemplo em que $\text{int.}\,(A \cup B) \not\subset \text{int.}\,(A) \cup \text{int.}\,(B)$.

2.6 Mostrar que um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ em que d é a métrica zero-um é discreto.

2.7 Mostrar que no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, o subespaço $(\mathbb{Z}, d_{\mathbb{Z}})$,em que $d_{\mathbb{Z}}$ é a métrica induzida por d em $\mathbb{Z}$, é discreto.

2.8 Mostrar que no espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, o subespaço $\mathcal{Q} = (\mathbb{Q}, d_{\mathbb{Q}})$,em que $d_{\mathbb{Q}}$ é a métrica induzida por d em $\mathbb{Q}$, *nenhum* ponto é isolado.

2.9 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $x_0 \in M$, então $\text{int.}\,(V)$ também é uma vizinhança de x_0.

2.10 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $C \subset M$ e de $D \subset M$, então V também é uma vizinhança de $C \cup D$.

2.11 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ e $W \subset M$ são vizinhanças de $C \subset M$, então $V \cap W$ também é uma vizinhança de C.

2.12 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é vizinhança de $C \subset M$ se, e somente se, V é vizinhança de todos os pontos de C.

2.13 Mostrar que, em um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, x_0 é um ponto de acumulação de $X \subseteq M$ se, e somente se, $d(x_0, X \setminus \{x_0\}) = 0$;

2.14 No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d_E)$,em que $d_E(x, y) = |x - y|$, determinar o derivado dos seguintes conjuntos:

(a) $]a, b[$,em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$;

(b) $[a, b]$,em que $a, b \in \mathbb{R}$ são tais que $a < b$;

(c) $\varnothing$;

(d) $\mathbb{Q}$;

(e) $\mathbb{Z}$;

(f) $\left\{\dfrac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$.

2.15 Exibir um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e uma família infinita de abertos deste espaço cuja interseção não seja um conjunto aberto.

2.16 Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, o complementar de um disco é um conjunto aberto.

2.17 Mostrar que, em $(\mathbb{R}^2, d_E)$, dados dois discos concêntricos de raios distintos, o maior é uma vizinhança do menor.

2.18 Mostrar que, em qualquer espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$, se $V \subset M$ é uma vizinhança de $C \subset M$, então int. (V) também é uma vizinhança de C.

2.19 Mostrar que, no espaço métrico $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$, dados quaisquer $x_0 \in M$ e $\delta > 0$, $B(x_0, \delta)' = B[x_0, \delta]$

2.20 Exibir um espaço métrico $\mathcal{M} = (M, d)$ e conjuntos $A, B \subset M$ tais que $A \neq B$ mas $A' = B'$.

2.21 Mostrar que qualquer subconjunto de um espaço métrico discreto é, simultaneamente, aberto e fechado.

2.22 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $A, B \subseteq M$ subconjuntos abertos e densos em $\mathcal{M}$. Mostrar que $A \cap B$ é um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{M}$

2.23 Mostrar que o único subconjunto denso em um espaço métrico discreto é o próprio espaço.

2.24 Determinar, no espaço $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$, a fronteira do conjunto $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$

2.25 Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que, dado qualquer $A \subset M$, tem-se Cl. $(A) =$ int. $(A) \cup \partial A$.

2.26 Mostrar que o interior da fronteira de um conjunto aberto é vazia.

2.27 Mostrar que são fechados:

- **(a)** $\mathbb{Z}$ em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,onde $d(x, y) = |x - y|$;
- **(b)** $H = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\}$ em $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$;
- **(c)** $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \geq 0) \& (y \geq 0)\}$ em $\mathcal{E} = (\mathbb{R}^2, d_E)$. Generalizar este resultado.

2.28 Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \| \cdot \|_{PN})$ um espaço vetorial pseudo-normado, ou seja, tal que $\| \cdot \|_{PS} : V \to \mathbb{R}_+$ é uma pseudo-norma, e considere o espaço pseudo-métrico $(V, d_{\| \cdot \|_{PN}})$,em que $d_{\| \cdot \|_{PN}}(x, y) = \|x - y\|_{PN}$. Mostrar que:

- **(a)** $E = \{x \in V \mid d_{\| \cdot \|_{PN}}(x, 0) = 0\}$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{V}$;
- **(b)** Mostrar que Cl. $\{\{0\}\} = E$

3.14 Sequências em Espaços Métricos

Definição 3.124 (sequência). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Uma* ***sequência*** *em $\mathcal{M}$ é uma função:*

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \to & M \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

Costumamos denotar a sequência $x : \mathbb{N} \to M$ por $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ ou, mais frequentemente, por $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Devemos distinguir o conjunto dos termos de uma sequência da sequência propriamente dita. Dada a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, cada imagem de um número natural n por x, $x_n \in M$ é o que denominamos um **termo** da sequência. Assim, o conjunto dos termos da sequência é $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, e a conceituação aqui envolvida é bem diferente da de sequência. Por exemplo, $(1, 1, 2, 1, 1, 2, 1, 1, \cdots)$ é uma sequência de elementos de $\mathbb{R}$ cujos conjunto de termos é $\{1, 2\}$.

Definição 3.125 (subsequência). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e*

$$\begin{array}{rccl} x: & \mathbb{N} & \to & M \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

uma sequência em M. Dada qualquer função estritamente $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, a aplicação:

$$\begin{array}{rccc} x \circ \jmath: & \mathbb{N} & \to & M \\ & k & \mapsto & x(\jmath(k)) = x_{n_k} \end{array}$$

é uma ***subsequência*** *de $x : \mathbb{N} \to M$. Costumamos denotar uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$.*

Definição 3.126 (limite de uma sequência). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico qualquer e $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de M. O ponto $\bar{x} \in M$ é o* ***limite da sequência*** *$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq n_0(\varepsilon)$ então $x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon)$. Equivalentemente, $\bar{x}$ é limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon))$$

Para indicar que $\bar{x}$ é o limite da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ escrevemos:

$$x_n \to \bar{x}$$

ou

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$$

e dizemos que "$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}$".

Exemplo 3.127. *No espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x-y|$, considere a sequência:*

$$\left(\frac{n+2}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

Esta sequência converge para 1.

*De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como $\mathbb{R}$ satisfaz a **Propriedade Arquimediana**, para $\varepsilon/2 > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\frac{1}{n_0(\varepsilon)} < \frac{\varepsilon}{2}$$

de modo que:

$$\frac{2}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon,$$

e portanto:

$$\left|\frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} - 1\right| = \left|\frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} - \frac{n_0(\varepsilon)}{n_0(\varepsilon)}\right| = \left|\frac{2}{n_0(\varepsilon)}\right| = \frac{2}{n_0(\varepsilon)} < \varepsilon,$$

$$\left|\frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} - 1\right| < \varepsilon,$$

$$1 - \varepsilon < \frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} < 1 + \varepsilon,$$

e assim,

$$\frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[= B(1,\varepsilon).$$

Note que, se $n \geq n_0(\varepsilon)$, tem-se:

$$\frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0(\varepsilon)}$$

e portanto:

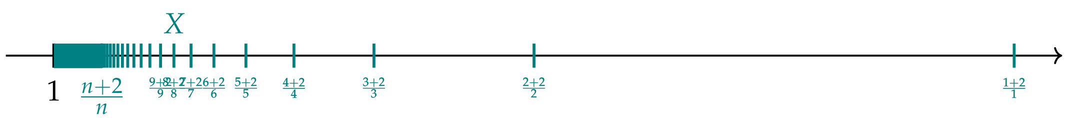
$$\frac{n+2}{n} = 1 + \frac{2}{n} \leq 1 + \frac{2}{n_0(\varepsilon)} = \frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)}$$

donde:

$$1 - \varepsilon < 0 \leq \frac{n+2}{n} \leq \frac{n_0(\varepsilon)+2}{n_0(\varepsilon)} < 1 + \varepsilon$$

ou seja,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{n+2}{n} \in]1-\varepsilon, 1+\varepsilon[= B(1,\varepsilon)$$



Desta forma, $\dfrac{n+2}{n} \to 1.$

Proposição 3.128. *Seja $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico. A sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{x} \in M$ se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon)$$

Demonstração. É evidente, pois $x_n \in B(\bar{x},\varepsilon) \iff d(x_n,\bar{x}) < \varepsilon$. $\square$

Quando uma sequência não converge, dizemos que "a sequência **diverge**".

Exemplo 3.129. *Seja $\mathcal{M} = (M,d)$ um espaço métrico. Uma **sequência estacionária** é uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M tal que existe algum $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow x_n = x_{n+1} = \bar{x}$. Tais sequências são, obviamente, convergentes para $\bar{x}$, o termo que se repete: de fato, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0$, segue-se que $x_n = \bar{x} \in B(\bar{x},\varepsilon)$. Em particular, sequências constantes convergem para a constante.*

Exemplo 3.130. *Consideremos o espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R},d)$,em que $d(x,y) = |x-y|$, e a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\dfrac{n}{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para 1. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) < \varepsilon \iff \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon$$

Note que $\dfrac{n}{n+1} - 1 = \dfrac{n}{n+1} - \dfrac{n+1}{n+1} = -\dfrac{1}{n+1}$*, de modo que nosso trabalho se reduz a exibir $n_0(\varepsilon)$ tal que:*

$$\left|-\frac{1}{n+1}\right| < \varepsilon \iff \frac{1}{n+1} < \varepsilon$$

Mas,

$$\frac{1}{n+1} < \varepsilon \iff \frac{1}{\varepsilon} < n+1 \iff \frac{1}{\varepsilon} - 1 < n.$$

Assim, basta tomarmos $n_0(\varepsilon)$ como o menor inteiro maior do que o número $\frac{1}{\varepsilon} - 1$, que denotamos por $\left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil$. Assim, tem-se:

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} - 1 \right\rceil \Rightarrow \frac{1}{n+1} < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{n}{n+1} - 1\right| < \varepsilon \iff d\left(\frac{n}{n+1}, 1\right) < \varepsilon$$

Tem-se, de fato, $\frac{n}{n+1} \to 1$.

Exemplo 3.131. *Consideremos o espaço métrico $(\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}), d)$,em que:*

$$\begin{array}{rccc} d: & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \times \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (f,g) & \mapsto & \sup\{|f(x) - g(x)| \mid x \in [0,1]\} \end{array}$$

e considere a sequência:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{N} & \to & \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \\ & n & \mapsto & \begin{array}{rccc} f_n: & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{\sin(n \cdot x)}{n} \end{array} \end{array}$$

Mostraremos que $f_n \to 0$.

Seja $\varepsilon > 0$. Queremos exibir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d\left(\frac{\sin(n \cdot x)}{n}, 0\right) < \varepsilon \iff \sup\left\{\left|\frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0\right| \mid x \in [0,1]\right\} < \varepsilon$$

Note que uma condição suficiente para que:

$$\left|\frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0\right| < \varepsilon$$

é:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

uma vez que:

$$(\forall x \in [0,1]) \left(\left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} \right| = \frac{|\sin(n \cdot x)|}{n} \leq \frac{1}{n} \right)$$

Basta, então, tomarmos $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, *e teremos:*

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left((\forall x \in [0,1]) \left(\left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0 \right| < \varepsilon \right) \right)$$

Assim, para qualquer $n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil$, ε *é uma cota superior para o conjunto:*

$$\left\{ \left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0 \right| \mid x \in [0,1] \right\}$$

de modo que:

$$\sup \left\{ \left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0 \right| \mid x \in [0,1] \right\} < \varepsilon$$

Portanto:

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow \sup \left\{ \left| \frac{\sin(n \cdot x)}{n} - 0 \right| \mid x \in [0,1] \right\} < \varepsilon$$

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow d\left(\frac{\sin(n \cdot x)}{n}, 0 \right) < \varepsilon$$

Exemplo 3.132. *Seja* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métricoem que* M *é um conjunto com mais de um ponto, digamos* x, y. *A sequência* $(x, y, x, y, x, y, \cdots)$ não *converge.*

Suponhamos, por absurdo, que a sequência convergisse para $a \in M$. *Tomando-se* $\varepsilon = \frac{d(x,y)}{2}$, $B(a, \varepsilon)$ *deve conter todos os termos da sequência (já que existem apenas dois), de modo que* $x, y \in B(a, \varepsilon)$. *Segue daí que:*

$$d(x,y) \leq d(x,a) + d(a,y) < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon = d(x,y)$$

e portanto:

$$d(x,y) < d(x,y),$$

o que é um absurdo. Logo, como a sequência não converge para nenhum ponto de M, *a sequência diverge.*

Proposição 3.133. *Seja* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico. Se* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *é uma sequência convergente em* $\mathcal{M}$, *então o seu limite é único.*

Demonstração. [Estratégia da prova: supor que existam dois limites e derivar, daí, um absurdo] Suponhamos que existam $\bar{x}, \bar{y} \in M$, $\bar{x} \neq \bar{y}$, tais que $\lim x_n = \bar{x}$ e $\lim x_n = \bar{y}$.

Como $\bar{x} \neq \bar{y}$, tem-se que $d(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, logo, tomando $\varepsilon = \dfrac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2} > 0$, como $x_n \to \bar{x}$, existirá $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

Também, como $x_n \to \bar{y}$, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{y}) < \varepsilon$$

Assim, tomando $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\} \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow ((d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon) \& (d(x_n, \bar{y}) < \varepsilon))$$

o que implica que, para qualquer $n \geq n_0(\varepsilon)$ vale:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) \leq d(\bar{x}, x_n) + d(x_n, \bar{y}) < \varepsilon + \varepsilon = \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2} + \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2} = d(\bar{x}, \bar{y})$$

ou seja,

$$d(\bar{x}, \bar{y}) < d(\bar{x}, \bar{y}),$$

o que é absurdo. □

Proposição 3.134. *Sejam M um conjunto e $d, d' : M \times M \to \mathbb{R}_+$ métricas equivalentes, e considere os espaços métricos $\mathcal{M} = (M, d)$ e $\mathcal{M}' = (M, d')$. Uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{M}$ para um ponto $\bar{x} \in M$ se, e somente se, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge em $\mathcal{M}' = (M, d')$ para $\bar{x}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos, primeiramente, que $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}$, ou seja, que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})((n \geq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow x_n \in B_d(\bar{x}, \varepsilon))$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Devemos demonstrar que existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B_{d'}(\bar{x}, \varepsilon)$.

Como $d \sim d'$, para este $\varepsilon > 0$ existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tal que $B_d(\bar{x}, \lambda) \subseteq B_{d'}(\bar{x}, \varepsilon)$. Novamente, como $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}$, para este $\lambda > 0$ existirá $n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\lambda) \Rightarrow x_n \in B_d(\bar{x}, \lambda) \subseteq B_{d'}(\bar{x}, \varepsilon)$. Assim, tem-se que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\lambda(\varepsilon)) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\lambda(\varepsilon)) \Rightarrow x_n \in B_{d'}(\bar{x}, \varepsilon)),$$

ou seja, $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}'$.

$(\Rightarrow)$ Suponhamos, agora, que $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}'$, ou seja, que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})((n \geq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow x_n \in B_{d'}(\bar{x}, \varepsilon))$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Devemos demonstrar que existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B_d(\bar{x}, \varepsilon)$.

Como $d \sim d'$, para este $\varepsilon > 0$ existe $\lambda = \lambda(\varepsilon) > 0$ tal que $B_{d'}(\bar{x}, \lambda) \subseteq B_d(\bar{x}, \varepsilon)$. Novamente, como $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}$, para este $\lambda > 0$ existirá $n_0(\lambda) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\lambda) \Rightarrow x_n \in B_{d'}(\bar{x}, \lambda) \subseteq B_d(\bar{x}, \varepsilon)$. Assim, tem-se que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\lambda(\varepsilon)) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\lambda(\varepsilon)) \Rightarrow x_n \in B_d(\bar{x}, \varepsilon)),$$

ou seja, $x_n \to \bar{x}$ em $\mathcal{M}$.

□

Proposição 3.135. *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{x} \in \mathbb{N}$, então* toda *subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ também converge para $\bar{x}$.*

Demonstração. Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, em M, convergente para $\bar{x}$, e seja $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ uma função estritamente crescente, e considere a subsequência:

$$\begin{array}{rccc} x \circ \jmath : & \mathbb{N} & \to & M \\ & k & \mapsto & x(\jmath(k)) = x_{n_k} \end{array}$$

que denotaremos por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$. Devemos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, existe $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow x_{n_k} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$$

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Como, por hipótese, $x_n \to \bar{x}$, dado este $\varepsilon > 0$ existirá $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow x_n \in B(\bar{x}, \varepsilon)$$

Como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, sua imagem, $\jmath[\mathbb{N}] \subset \mathbb{N}$ é ilimitada superiormente. Isto significa que, dado $n_0(\varepsilon)$ existem infinitos elementos de $\jmath[\mathbb{N}]$ que são maiores do que $n_0(\varepsilon)$. Seja:

$$k_0(\varepsilon) = \min\{k \in \mathbb{N} \mid \jmath(k) \geq n_0(\varepsilon)\}$$

Assim, como $\jmath : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ é estritamente crescente, tem-se:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow \jmath(k) \geq \jmath(k_0(\varepsilon)) \geq n_0(\varepsilon)$$

ou seja,

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow n_k \geq n_0(\varepsilon)$$

e portanto:

$$x_{n_k} \in B(\bar{x}, \varepsilon)$$

Desta forma, segue que:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow x_{n_k} \in B(\bar{x}, \varepsilon))$$

ou seja,

$$x_{n_k} \to \bar{x}.$$

□

Observação 3.136. *A recíproca da* ***Proposição 3.135*** *é falsa. No espaço métrico* $(\mathbb{R}, d)$,*em que* $d(x, y) = |x - y|$, *considere a sequência* $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, \cdots)$, *que, como vimos no* ***Exemplo 3.132***, *não é convergente. No entanto, as subsequências* $(1, 1, 1, \cdots)$ *e* $(2, 2, 2, \cdots)$ *são convergentes.*

Definição 3.137 (sequência limitada). *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de elementos de M. A sequência* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é* ***limitada*** *se, e somente se, o conjunto de seus termos for limitado, ou seja se:*

$$(\exists K > 0)(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(d(x_m, x_n) \leq K)$$

Proposição 3.138 (Toda sequência convergente é limitada). *Sejam* $\mathcal{M} = (M, d)$ *um espaço métrico e* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de elementos de M. Se* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente, então* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *é limitada.*

Demonstração. Suponhamos que $x_n \to \bar{x}$,em que $\bar{x} \in M$. Dado $\varepsilon = 1$, existe $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(1)$ implica:

$$x_n \in B(\bar{x}, 1).$$

Considere $k = \max\{d(x_i, \bar{x}) \mid i \in \{1, \cdots, n_0(1) - 1\}\}$, e tomemos $M = \max\{k, 1\}$. Tem-se:

$$(\forall i \in \mathbb{N})(\forall j \in \mathbb{N})(d(x_i, x_j) \leq d(x_i, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_j) \leq M + M = 2M)$$

Desta forma, para $K = 2M$ tem-se:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(d(x_m, x_n) \leq K).$$

□

Observação 3.139. *A recíproca da proposição anterior não é válida. De fato, a sequência* $(1, 2, 1, 2, \cdots)$, *apesar de ser limitada, é divergente.*

3.15 Sequência num Espaço Produto

Recorde que dados dois espaços métricos quaisquer, $\mathcal{M}_1 = (M_1, d_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (M_2, d_2)$, vimos três métricas das quais podemos dotar o conjunto $M_1 \times M_2$:

(1)

$$\begin{array}{rccc} d_E: & (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \sqrt{d_1(x_1, x_2)^2 + d_2(y_1, y_2)^2} \end{array}$$

(2)

$$\begin{array}{rccc} d_S: & (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & d_1(x_1, x_2) + d_2(y_1, y_2) \end{array}$$

(3)

$$\begin{array}{rccc} d_M: & (M_1 \times M_2) \times (M_1 \times M_2) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((x_1, y_1), (x_2, y_2)) & \mapsto & \max\{d_1(x_1, x_2), d_2(y_1, y_2)\} \end{array}$$

Definição 3.140 (sequência em espaços-produto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ espaços métricos, e considere $\mathcal{M} \times \mathcal{N} = (M \times N, d)$,em que $d \in \{d_E, d_S, d_M\}$. Uma **sequência de pontos em** $M \times N$ é uma função:*

$$\begin{array}{rccc} x: & \mathbb{N} & \to & M \times N \\ & n & \mapsto & (x_n, y_n) \end{array}$$

que denotamos por $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$,em que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de M e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de N.

Definição 3.141 (convergência). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ espaços métricos, e considere $\mathcal{M} \times \mathcal{N} = (M \times N, d)$,em que $d \in \{d_E, d_S, d_M\}$. Dado $(\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$, dizemos que $((x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}})$ **converge para** $(\bar{x}, \bar{y})$, e escrevemos $(x_n, y_n) \to (\bar{x}, \bar{y})$, se, e somente se:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})((n \geq n_0(\varepsilon)) \Rightarrow (x_n, y_n) \in B_d((\bar{x}, \bar{y}), \varepsilon))$$

Estabeleceremos agora uma condição que dá a convergência de $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ em termos da convergência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e de $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Proposição 3.142. *Sejam $\mathcal{M}_1 = (M_1, d_1)$ e $\mathcal{M}_2 = (M_2, d_2)$ espaços métricos, e considere $\mathcal{M}_1 \times \mathcal{M}_2 = (M_1 \times M_2, d)$,em que $d \in \{d_E, d_S, d_M\}$. Uma sequência $((x_n, y_n))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, \bar{y}) \in M_1 \times M_2$ se, e somente se $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$.*

Demonstração. Pela **Proposição 3.134**, uma vez que pela **Teorema 3.62** $d_E \sim d_S \sim d_M$, basta demonstrarmos o resultado para uma destas métricas em particular. Faremos a demonstração utilizando a métrica da soma, d_S.

($\Rightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{x}, \bar{y})$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_S((x_n, y_n), (\bar{x}, \bar{y})) = d_1(x_n, \bar{x}) + d_2(y_n, \bar{y}) < \varepsilon$$

Em particular, segue que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_1(x_n, \bar{x}) < \varepsilon,$$

de modo que $x_n \to \bar{x}$, e:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_2(y_n, \bar{y}) < \varepsilon,$$

de modo que $y_n \to \bar{y}$.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado. Como, por hipótese, $x_n \to \bar{x}$, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d_1(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e como, por hipótese, $y_n \to \bar{y}$, dado $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow d_2(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tomando $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) + n_2(\varepsilon)$, seguirá que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_S((x_n, y_n), (\bar{x}, \bar{y})) = d_1(x_n, \bar{x}) + d_2(y_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Portanto, segue que:

$$((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{x}, \bar{y}).$$

$\square$

A genralização do resultado acima é imediata para o produto de quaisquer n espaços métricos.

3.16 Sequências em Espaços Vetoriais Normados

No espaço $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, são de grande interesse as sequências ditas "monótonas", que compreendem os seguintes tipos:

• **Sequências crescentes:** são sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $m < n \Rightarrow x_m \leq x_n$. Se $m < n \Rightarrow x_m < x_n$, dizemos que a sequência é estritamente crescente.

• **Sequências Decrescentes** são sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais tais que $m < n \Rightarrow x_n \leq x_m$. Se $m < n \Rightarrow x_n < x_m$, dizemos que a sequência é estritamente decrescente.

Exemplo 3.143. *A sequência* $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *é estritamente decrescente, ao passo que a sequência*

$$(1, 1, 2, 2, 3, 3, \cdots)$$

é crescente. Por sua vez, a sequência $((-1)^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não é monótona.*

Proposição 3.144. *Toda sequência crescente ou estritamente crescente cujo conjunto dos termos é limitado superiormente converge para o supremo deste conjunto.*

Demonstração. [Estrutura da Prova: demonstração por absurdo] Suponhamos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seja uma sequência de números reais tal que $x_1 < x_2 < \cdots < x_n < x_{n+1} < \cdots$, e seja $\bar{x} = \sup\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$. Mostraremos que $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$.

Dado $\varepsilon > 0$, deverá existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\varepsilon)$ então:

$$\bar{x} - \varepsilon < x_n < \bar{x} + \varepsilon$$

De fato, se não fosse este o caso, existiria algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para todo n valeria $x_n \leq \bar{x} - \varepsilon$. Isto implicaria a existência de uma cota superior do conjunto $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ (a saber, $\bar{x} - \varepsilon$) *menor* do que $\bar{x}$ - o que seria uma contradição com o fato de $\bar{x}$ ser o supremo deste conjunto. Assim, existe algum índice $n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$\bar{x} - \varepsilon < x_n < \bar{x} + \varepsilon$$

para todo $n \geq n_0(\varepsilon)$, ou seja:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \varepsilon)$$

A demonstração no caso da sequência ser crescente é totalmente análoga. □

Proposição 3.145. *Toda sequência decrescente ou estritamente decrescente cujo conjunto dos termos é limitado inferiormente converge para o ínfimo deste conjunto.*

Demonstração. Análoga à prova da **Proposição 3.144**. Faça como exercício. □

Teorema 3.146 (da Conservação do Sinal). *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais. Tem-se:*

(i) se $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} > 0$, então existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n > c)$$

(ii) se $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x} < 0$, então existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c < 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n < c)$$

Demonstração.

- Ad (i): tomemos $\varepsilon = \frac{\bar{x}}{2} > 0$. Como $x_n \to \bar{x}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |x_n - \bar{x}| < \frac{\bar{x}}{2}$, ou seja,

$$-\frac{\bar{x}}{2} < x_n - \bar{x} < \frac{\bar{x}}{2}$$

Somando $\bar{x}$ aos três membros acima, obtemos, em particular:

$$\frac{\bar{x}}{2} < x_n$$

Assim,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}) \left(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{\bar{x}}{2} < x_n \right)$$

Basta, portanto, tomarmos $c = \frac{\bar{x}}{2}$.

- Ad (ii): Neste caso, a demonstração é análoga: tomando $\varepsilon = \frac{|\bar{x}|}{2} > 0$, veremos que $c = \frac{\bar{x}}{2}$ cumprirá as condições requeridas.

$\square$

A proposição acima nos diz, em particular, que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, no primeiro caso:

$$(\forall n \geq n_0)(x_n > 0)$$

e no segundo caso:

$$(\forall n \geq n_0)(x_n < 0)$$

Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Para cada $n \in \mathbb{N}$, defina:

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

que denominamos por **a** $n-$**ésima cauda de** X, e defina as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $a_n = \inf X_n$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dada por $b_n = \sup X_n$. Mostraremos a seguir que as sequências $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ambas convergem.

Proposição 3.147. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

Então a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente.

Demonstração. Primeiramente observamos que se $n < m$, então:

$$X_m = \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\} \subseteq \{x_n, x_{n+1}, \cdots, x_m, x_{m+1}, \cdots\} = X_n,$$

ou seja:

$$n < m \Rightarrow X_m \subseteq X_n$$

Da **Proposição 2.107** segue que:

$$n < m \Rightarrow \inf X_n \leq \inf X_m.$$

Segue, assim, que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona crescente (ou seja, a sequência dos ínfimos, $(\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não decresce). Uma vez que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada, tem-se que o conjunto $\{x_1, x_2, \cdots\} \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado – e em particular, superiormente. Assim, temos que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência monótona estritamente crescente e limitada superiormente, logo converge. Assim, pela **Proposição 3.144**, a sequência $(\inf X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$:

$$\inf X_n \to \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Denominamos $\sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ por "limite inferior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$", e o denotamos por:

$$\liminf x_n = \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

□

Tem-se, em particular, que dada qualquer sequência de números reais, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\liminf x_n$ é o menor valor de aderência do conjunto $X = \{x_1, \cdots, x_n, \cdots\}$: com efeito, denotemos $\liminf x_n = \alpha$.

• α é ponto aderente de X: de fato, dado qualquer $\delta > 0$, como $\inf X_n \to \alpha$, existe $n(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n(\delta) \Rightarrow |\inf X_n - \alpha| < \delta$, ou seja, $n \geq n(\delta) \Rightarrow \alpha - \delta < \inf X_n < \alpha + \delta$. Mas sendo $\alpha = \sup\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, $\alpha - \delta$ não pode ser cota superior de $\{\inf X_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, de modo que deve existir $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha - \delta < \inf X_{m_0} \leq \alpha$. Desta forma, para todo $n \geq m_0$, como $x_n \in X_{m_0}$, tem-se $\alpha - \delta < \inf X_{m_0} \leq x_n \leq \alpha$. Conclui-se, portanto, que dado qualquer $\delta > 0$, existe $x_n \in X$ tal que $x_n \in B(\alpha, \delta) \cap X =]\alpha - \delta, \alpha + \delta[\cap X \neq \varnothing$ (basta tomarmos x_n com n maior ou igual m_0).

• se $c < \alpha$, c não é ponto aderente de X: como $\inf X_n \to \alpha$, segue de $c < \alpha$ que existe $n_0(c) \in \mathbb{N}$ tal que $c < \inf X_{n_0(c)} \leq \alpha$. Logo, para $\delta = \inf X_{n_0(c)} - c > 0$, vemos que $c + \delta = \inf X_{n_0(c)}$, logo o intervalo $]c - \delta, c + \delta[$ *não* contém nenhum termo x_n com $n \geq n_0(c)$. Isto significa que c é ponto isolado, ou seja, não é ponto aderente de X.

De modo similar, demonstra-se que $\limsup x_n$ é o *maior* ponto aderente de X.

Proposição 3.148. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:*

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

Então a sequência $(b_n)_{n \in \mathbb{N}} = (\sup X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é convergente.

Demonstração. Exercício. □

3.17 Sequências em Espaços Vetoriais Normados Quaisquer

Nesta subseção, $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|_V)$ denotará um espaço vetorial normado e 0 denotará o vetor nulo.

Proposição 3.149. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de um espaço vetorial normado, $\mathcal{V}$, e que converge para $\bar{x} \in V$. Então existe uma bola de centro na origem que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Tomando $\varepsilon = 1$, existe um índice $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(1) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) = \|x_n - \bar{x}\|_V < 1$$

Como, no entanto,

$$\|x_n\|_V = \|x_n - \bar{x} + \bar{x}\|_V \leq \|x_n - \bar{x}\|_V + \|\bar{x}\|_V$$

para todo $n \geq n_0(1) \in \mathbb{N}$ tem-se:

$$\|x_n\|_V < 1 + \|\bar{x}\|_V$$

Tomemos $\lambda = \max\{\|x_1\|_V, \cdots, \|x_{n_0(1)}\|_V, 1 + \|\bar{x}\|_V\} + 1$. Para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se, assim:

$$d(x_n, 0) = \|x_n\|_V < \lambda$$

de modo que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in B(0, \lambda))$$

□

Definição 3.150 (soma de sequências). *Sejam* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial normado. Dadas duas sequências* $\vec{u} = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *a* ***soma*** *de* $\vec{u}$ *com* $\vec{v}$ *é a sequência:*

$$\begin{array}{rccc} \vec{u} + \vec{v} : & \mathbb{N} & \to & V \\ & n & \mapsto & u_n + v_n \end{array}$$

Escrevemos, assim $\vec{u} + \vec{v} = (u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Definição 3.151 (produto de escalar por sequências). *Sejam* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial normado. Dados um escalar* $\alpha \in \mathbb{K}$ *e uma sequência* $\vec{v} = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, *o* ***produto do escalar*** α ***pela sequência*** $\vec{v}$ *é a sequência:*

$$\begin{array}{rccc} \alpha \cdot \vec{v} : & \mathbb{N} & \to & V \\ & n & \mapsto & \alpha \cdot v_n \end{array}$$

Proposição 3.152. *Sejam* $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$, $\alpha \in \mathbb{K}$ *e* $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ *um* $\mathbb{K}-$*espaço vetorial normado. Sejam* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *e* $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *sequências tais que* $u_n \to \bar{u}$ *e* $v_n \to \bar{v}$. *Então:*

$$\lim_{n\to\infty} (u_n + v_n) = \bar{u} + \bar{v}.$$

e:

$$\lim_{n\to\infty} \alpha \cdot v_n = \alpha \cdot \bar{v}$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Por hipótese, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2} > 0$, existe $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \|u_n - \bar{u}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

e existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ tal que:

$$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow \|v_n - \bar{v}\| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Desta forma, escolhendo $n_0(\varepsilon) = n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) + n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|(u_n + v_n) - (\bar{u} + \bar{v})\| \leq \|u_n - \bar{u}\| + \|v_n - \bar{v}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Isto prova que $(u_n + v_n)_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{u} + \bar{v})$.

No caso em que $\alpha = 0_{\mathbb{K}}$ temos a sequência identicamente nula, que converge para 0_V. Logo, precisamos demonstrar o resultado apenas para $\alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0_V\}$.

Seja dado $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $v_n \to \bar{v}$, por hipótese, dado $\frac{\varepsilon}{|\alpha|} > 0$ existe $n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow \|v_n - \bar{v}\| < \frac{\varepsilon}{|\alpha|}$$

Desta forma, tomando $n_0(\varepsilon) = n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right)$, tem-se que:

$$n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{|\alpha|}\right) \Rightarrow \|\alpha \cdot v_n - \alpha \cdot \bar{v}\| \overset{(\mathbf{N2})}{=} |\alpha| \cdot \|v_n - \bar{v}\| < |\alpha| \cdot \frac{\varepsilon}{|\alpha|} = \varepsilon$$

□

Corolário 3.153. *Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências em $\mathbb{R}$ tais que existe $N_0 \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$n \geq N_0 \Rightarrow x_n \leq y_n$$

e se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ forem ambas convergentes, então:

$$\lim_{n\to\infty} x_n \leq \lim_{n\to\infty} y_n$$

Demonstração. [Estrutura da prova: demonstração por contraposição.] Suponha que tenhamos a negação da tese, ou seja, que valha:

$$\lim_{n\to\infty} x_n > \lim_{n\to\infty} y_n$$

e considere a sequência $(x_n - y_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Da **Proposição 3.152**, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} (-y_n) = -\lim_{n\to\infty} y_n$$

Desta forma, seque que:

$$\lim_{n\to\infty}(x_n - y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n > 0$$

Segue, portanto, do **Teorema da Conservação do Sinal, Teorema 3.146**, que existem um índice $n_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow x_n > y_n)$$

□

> **Proposição 3.154.** *Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) vetorial normado. Se $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de vetores tal que $v_n \to \bar{v} \in V$ e se $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números escalares tal que $\alpha_n \to \bar{\alpha} \in \mathbb{K}$, então:*
>
> $$\alpha_n \cdot v_n \to \bar{\alpha} \cdot \bar{v}.$$

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado qualquer. Como $\alpha_n \to \bar{\alpha}$, tem-se que:

(i) Dado qualquer $c > \|\bar{v}\|$, existe um índice $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow |\alpha_n - \bar{\alpha}| < \frac{\varepsilon}{2c}$$

(ii) Como toda sequência convergente é limitada (pela **Proposição 3.138**), existe um número real $K > 0$ tal que para todo $n \geq 1$ tem-se $|\alpha_n| < K$. Por outro lado, como $v_n \to \bar{v}$, dado o número positivo $\frac{\varepsilon}{2K}$ existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right) \Rightarrow \|v_n - \bar{v}\| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

Tomando $n_0(\varepsilon) = n_1(\varepsilon) + n_2\left(\frac{\varepsilon}{2K}\right) \in \mathbb{N}$, temos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|\alpha_n \cdot v_n - \bar{\alpha} \cdot \bar{v}\| = \|\alpha_n \cdot v_n - \alpha_n \cdot \bar{v} + \alpha_n \cdot \bar{v} - \bar{\alpha} \cdot \bar{v}\| \leq$$

$$\leq \|\alpha_n \cdot v_n - \alpha_n \cdot \bar{v}\| + \|\alpha_n \cdot \bar{v} - \bar{\alpha} \cdot \bar{v}\| =$$

$$= |\alpha_n| \cdot \|v_n - \bar{v}\| + \|\bar{v}\| \cdot |\alpha_n - \bar{\alpha}| < K \cdot \frac{\varepsilon}{2K} + \frac{\varepsilon}{2c} \cdot c = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N})(n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|\alpha_n \cdot v_n - \bar{\alpha} \cdot \bar{v}\| < \varepsilon)$$

ou seja,

$$\alpha_n \cdot v_n \to \bar{\alpha} \cdot \bar{v}.$$

□

Exemplo 3.155. *Seja $a \in \mathbb{R}$ tal que $0 < a < 1$. Afirmamos que a sequência $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} = (a, a^2, a^3, \cdots)$ converge para 0.*

De fato, tem-se:

$$a > a^2 > a^3 > \cdots > a^n > \cdots > 0$$

*de modo que a sequência dada é monótona estritamente decrescente e o conjunto dos seus termos, $\{a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots\}$ é limitado inferiormente por 0. Da **Proposição 3.145** segue que a sequência $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $p = \inf\{a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots\}$.*

Como:

$$(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots) = (a, a, a, \cdots) \cdot (1, a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots),$$

*pela **Proposição 3.154** tem-se:*

$$\lim_{n\to\infty}(a, a^2, a^3, \cdots, a^n, \cdots) = \lim_{n\to\infty}(a, a, a, \cdots) \cdot \lim_{n\to\infty}(1, a, a^2, \cdots, a^n, \cdots)$$

Como $\lim_{n\to\infty}(a, a^2, a^3, \cdots) \overset{*}{=} \lim_{n\to\infty}(1, a, a^2, \cdots) = p$,em que podemos justificar a passagem $*$ usando o fato de ser $(a^{n-1})_{n\in\mathbb{N}}$ uma subsequência de $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$, segue que:

$$p = a \cdot p$$

e portanto:

$$p \cdot (1 - a) = 0.$$

Uma vez que $a \neq 1$, segue que $p = \inf\{a, a^2, a^3, \cdots\} = \lim_{n\to\infty} a^n = 0$.

Lema 3.156. *Sejam $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um espaço vetorial normado e $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de vetores tal que $v_n \to \bar{v} \in V$. Nestas condições, $(\|v_n\|)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $\|\bar{v}\|$.*

Demonstração. Notemos inicialmente que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\|v_n\| = \|v_n - \bar{v} + \bar{v}\| \leq \|v_n - \bar{v}\| + \|\bar{v}\|)$$

e portanto:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\|v_n\| - \|\bar{v}\| \leq \|v_n - \bar{v}\|)$$

Analogamente, pode-se provar que vale:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\|\bar{v}\| - \|v_n\| \leq \|v_n - \bar{v}\|)$$

Segue, portanto, que:

$$|\|v_n\| - \|\bar{v}\|| \leq \|v_n - \bar{v}\|$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, como $v_n \to \bar{v}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|v_n - \bar{v}\| < \varepsilon$$

e a fortiori,

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |\|v_n\| - \|\bar{v}\|| < \varepsilon$$

de modo que:

$$\|v_n\| \to \|\bar{v}\|$$

□

Proposição 3.157. *Sejam $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de escalares (de $\mathbb{R}$ ou de $\mathbb{C}$) tal que $\alpha_n \to \alpha \neq 0$. A sequência:*

$$\begin{array}{rccc} \beta: & \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ & n & \mapsto & \begin{cases} 0, \ se\ \alpha_n = 0 \\ \frac{1}{\alpha_n}, \ se\ \alpha_n \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

converge para $\dfrac{1}{\alpha}$.

Demonstração. Pelo **Teorema 3.146**, como $|\alpha| > 0$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow |\alpha_n| > 0)$$

ou seja,

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq n_0 \Rightarrow \alpha_n \neq 0).$$

Ademais, como:

$$\alpha_n \to \alpha \Rightarrow |\alpha_n| \to |\alpha| > 0$$

pelo mesmo teorema existem um índice $m_0 \in \mathbb{N}$ e uma constante $c > 0$ tais que:

$$n \geq m_0 \Rightarrow |\alpha_n| > c \iff \frac{1}{\alpha_n} < \frac{1}{c}.$$

Seja $\varepsilon > 0$ dado, e considere o número $c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon > 0$. Uma vez que $\alpha_n \to \alpha$, para este número $c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon > 0$, existe $n_0\left(c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0\left(c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon\right) \Rightarrow |\alpha_n - \alpha| < c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon$$

Escolhendo $n_0(\varepsilon) = n_0 + m_0 + n_0\left(\frac{\varepsilon}{c \cdot |\alpha|}\right)$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left|\frac{1}{\alpha_n} - \frac{1}{\alpha}\right| = \frac{|\alpha_n - \alpha|}{|\alpha_n| \cdot |\alpha|} < \frac{c \cdot |\alpha| \cdot \varepsilon}{c \cdot |\alpha|} = \varepsilon,$$

e portanto:

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \frac{1}{\alpha}.$$

□

Exercícios sobre Sequências em Espaços Métricos

3.1 Mostrar que uma progressão aritmética, $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ converge se, e somente se, $x_1 = x_2 = x_3 = \cdots = x_n = \cdots$.

3.2 Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de números reais. Mostrar que se $(x_1, x_3, x_5, x_7, \cdots, x_{2k-1}, \cdots)$ e $(x_2, x_4, x_6, \cdots, x_{2k}, \cdots)$ ambas convergem para $\bar{x} \in \mathbb{R}$, então $x_n \to \bar{x}$.

3.3 Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de M que converge para $\bar{x} \in M$, então a sequência de números reais $(d(x_n, \bar{x}))_{n\in\mathbb{N}} = (d(x_1, \bar{x}), d(x_2, \bar{x}), \cdots, d(x_n, \bar{x}), \cdots)$ converge para 0.

3.4 Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são duas sequências de elementos de M tais que $x_n \to \bar{x} \in M$ e $y_n \to \bar{y} \in M$, então:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = d(\bar{x}, \bar{y}).$$

3.5 Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico e $x_0 \in M$. Definindo $x_1 = f(x_0), \cdots, x_{n+1} = f(x_n), \cdots$, mostre que se $f : (M, d) \to (M, d)$ é uma isometria e se $f(x_0) \neq x_0$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não converge.

3.6 Mostrar que se (M, d) é um espaço pseudo-métrico [ou seja, $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ é uma pseudo-métrica], então toda sequência de elementos de M tem um único limite.

3.7 Mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de números reais limitada inferiormente e monótona estritamente decrescente, então $\lim_{n\to\infty} x^n = \inf\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$

3.8 Mostrar que se $a \in \mathbb{R}$ é tal que $0 < |a| < 1$, então $\lim_{n\to\infty} |a|^n = 0$.

3.9 Mostrar que se $X \subset \mathbb{R}$ é um conjunto limitado, então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que $x_n \to \sup X$ e $y_n \to \inf X$.

3.10 Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência limitada de números reais. Se para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos:

$$X_n = \{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

Mostrar que a sequência $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = (\sup X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente. O valor de aderência desta sequência é denominado "o limite superior de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ", e é denotado por $\limsup x_n$.

3.18 Funções Contínuas

Recordamos, do curso de Cálculo Diferencial e Integral, que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se, e somente se dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir um $\delta > 0$ tal que:

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

Intuitivamente, f é contínua em x_0 se, e somente se, para obter valores de $f(x)$ "arbitrariamente" próximos de $f(x_0)$ bastar tomar pontos x "suficientemente" próximos de x_0.

Veremos que a definição a seguir generaliza o conceito de continuidade para o contexto dos espaços métricos:

Definição 3.158 (função contínua em um ponto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ dois espaços métricos, $x_0 \in M$ e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f **é contínua em** x_0 se, para qualquer $\varepsilon > 0$ for possível exibir $\delta > 0$ tal que:*

$$d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Assim, f é contínua em x_0 se, e somente se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

Ainda com as notações da definição acima, quando uma função <u>não</u> é contínua em um ponto $x_0 \in M$, dizemos que ela é **descontínua em** x_0. Neste caso, isto significa que:

$$\neg[(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)]$$

ou seja, que:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists \underline{x} \in M)((d_M(\underline{x}, x_0) < \delta) \& (d_N(f(\underline{x}), f(x_0)) \geq \varepsilon))$$

Definição 3.159 (função contínua em um conjunto). *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ dois espaços métricos, $X \subseteq M$ e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f **é contínua em** X se, e somente se, f é contínua em cada um dos pontos de X.*

Podemos caracterizar a noção de continuidade fazendo uso da noção de "bola aberta", como vemos na:

Proposição 3.160. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ espaços métricos e seja $x_0 \in M$. Uma função $f : M \to N$ é contínua em x_0 se, e somente se, dada uma bola aberta $B(f(x_0), \varepsilon) \subset N$ existir uma bola aberta $B(x_0, \delta) \subset M$ tal que:*

$$f[B(x_0, \delta)] \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Dada a bola aberta $B(f(x_0), \varepsilon) \subset N$, considerando seu raio $\varepsilon > 0$, sendo f contínua em x_0 existirá $\delta > 0$ tal que:

$$d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Afirmamos que $B(x_0, \delta)$ é tal que:

$$f[B(x_0, \delta)] \subset B(f(x_0), \varepsilon)$$

De fato, dado $y \in f[B(x_0, \delta)]$, tem-se que existe $x \in B(x_0, \delta)$, ou seja, $x \in M$ tal que $d_M(x, x_0) < \delta$ e $y = f(x)$. Mas, por hipótese, $d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) = d_N(y, f(x_0)) < \varepsilon$, ou seja, $y = f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Por hipótese, dada a bola aberta $B(f(x_0), \varepsilon) \subset N$, existe uma bola aberta $B(x_0, \delta) \subset M$ tal que:

$$f[B(x_0, \delta)] \subset B(f(x_0), \varepsilon).$$

Afirmamos que, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos δ dado como o raio da bola aberta centrada em x_0 dada pela hipótese.

Desta forma, dado $x \in M$ tal que $d_M(x, x_0) < \delta$, tem-se $x \in B(x_0, \delta)$ e, portanto, $f(x) \in f[B(x_0, \delta)] \subset B(f(x_0), \varepsilon)$, de modo que $d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$.

□

Proposição 3.161. *Sejam M, N conjuntos, d_1 e d_1' métricas equivalentes sobre M e d_2 e d_2' métricas equivalentes sobre N. Tem-se que:*

$$f : (M, d_1) \to (N, d_2)$$

é contínua se, e somente se,

$$f : (M, d_1') \to (N, d_2')$$

é contínua.

$$(M, d_1) \xrightarrow{f} (N, d_2)$$

$$(M, d_1') \xrightarrow{f} (N, d_2')$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ seja contínua. Devemos demonstrar que $f : (M, d_1') \to (N, d_2')$ é contínua.

Seja $x_0 \in M$ um ponto qualquer. Dada a bola aberta $B_{d_2'}(f(x_0), \varepsilon) \subset N$, como $d_2 \sim d_2'$, existe $\lambda > 0$ tal que $B_{d_2}(f(x_0), \lambda) \subset B_{d_2'}(f(x_0), \varepsilon)$. Como, por hipótese, $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ é contínua, segue da **Proposição 3.160** que existe $B_{d_1}(x_0, \delta) \subset M$ tal que:

$$f[B_{d_1}(x_0, \delta)] \subset B_{d_2}(f(x_0), \lambda) \tag{3.8}$$

e consequentemente:

$$f[B_{d_1}(x_0, \delta)] \subset B_{d_2'}(f(x_0), \varepsilon) \tag{3.9}$$

Como $d_1 \sim d_1'$, dado este $\delta > 0$ existe $\eta > 0$ tal que:

$$B_{d_1'}(x_0, \eta) \subset B_{d_1}(x_0, \delta).$$

Afirmação: $f[B_{d_1'}(x_0, \eta)] \subset B_{d_2'}(f(x_0), \varepsilon)$.

De fato, dado $y \in f[B_{d_1'}(x_0, \eta)]$, existe $x \in B_{d_1'}(x_0, \eta)$ tal que $y = f(x)$. Como $x \in B_{d_1'}(x_0, \eta) \subset B_{d_1}(x_0, \delta)$, segue que $x \in B_{d_1}(x_0, \delta)$. De (3.9), segue que $f(x) = y \in B_{d_2'}(f(x_0), \varepsilon)$.

Segue da **Proposição 3.160** que $f : (M, d_1') \to (N, d_2')$ é contínua. A outra implicação se demonstra de modo totalmente análogo. □

Exemplo 3.162. *Toda imersão isométrica $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é uma função contínua. De fato, seja $x_0 \in M$ um ponto qualquer e $B_{d_N}(f(x_0), \varepsilon) \subset N$, a bola aberta $B_{d_M}(x_0, \varepsilon)$ é tal que:*

$$f[B_{d_M}(x_0, \varepsilon)] = B_{d_N}(f(x_0), \varepsilon).$$

Exemplo 3.163. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. A inclusão:*

$$\iota_X^M : (X, d \restriction_{X \times X}) \hookrightarrow (M, d)$$

por ser uma imersão isométrica, é uma função contínua.

Exemplo 3.164. *Dado (M, d) um espaço métrico qualquer, por ser uma isometria, a função:*

$$\mathrm{id}_M : (M, d) \to (M, d)$$

é contínua.

Exemplo 3.165. *Dado um espaço vetorial normado $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$, toda translação:*

$$\begin{array}{rccc} T_{\vec{v}_0}: & V & \to & V \\ & \vec{v} & \mapsto & \vec{v} + \vec{v}_0 \end{array}$$

é contínua. De fato, $T_{\vec{v}_0}$ é uma isometria, pois para quaisquer $\vec{u}, \vec{v} \in V$ tem-se:

$$d_{\|\cdot\|}(T_{\vec{v}_0}(\vec{u}), T_{\vec{v}_0}(\vec{v})) = \|T_{\vec{v}_0}(\vec{u}) - T_{\vec{v}_0}(\vec{v})\| = \|\vec{u} + \vec{v}_0 - (\vec{v} + \vec{v}_0)\| = \|\vec{u} - \vec{v}\| = d_{\|\cdot\|}(\vec{u}, \vec{v})$$

Exemplo 3.166. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, e considere $(M \times N, d)$,em que d é qualquer uma das métricas equivalentes da qual se pode munir $M \times N$. Dado qualquer $x_0 \in M$, a função:*

$$\begin{array}{rccc} \jmath_{x_0}: & (N, d_N) & \to & (M \times N, d) \\ & y & \mapsto & (x_0, y) \end{array}$$

é contínua. De fato, na verdade para cada $x_0 \in M$ fixado, $\jmath_{x_0}$ é uma isometria: dados quaisquer $y_1, y_2 \in N$, tem-se:

$$d(\jmath_{x_0}(y_1), \jmath_{x_0}(y_2)) = d((x_0, y_1), (x_0, y_2)) = \sqrt{d_M(x_0, x_0)^2 + d_N(y_1, y_2)^2} = d_N(y_1, y_2).$$

*Sendo uma isometria, $\jmath_{x_0}$ é contínua. Pela **Proposição 3.161**, $\jmath_{x_0}$ é contínua para qualquer uma das métricas equivalentes das quais podemos dotar $M \times N$.*

Definição 3.167 (contração fraca). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f é uma **contração fraca** se, e somente se:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) \leq d_M(x, y))$$

Exemplo 3.168. *Toda contração fraca é contínua. Com efeito, dados dois espaços métricos, (M, d_M) e (N, d_N) e uma contração fraca $f : M \to N$, tem-se que dado qualquer $x_0 \in M$ vale:*

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) \leq d_M(x, x_0) < \delta = \varepsilon)$$

ou seja, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$.

Exemplo 3.169. *Sejam $(M_1, d_1), (M_2, d_2), \cdots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Considere em $\prod_{i=1}^n M_i$ qualquer métrica d da qual se pode pode dotar o produto (vimos que todas são equivalentes), de modo a obter o espaço métrico $(\prod_{i=1}^n M_i, d)$. Para cada $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$, a projeção na $i-$ésima coordenada:*

$$\begin{array}{rccc} \pi_i: & \prod_{i=1}^n M_i & \to & M_i \\ & (x_1, \cdots, x_i, \cdots x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

é uma função contínua. De fato, π_i é uma contração fraca: dados $(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n)$ e $(y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_n) \in \prod_{i=1}^{n} M_i$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_i(\pi_i(x_1, \cdots, x_i, \cdots, x_n), \pi_i(y_1, \cdots, y_i, \cdots, y_n)) = d_i(x_i, y_i) \leq \\ \leq \sqrt{d_1(x_1, y_1)^2 + \cdots + d_n(x_n, y_n)^2} = d((x_1, \cdots, x_n), (y_1, \cdots, y_n)) \end{aligned}$$

Desta forma, π_i, por ser uma contração fraca, é uma função contínua.

Exemplo 3.170. *Dado $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado ($\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$), considere o espaço métrico $(V, d_{\|\cdot\|})$,em que $d_{\|\cdot\|}$ é a métrica associada à norma $\|\cdot\|$ e o espaço métrico $(V \times V, d)$,em que d é qualquer uma das métricas das quais podemos dotar o produto. Neste caso, tomaremos $d = d_S$, a métrica da soma. A função soma:*

$$\begin{array}{rccc} + : & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

é uma função contínua.

De fato, observe que $+$ é uma contração fraca: dados quaisquer $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in V \times V$, tem-se:

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(+(u_1, v_1), +(u_2, v_2)) = d_{\|\cdot\|}(u_1 + v_1, u_2 + v_2) = \\ = \|(u_1 + v_1) - (u_2 + v_2)\| = \|(u_1 - u_2) + (v_1 - v_2)\| \leq \|u_1 - u_2\| + \|v_1 - v_2\| = \\ = d_{\|\cdot\|}(u_1, u_2) + d_{\|\cdot\|}(v_1, v_2) = d_S((u_1, v_1), (u_2, v_2)) \end{aligned}$$

Por ser uma contração fraca, $+ : V \times V \to V$ é contínua.

Exemplo 3.171. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x_0 \in M$ e considere em $\mathbb{R}_+$ com a métrica usual. A função:*

$$\begin{array}{rccc} d_{x_0} : & M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & d(x_0, x) \end{array}$$

é uma contração fraca, e portanto é contínua. De fato, dados quaisquer $x, y \in M$ tem-se:

$$d_{\mathbb{R}_+}(d_{x_0}(x), d_{x_0}(y)) = |d_{x_0}(x) - d_{x_0}(y)| = |d(x_0, x) - d(x_0, y)| \overset{\textbf{Cor. 3.60}}{\leq} d(x, y)$$

Exemplo 3.172. *Se considerarmos $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ com $d_{\mathbb{R}}(x, y) = |y - x|$ e um espaço métrico (M, d_M) qualquer, considerando a métrica da soma no produto $M \times M$, ou seja, considerando o espaço métrico $(M \times M, d_S)$, a função métrica:*

$$\begin{array}{rccc} d_M : & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \mapsto & d_M(x, y) \end{array}$$

é contínua.

Dados quaisquer $(x_1, y_1), (x_2, y_2) \in M \times M$, *vale:*

$$\begin{aligned} d_{\mathbb{R}}(d_M(x_1,y_1), d_M(x_2,y_2)) &= |d_M(x_2,y_2) - d_M(x_1,y_1)| = \\ &= |d_M(x_2,y_2) - d_M(x_2,y_1) + d_M(x_2,y_1) - d_M(x_1,y_1)| \leq \\ &\leq |d_M(x_2,y_2) - d_M(x_2,y_1)| + |d_M(x_2,y_1) - d_M(x_1,y_1)| \leq \\ &\leq d_M(y_2,y_1) + d_M(x_1,x_2) = d_S((x_1,y_1),(x_2,y_2)) \end{aligned}$$

de modo que, por ser uma contração fraca, é uma função contínua.

Definição 3.173 (função lipschitziana). *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma função. Dizemos que* f *é* ***lipschitziana*** *se existir uma constante* $c \in \mathbb{R}^*_+$ *(denominada "constante de Lipschitz") tal que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot d_M(x,y))$$

Exemplo 3.174. *Toda função lipschitziana é contínua.*

De fato, sejam (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos,* $x_0 \in M$ *e* $f : M \to N$ *uma função lipschitziana. Dado* $\varepsilon > 0$, *basta tomarmos* $\delta = \frac{\varepsilon}{c} > 0$, *e teremos:*

$$(\forall x \in M)(d_M(x,x_0) < \delta = \frac{\varepsilon}{c} \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) \leq c \cdot d_M(x,x_0) < c \cdot \frac{\varepsilon}{c} = \varepsilon)$$

Definição 3.175 (função localmente lipschtziana). *Sejam* (M, d_M) *e* (N, d_N) *espaços métricos e* $f : M \to N$ *uma função. A função* f *é uma* ***função localmente lipschtziana*** *se, e somente se, para todo* $x_0 \in M$ *existir* $\delta_{x_0} > 0$ *tal que:*

$$f \restriction_{B(x_0,\delta_{x_0})} : B(x_0, \delta_{x_0}) \to N$$

é lipschtziana.

Exemplo 3.176. *Se* $f : M \to N$ *é localmente lipschtziana então* f *é contínua. De fato, mostremos que* f, *sendo localmente lipschtziana, é contínua em todo ponto* $x_0 \in M$.

Dado $\varepsilon > 0$, *devemos encontrar* $\delta > 0$ *tal que:*

$$d_M(x,x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Uma vez que f *é localmente lipschtziana, para este* x_0 *existe* $\delta_{x_0} > 0$ *tal que:*

$$f \restriction_{B(x_0,\delta_{x_0})} : B(x_0, \delta_{x_0}) \to N$$

é lipschtziana. Isto significa que existe uma constante $c_{x_0} \in \mathbb{R}_+^*$ tal que:

$$(\forall x \in B(x_0, \delta_{x_0}))(\forall y \in B(x_0, \delta_{x_0}))(d_N(f(x), f(y)) \leq c_{x_0} \cdot d_M(x, y))$$

Afirmamos que basta tomarmos $\delta = \min \left\{ \delta_{x_0}, \frac{\varepsilon}{c_{x_0}} \right\}$. De fato, tem-se:

$$(d_M(x, x_0) < \delta) \Rightarrow x \in B\left(x_0, \frac{\varepsilon}{c_{x_0}}\right) \overbrace{\Rightarrow}^{f \text{ loc. Lips.}} d_N(f(x), f(x_0)) \overbrace{\leq}^{\delta \leq \delta_{x_0}} c_{x_0} \cdot d_M(x, x_0) <$$

$$< c_{x_0} \cdot \frac{\varepsilon}{c_{x_0}} = \varepsilon$$

Desta forma, segue que f é contínua em $x_0 \in M$. Como x_0 é arbitrário, segue que f é contínua em M.

Proposição 3.177. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Se para todo $X \subseteq M$ limitado, ou seja, tal que existe $K > 0$ com $\operatorname{diam.}(X) = K$ tivermos $f \restriction_X : X \to N$ contínua, então f é contínua em M.*

Demonstração. Seja $x_0 \in M$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, tomemos, por exemplo, $B(x_0, 1) \subset M$, que é um subconjunto limitado de M. Por hipótese, f é contínua em todo ponto de $B(x_0, 1)$ – e, a fortioti, em x_0, de modo que para quele $\varepsilon > 0$ existirá um $\delta > 0$ tal que:

$$d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

donde segue a continuidade de f em x_0. $\square$

Segue diretamente da **Proposição 3.177** que, se uma função $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ for contínua em toda bola aberta de M, então f será, globalmente, contínua.

Exemplo 3.178. *Sejam $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado (onde $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$) e $(\mathbb{R}, d_{\mathbb{R}})$ o espaço métrico dos números reais munido da distância usual. A função:*

$$\begin{array}{rccc} \cdot : & \mathbb{K} \times V & \to & V \\ & (\lambda, x) & \mapsto & \lambda \cdot x \end{array}$$

é contínua.

Consideraremos $\mathbb{K} \times V$ munido da métrica da soma, ou seja:

$$\begin{array}{rccc} d_S : & (\mathbb{K} \times V) \times (\mathbb{K} \times V) & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ((\mu, x), (\lambda, y)) & \mapsto & |\mu - \lambda| + \|x - y\| \end{array}$$

Vamos demonstrar que $\cdot$ é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{K} \times V$. Uma parte de $\mathbb{K} \times V$ é limitada se estiver contida em um conjunto da forma $\Lambda_K = \{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \mid d_S((\lambda, v), (0_{\mathbb{K}}, 0_V)) \leq$

$K\} = \{(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times V \mid |\lambda| + \|v\| \leq K\}$, para algum $K > 0$.

Sejam $(\mu, x), (\lambda, y)$ dois elementos de algum conjunto limitado $L \subset \mathbb{K} \times M$, que está, portanto, contido em Λ_K, para algum $K > 0$. Desta forma, $\mu, \lambda \in \mathbb{K}$ e $x, y \in V$ são tais que $|\mu| \leq K$, $|\lambda| \leq K$, $\|x\| \leq K$ e $\|y\| \leq K$. Tem-se:

$$\begin{aligned} d_{\|\cdot\|}(\cdot(\mu, x), \cdot(\lambda, y)) &= \|\mu \cdot x - \lambda \cdot y\| = \|\mu \cdot x - \lambda \cdot x + \lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| \leq \\ &\leq \|\mu \cdot x - \lambda \cdot x\| + \|\lambda \cdot x - \lambda \cdot y\| = \\ &= |\mu - \lambda| \cdot \|x\| + |\lambda| \cdot \|x - y\| \leq K \cdot |\mu - \lambda| + K \cdot \|x - y\| = K \cdot d_S((\mu, x), (\lambda, y)) \end{aligned}$$

$$(\forall (\mu, x) \in \mathbb{K} \times V)(\forall (\lambda, y) \in \mathbb{K} \times V)(d_{\|\cdot\|}(\cdot(\mu, x), \cdot(\lambda, y)) \leq d_S((\mu, x), (\lambda, y)))$$

*Como $\cdot$ é lipschitziana em cada parte limitada de $\mathbb{K} \times V$, $\cdot$ é contínua em cada uma dessas partes. Segue da **Proposição 3.177** que $\cdot$ é contínua.*

Exemplo 3.179. *Em particular, a função:*

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

é uma função contínua de duas variáveis.

Exemplo 3.180. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} \text{inv}: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

que a cada número real não nulo associa o seu recíproco, é contínua.

Dividiremos esta demonstração em casos: $x_0 > 0$ e $x_0 < 0$;

De fato, seja $x_0 > 0$ qualquer, de modo que existem $a, b \in \mathbb{R}^*$, $0 < a < b$ tais que $x_0 \in]a, b[$. tem-se:

$$(\forall x \in]a, b[) \left(\frac{1}{b} < \frac{1}{x} < \frac{1}{a} \right)$$

Dado $\varepsilon > 0$, tome $\delta = a \cdot |x_0| \cdot \varepsilon > 0$ e teremos:

$$|x - x_0| < \delta = a \cdot |x_0| \cdot \varepsilon \Rightarrow \frac{|x - x_0|}{|x|} < \frac{a \cdot |x_0| \cdot \varepsilon}{a} \Rightarrow \frac{|x - x_0|}{|x_0| \cdot |x|} < \frac{a \cdot |x_0| \cdot \varepsilon}{a \cdot |x_0|} = \varepsilon$$

Mas note que:

$$\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x_0 \cdot x|} < \varepsilon$$

Assim,

$$|x - x_0| < \delta \Rightarrow \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right| = \frac{|x - x_0|}{|x_0 \cdot x|} < \varepsilon$$

A demonstração para o caso em que $x_0 < 0$ é análoga, e fica como exercício.

Definição 3.181. *Sejam M um conjunto e $d_1 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ e $d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ duas métricas. Dizemos que d_1* ***é uma métrica mais fina do que*** *d_2, e escrevemos $d_1 \succ d_2$, se, e somente se, $\mathrm{id} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é uma função contínua.*

Equivalentemente, a métrica d_1 é mais fina do que a métrica d_2 se, e somente se, para qualquer $x_0 \in M$, dado qualquer $\delta > 0$ existir $\eta > 0$ tal que:

$$B_{d_1}(x_0, \eta) \subseteq B_{d_2}(x_0, \delta).$$

Teorema 3.182. *Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ e (P, d_P) espaços métricos, $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ uma função contínua em $x_0 \in M$ e $g : (N, d_N) \to (P, d_P)$ uma função contínua em $f(x_0) \in N$. Então $g \circ f : (M, d_M) \to (P, d_P)$ é contínua em x_0.*

Demonstração. Como $g : (N, d_N) \to (P, d_P)$ é contínua em $f(x_0) \in N$, dada a bola $B_{d_P}(g(f(x_0)), \varepsilon)$ existe $\eta > 0$ tal que:

$$g[B_{d_N}(f(x_0), \eta)] \subset B_{d_P}(g(f(x_0)), \varepsilon)$$

Como $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é contínua em $x_0 \in M$, dada a bola aberta $B_{d_N}(f(x_0), \eta)$, existe $\delta > 0$ tal que:

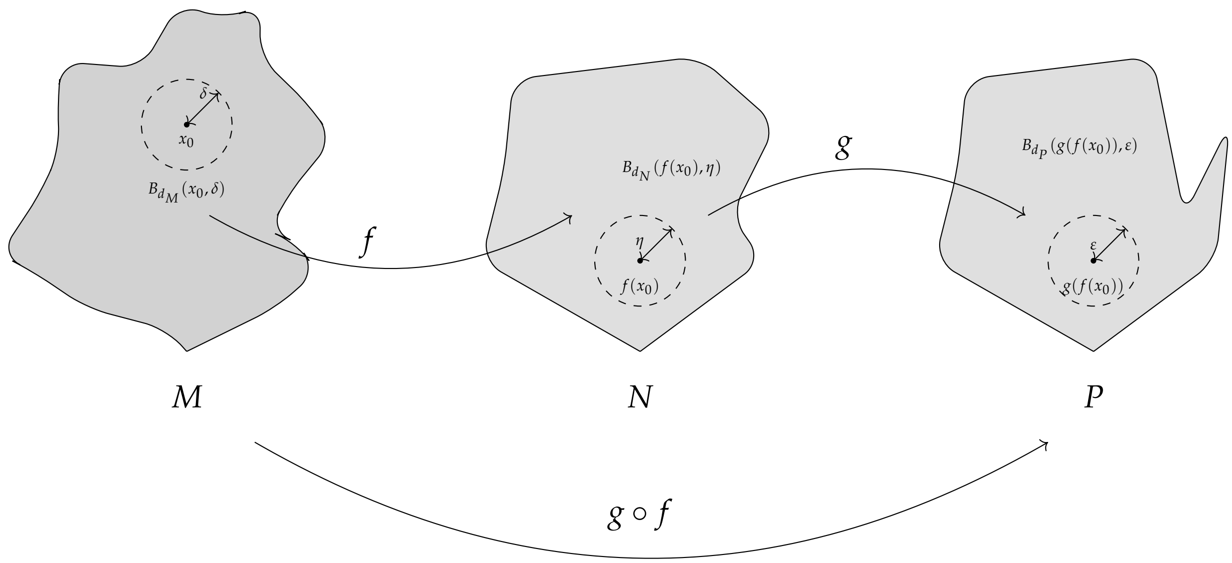
$$f[B_{d_M}(x_0, \delta)] \subset B_{d_N}(f(x_0), \eta).$$

Segue, portanto, que:

$$(g \circ f)[B_{d_M}(x_0, \delta)] \subset B_{d_P}(g(f(x_0)), \varepsilon),$$

e $g \circ f$ é contínua em x_0.

□



Proposição 3.183. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $X \subseteq M$ e $f : M \to N$ uma função contínua. Então:*

$$\begin{array}{rccc} f\restriction_X : & X & \to & N \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é uma função contínua.

Demonstração. De fato, basta observar que $f \restriction_X = f \circ \iota_X^M : X \to N$, ou seja, que o diagrama abaixo:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & N \\ X \arrow[u, "\iota_X^M"] \arrow[ur, "f\restriction_X"'] & \end{tikzcd}$$

comuta. Como vimos, $\iota_X^M : X \hookrightarrow M$ é contínua (por ser uma imersão isométrica) e f é contínua (por hipótese). Segue daí que, por ser a composição de duas funções contínuas, $f \restriction_X$ é contínua. $\square$

Teorema 3.184 (caracterização de continuidade via sequências). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $x_0 \in M$ e $f : M \to N$ uma função. Tem-se que f é contínua em $x_0 \in M$ se, e somente se, o fato de uma sequência qualquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, convergir para x_0 implicar que a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $f(x_0)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f : M \to N$ seja contínua em x_0 e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de M que converge para x_0. Dado qualquer $\varepsilon > 0$, como f é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(x_0)) < \varepsilon).$$

Uma vez que $x_n \to x_0$, para este $\delta > 0$ existe um índice $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\delta) \Rightarrow d_M(x_n, x_0) < \delta$$

Assim, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0 = n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\delta) \Rightarrow d_M(x_n, x_0) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_n), f(x_0)) < \varepsilon,$$

ou seja, $f(x_n) \to f(x_0)$.

($\Leftarrow$) [contraposição] Suponhamos que para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$ tenha-se $f(x_n) \to f(x_0)$. Se f não é contínua em x_0, existe algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que:

$$(\forall \delta > 0)(f[B(x_0, \delta)] \not\subset B(f(x_0), \varepsilon_0))$$

Assim, em particular, tem-se:

$$f[B(x_0, 1)] \not\subset B(f(x_0), \varepsilon_0) \text{ se fizermos } \delta = 1$$

$$f\left[B\left(x_0, \frac{1}{2}\right)\right] \not\subset B(f(x_0), \varepsilon_0) \text{ se fizermos } \delta = \frac{1}{2}$$

$$f\left[B\left(x_0, \frac{1}{3}\right)\right] \not\subset B(f(x_0), \varepsilon_0) \text{ se fizermos } \delta = \frac{1}{3}$$

$$\vdots$$

$$f\left[B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)\right] \not\subset B(f(x_0), \varepsilon_0) \text{ se fizermos } \delta = \frac{1}{n}$$

de modo que para cada $n \in \mathbb{N}$ é possível escolher $x_n \in B\left(x_0, \frac{1}{n}\right)$ tal que $f(x_n) \notin B(f(x_0), \varepsilon_0)$. Segue, portanto, que existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M que converge para x_0 mas tal que $f(x_n) \not\to f(x_0)$ $\square$

O teorema acima é particularmente interessante, em muitos casos, para justificar a não continuidade de uma função em um dado ponto.

Exemplo 3.185. *Considere a função:*

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto \begin{cases} 0, & se\ x \in \mathbb{Q} \\ 1, & se\ x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

Afirmamos que f não é contínua em nenhum ponto.

De fato, dado $x_0 \in \mathbb{R}$ tem-se $x_0 \in \mathbb{Q}$ ou $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Se $x_0 \in \mathbb{Q}$, considerando a sequência:

$$\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2}, x_0 + \frac{\sqrt{2}}{3}, x_0 + \frac{\sqrt{2}}{4}, \cdots \right)$$

de números irracionais que converge para x_0. No entanto, a sequência das imagens:

$$\left(f\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{2} \right), f\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{3} \right), f\left(x_0 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right), \cdots \right) = (0, 0, 0, \cdots)$$

converge para $0 \neq f(x_0) = 1$. Um raciocínio similar prova que se $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, f também é descontínua em x_0.

Teorema 3.186. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. As seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *f é contínua;*

(b) *Para todo $y_0 \in N$ e para todo $\lambda > 0$, $f^{\dashv}[B(y_0, \lambda)] \subset M$ é aberto;*

(c) Dado qualquer subconjunto $U \subseteq N$ aberto, $f^{\dashv}[U] \subseteq M$ é aberto;

(d) Para todo conjunto $F \subseteq N$ fechado, $f^{\dashv}[F] \subseteq M$ é fechado.

Demonstração. Ad (a) $\Rightarrow$ (b): Dado $x \in f^{\dashv}[B(y_0, \lambda)]$, tem-se $f(x) \in B(y_0, \lambda)$. Como $B(y_0, \lambda)$ é um conjunto aberto, existe $\varepsilon > 0$ tal que $B(f(x), \varepsilon) \subset B(y_0, \lambda)$. Como f é contínua, existe $\delta > 0$ tal que $f[B(x, \delta)] \subset B(f(x), \varepsilon)$. Uma vez que $B(x, \delta) \subset f^{\dashv}[f[B(x, \delta)]]$, então $B(x, \delta) \subset f^{\dashv}[B(f(x), \varepsilon)] \subset f^{\dashv}[B(y_0, \lambda)]$. Desta forma, segue que $x \in \text{int.}(f^{\dashv}[B(y_0, \lambda)])$. Assim, $f^{\dashv}[B(y_0, \lambda)]$, por estar contido em seu interior, é um conjunto aberto.

Ad (b) $\Rightarrow$ (c): Se $U \subseteq N$ é aberto, podemos escrever:

$$U = \bigcup_{i \in I} B(y_i, \delta_i)$$

que $\{B(y_i, \delta_i) \mid i \in I\}$ é uma família de bolas abertas tal que $(\forall i \in I)(B(y_i, \delta_i) \subseteq U)$. Daí, segue que:

$$f^{\dashv}[U] = f^{\dashv}\left[\bigcup_{i \in I} B(y_i, \delta_i)\right] = \bigcup_{i \in I} f^{\dashv}[B(y_i, \delta_i)]$$

Por (a), tem-se que para todo $i \in I$, $f^{\dashv}[B(y_i, \delta_i)]$ é um subconjunto aberto de M. Como a reunião qualquer de conjuntos abertos é, novamente, um conjunto aberto, segue que $f^{\dashv}[U]$ é um subconjunto aberto de M.

Ad (c) $\Rightarrow$ (d): Sendo $F \subseteq N$ fechado, tem-se que $N \setminus F$ é aberto em N. Segue daí que:

$$f^{\dashv}[N \setminus F] = M \setminus f^{\dashv}[F] \subseteq M$$

é aberto em M, por hipótese. Segue, portanto, que $f^{\dashv}[F] \subset M$ é fechado.

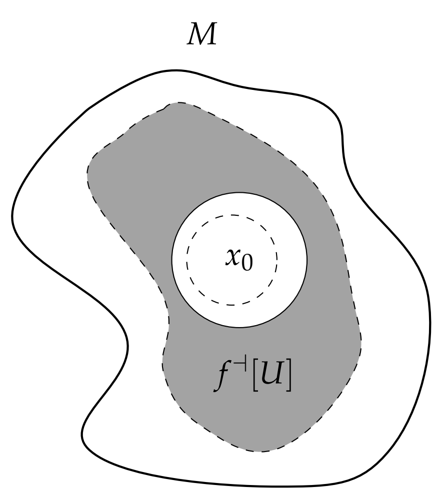
Ad (d) $\Rightarrow$ (a): Seja $x_0 \in M$ qualquer. Dado $\varepsilon > 0$, consideremos $B(f(x_0), \varepsilon)$. Como toda bola aberta é um conjunto aberto, tem-se que $N \setminus B(f(x_0), \varepsilon) \subset N$ é fechado. Como $f(x_0) \notin N \setminus B(f(x_0), \varepsilon)$, segue que:

$$f^{\dashv}[N \setminus B(f(x_0), \varepsilon)] = M \setminus f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)] \subset M$$

é um fechado que não contém x_0. Desta forma, $f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)] \subset M$ é aberto e $x_0 \in f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)]$. Sendo x_0 ponto interior de $f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)]$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subset f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)]$. Tomando $B(x_0, \delta)$, teremos:

$$B(x_0, \delta) \subset f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)].$$

$\square$



Corolário 3.187 (Lema da Colagem). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, $F, G \subset M$ subconjuntos fechados de M tais que $M = F \cup G$. Se $f \restriction_F : F \to N$ e $f \restriction_G : G \to N$ são ambas contínuas, então $f : M \to N$ é contínua.*

Demonstração. Mostraremos que f é contínua utilizando o item *(d)* do **Teorema 3.186**.

Seja $P \subseteq N$ um subconjunto fechado. Note que:

$$f^{\dashv}[P] = (f \restriction_F)^{\dashv}[P] \cup (f \restriction_G)^{\dashv}[P]$$

Como $f \restriction_F$ é contínua, segue que $(f \restriction_F)^{\dashv}[P] \subseteq M$ é fechado, e como $f \restriction_G$ é contínua, $(f \restriction_G)^{\dashv}[P] \subseteq M$ é fechado. Por ser reunião de dois fechados, segue que $f^{\dashv}[P] \subseteq M$ é fechado, logo f é contínua. $\square$

Exemplo 3.188. *Sejam (M, d_M), (N, d_N) espaços métricos, $F_1, F_2 \subset M$ subconjuntos fechados de M tais que $F \cup G = M$ e $f_1 : F_1 \to N$ e $f_2 : F_2 \to N$ funções contínuas tais que $f_1 \restriction_{F \cap G} = f_2 \restriction_{F \cap G}$, então existe uma única função contínua $\widetilde{f} : M \to N$ tal que $\widetilde{f} \restriction_{F_i} = f_i$.*

Considere a relação: $\widetilde{f} = \{(x, f_1(x)) \mid x \in F_1\} \cup \{(x, f_2(x)) \mid x \in F_2\}$. Note que $\widetilde{f}$ é unívoca: dado $x \in M = F_1 \cup F_2$, tem-se $x \in F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)$, $x \in F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)$ ou $x \in F_1 \cap F_2$. Nos primeiros dois casos, a univocidade fica garantida por $f_1 \restriction_{F_1 \setminus (F_1 \cap F_2)}$ e $f_2 \restriction_{F_2 \setminus (F_1 \cap F_2)}$ serem restrições de funções. Se $x \in F_1 \cap F_2$, temos, por hipótese, $f_1(x) = f_2(x)$, de modo que $(x, f_1(x)) = (x, f_2(x))$ (ou seja, a cada elemento $x \in F_1 \cap F_2$ corresponde um, e somente um elemento de N). Logo,

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & M & \to & N \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f_1(x) \text{ se } x \in F_1 \\ f_2(x) \text{ se } x \in F_2 \end{cases} \end{array}$$

*é uma função. Do **Lema da Colagem** segue que $\widetilde{f}$ é contínua.*

Proposição 3.189. *Sejam $(M, d_M), (M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. Munimos $\prod_{i=1}^n M_i$ de qualquer uma das métricas (equivalentes entre si) do produto cartesiano. Seja:*

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & M_1 \times \cdots \times M_n \\ & x & \mapsto & (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{array}$$

uma função. Tem-se que f é contínua em $x_0 \in M$ se, e somente se, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$,

$$\begin{array}{rccc} f_i: & M & \to & M_i \\ & x & \mapsto & f_i(x) \end{array}$$

é contínua em x_0.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Suponhamos que $f : M \to M_1 \times \cdot \times M_n$ seja uma função contínua em x_0. Recorde que a projeção na $i-$ésima coordenada:

$$\begin{array}{rccc} \pi_i : & M_1 \times \cdots \times M_n & \to & M_i \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & x_i \end{array}$$

é contínua em todo o seu domínio – e, em particular, em $f(x_0) = (f_1(x_0), \cdots, f_n(x_0))$. Uma vez que podemos escrever:

$$f_i = \pi_i \circ f : M \to M_i$$

ou seja, uma vez que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & M_1 \times \cdots \times M_n \arrow[d, "\pi_i"] \\ & M_i \end{tikzcd}$$

comuta, segue que por ser uma composição de funções contínuas, f_i é contínua para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$.

($\Leftarrow$) Reciprocamente, suponhamos que para todo $i \in \{1, \cdots, n\}$, $f_i : M \to M_i$ seja contínua. Vamos considerar no produto $\prod_{i=1}^n M_i$ a métrica d_S, da soma. Dado $\varepsilon > 0$, considerando o número positivo $\frac{\varepsilon}{n} > 0$, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$ existe $\delta_i > 0$ tal que:

$$d_M(x, x_0) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{n}$$

Seja $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$. Temos:

$$d_M(x, x_0) < \delta \Rightarrow (\forall i \in \{1, \cdots, n\}) \left(d_i(f_i(x), f_i(x_0)) < \frac{\varepsilon}{n} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n} d_i(f_i(x), f_i(x_0)) = d_S(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

Segue, portanto, que f é contínua em $x_0 \in M$. □

Corolário 3.190. *Sejam $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n), (N_1, \delta_1), \cdots, (N_n, \delta_n)$ espaços métricos. Se $f_1 : M_1 \to N_1$, $f_2 : M_2 \to N_2$, $\cdots$, $f_n : M_n \to N_n$ são funções contínuas, então:*

$$\begin{array}{rccc} f : & M_1 \times \cdots M_n & \to & N_1 \times \cdots \times N_n \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)) \end{array}$$

que $\prod_{i=1}^n M_i$ e $\prod_{i=1}^n N_i$ estão munidos de suas respectivas métricas-produto, é uma função contínua, então f é contínua.

Demonstração. Notemos que, para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$, tem-se:

$$(f_i \circ \pi_i)(x_1, \cdots, x_n) = f_i(x_i)$$

e portanto, fazendo $(x_1, \cdots, x_n) = x$, segue que:

$$f(x) = ((f_1 \circ \pi_1)(x), \cdots, (f_n \circ \pi_n)(x))$$

Como cada uma das coordenadas da função acima é contínua (por ser composta de duas funções contínuas), segue da **Proposição 3.189** que f é contínua. □

Teorema 3.191. *Sejam $(M, d_M), (N, d_N)$ espaços métricos, $X \subset M$ denso e $f, g : X \to N$ funções contínuas. Se $f \restriction_X = g \restriction_X$ então $f = g$.*

Demonstração. Como f e g têm os mesmos domínios e contradomínios, basta mostrar que dado qualquer $x_0 \in M$ vale $f(x_0) = g(x_0)$. O resultado é válido por hipótese se $x_0 \in X$. Suponhamos, portanto, que $x_0 \in M \setminus X$. Como $\mathrm{Cl.}(X) = M$, dado qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $x_n \in X$ tal que $d(x_n, x_0) < \dfrac{1}{n}$. Construímos, desta forma, uma sequência de elementos de X, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x_0$. Como f e g são contínuas, segue que:

$$f(x_n) \to f(x_0) \text{ e } g(x_n) \to g(x_0)$$

Mas note que como para todo $n \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n \in X$ e $f \restriction_X = g \restriction_X$, tem-se:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(f(x_n) = g(x_n))$$

ou seja, tem-se $(f(x_n))_{n \in \mathbb{N}} = (g(x_n))_{n \in \mathbb{N}}$. Como o limite de uma sequência em um espaço métrico é único, segue que $f(x_0) = g(x_0)$. □

3.18.1 Operações com Funções Contínuas

Ao longo desta seção $\mathbb{K}$ denotará ou o corpo dos números reais ou o corpo dos números complexos.

Definição 3.192 (soma de funções). *Sejam $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado qualquer. Dado um conjunto $X \neq \varnothing$ qualquer, a **soma** de duas funções $f : X \to V$ e $g : X \to V$ é a função:*

$$\begin{array}{rccc} f + g : & X & \to & V \\ & x & \mapsto & f(x) + g(x) \end{array}$$

Sejam (M, d_M) um espaço métrico, $\mathcal{V}$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado. Valem os seguintes resultados:

Proposição 3.193. *Se $f : M \to V, g : M \to V$ são funções contínuas, então a função $f + g : M \to V$ é contínua.*

Demonstração. De fato, consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & V \times V \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

que é contínua em virtude de f e g serem contínuas e da **Proposição 3.189**, e a função:

$$\begin{array}{rccc} +: & V \times V & \to & V \\ & (u, v) & \mapsto & u + v \end{array}$$

que é contínua, em virtude do **Exemplo 3.170**. Note que podemos escrever:

$$f + g = + \circ h,$$

ou seja, $f + g$ é tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f+g"] \arrow[d, "h"'] & V \\ V \times V \arrow[ur, "+"'] & \end{tikzcd}$$

Desta forma, por ser a composição de duas funções contínuas, $f + g : M \to V$ é contínua. $\square$

Proposição 3.194. *Se $f : M \to \mathbb{R}, g : M \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, então a função:*

$$\begin{array}{rccc} f \cdot g: & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) \cdot g(x) \end{array}$$

$f \cdot g : M \to \mathbb{R}$ é contínua.

Demonstração. De fato, consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & V \times V \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

que é contínua em virtude de f e g serem contínuas e da **Proposição 3.189**, e a função:

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

que é contínua, em virtude do **Exemplo 3.179**. Note que podemos escrever:

$$f \cdot g = m \circ h,$$

ou seja, $f \cdot g$ é tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f\cdot g"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R} \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Desta forma, por ser a composição de duas funções contínuas, $f \cdot g : M \to \mathbb{R}$ é contínua. $\square$

> **Proposição 3.195.** *Seja (M, d) um espaço métrico. Dadas $f : M \to \mathbb{R}$ e $g : M \to \mathbb{R}$, se $(\forall x \in M)(g(x) \neq 0)$, o **quociente de f por g** é a função:*
>
> $$\begin{array}{rccc} \frac{f}{g}: & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$
>
> *Se f e g são contínuas em $x_0 \in M$, então $\frac{f}{g}$ é contínua em x_0.*

Demonstração. De fato, consideremos a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & \mathbb{R} \times \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \left(f(x), \dfrac{1}{g(x)}\right) \end{array}$$

que é contínua, uma vez que f, sua primeira coordenada, é contínua e tanto g quanto inv são contínuas (g o é por hipótese, para justificar a continuidade de inv referimos o leitor ao **Exemplo 3.180**), de modo que inv $\circ g$, sua segunda coordenada, é contínua.

Da **Proposição 3.189** segue que:

$$\begin{array}{rccc} m: & \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & x \cdot y \end{array}$$

é contínua, pois é

$$\frac{f}{g} = m \circ h(x) = m \circ (\mathrm{id}_{\mathbb{R}}(f(x)), \mathrm{inv}\,(g(x)))$$

em virtude do **Exemplo 3.179**. Note que podemos escrever:

$$f/g = \mathrm{inv} \circ h,$$

ou seja, $f \cdot g$ é tal que o diagrama abaixo comuta:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\frac{f}{g}"] \arrow[d, "h"'] & \mathbb{R} \\ \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \arrow[ur, "m"'] & \end{tikzcd}$$

Desta forma, por ser a composição de duas funções contínuas, $\frac{f}{g} : M \to \mathbb{R}$ é contínua.
Exemplo 3.180 $\square$

3.18.2 Continuidade das Transformações Lineares

Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e sejam $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \| \cdot \|_V)$ e $\mathcal{W} = (W, +, \cdot, \| \cdot \|_W)$ dois $\mathbb{K}-$espaços vetoriais normados. Podemos tornar $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ espaços métricos munindo-lhes das respectivas métricas associadas, $d_{\|\cdot\|_V}(u, v) = \|u - v\|_V$ e $d_{\|\cdot\|_W}(w, z) = \|w - z\|_W$.

Recorde que uma **transformação linear** de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ é uma função:

$$T : V \to W$$

tal que:

(L1) $(\forall u \in V)(\forall v \in V)(T(u + v) = T(u) + T(v))$;

(L2) $(\forall \alpha \in \mathbb{K})(\forall v \in V)(T(\alpha \cdot v) = \alpha \cdot T(v))$.

Da propriedade **(L2)** segue, em particular, que $T(0_V) = 0_W$. Tais transformações são extremamente importantes, uma vez que preservam a estrutura algébrica do espaço vetorial.

Naturalmente que, com a definição natural da **diferença** entre dois vetores, ou seja, $u - v = u + (-v)$, temos as seguintes propriedades:

$$(\forall u \in V)(\forall v \in V)(T(-u) = -T(u) \text{ e } T(u - v) = T(u) - T(v))$$

Exemplo 3.196. *Uma homotetia em um $\mathbb{K}-$espaço vetorial é uma função $h_\alpha : V \to V$ dada por $h_\alpha(v) = \alpha \cdot v$, para algum $\alpha \in \mathbb{K}$ fixado.*

Toda homotetia, $h_\alpha : V \to V$,em que V é um $\mathbb{K}-$espaço vetorial e $\alpha \in \mathbb{K}$ é linear, uma vez que segue dos próprios axiomas de $\mathbb{K}-$espaço vetorial que:

(L1) $(\forall u \in V)(\forall v \in V)(h_\alpha(u + v) = \alpha \cdot (u + v) = \alpha \cdot u + \alpha \cdot v = h_\alpha(u) + h_\alpha(v))$

(L2) $(\forall \lambda \in \mathbb{K})(\forall v \in V)(h_\alpha(\lambda \cdot v) = \alpha \cdot (\lambda \cdot v) = (\alpha \cdot \lambda) \cdot v = (\lambda \cdot \alpha) \cdot v = \lambda \cdot (\alpha \cdot v) = \lambda \cdot h_\alpha(v))$

A seguir veremos uma caracterização da continuidade de transformações lineares.

Teorema 3.197. *Seja $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ e sejam $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|_V)$ e $\mathcal{W} = (W, +, \cdot, \|\cdot\|)$ dois $\mathbb{K}-$espaços vetoriais normados. Se $T : V \to W$ é uma transformação linear, as seguintes afirmações são equivalentes:*

(a) *T é contínua;*

(b) *T é contínua na origem, isto é, em 0_V;*

(c) *Existe um número real $K > 0$ tal que:*

$$(\forall v \in V)(\|T(v)\|_W \leq K \cdot \|v\|_V)$$

(d) *T é lipschitziana;*

Demonstração. Ad **(a)** $\Rightarrow$ **(b)**: é imediata;

Ad **(b)** $\Rightarrow$ **(c)**: Como, por hipótese, T é contínua na origem, e como $T(0_V) = 0_W$, tomando $\varepsilon = 1$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|v\|_V < \delta \Rightarrow \|T(v)\|_W < 1$$

Tomemos $K \in \mathbb{R}$ tal que $\frac{1}{\delta} < K$. Assim, dado qualquer $v \in V \setminus \{0_V\}$, o vetor $\frac{v}{K \cdot \|v\|_V} = \frac{1}{K \cdot \|v\|_V} \cdot v$ é tal que:

$$\left\| \frac{v}{K \cdot \|v\|_V} \right\|_V = \frac{\|v\|_V}{K \cdot \|v\|_V} = \frac{1}{K} < \delta$$

e portanto:

$$\left\| T\left(\frac{v}{K \cdot \|v\|_V} \right) \right\|_W < 1$$

donde segue que:

$$\|T(v)\|_W \leq K \cdot \|v\|_V$$

O caso em que $v = 0_V$ é trivial.

Ad **(c)** $\Rightarrow$ **(d)**: A constante de Lipschitz é igual a K, uma vez que para quaisquer $u, v \in V$ tem-se:

$$d_{\|\cdot\|_W}(T(u),T(v)) = \|T(u)-T(v)\|_W = \|T(u-v)\|_W \le K\cdot\|u-v\|_V = K\cdot d_{\|\cdot\|_V}(u,v)$$

Ad **(d)** $\Rightarrow$ **(a)**: segue diretamente do fato de T ser lipschitziana. $\square$

Corolário 3.198. *Se $\mathcal{V} = (V,+,\cdot,\|\cdot\|_V)$ é um $\mathbb{R}-$espaço vetorial normado então qualquer transformação linear $T:\mathbb{R}^n \to V$ é contínua.*

Demonstração. Naturalmente a afirmação refere-se a qualquer uma das métricas usuais das quais podemos munir o produto $\mathbb{R}^n$. Para fazermos esta demonstração, convém considerarmos em $\mathbb{R}^n$ a métrica da soma, d_S.

Sejam $e_1 = (1,0,\cdots,0), e_2 = (0,1,0,\cdots,0),\cdots, e_n = (0,0,\cdots,0,1)$. Dado $u\in\mathbb{R}^n$, podemos escrever:

$$u = x_1\cdot e_1 + x_2\cdot e_2 + \cdots + x_n\cdot e_n$$

para certos $x_1,\cdots,x_n\in\mathbb{R}$. Segue daí que:

$$\|T(u)\|_V = \left\|T\left(\sum_{i=1}^n x_i\cdot e_i\right)\right\|_V \le \sum_{i=1}^n |x_i|\cdot\|T(e_i)\|_V$$

Seja $K = \max\{\|T(e_1)\|_V,\cdots,\|T(e_n)\|_V\}$. Levando em conta que $\|u\| = |x_1|+\cdots+|x_n|$, temos então:

$$\|T(u)\|_V \le K\cdot\sum_{i=1}^n |x_i| = K\cdot\|u\|$$

Pelo item **(d)** do **Teorema 3.197**, segue que T é contínua. $\square$

Exercícios sobre Funções Contínuas

4.1 Mostrar que, em um conjunto M, duas métricas, $d_1,d_2 : M\times M\to\mathbb{R}_+$ são equivalentes se, e somente se, $d_1 \succ d_2$ e $d_2 \succ d_1$.

4.2 Seja $\mathcal{V} = (V,+,\cdot,\|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado. Considerando o espaço métrico $(V,d_{\|\cdot\|})$,em que $d_{\|\cdot\|}$ é a métrica associada à norma $\|\cdot\|$, mostrar que a função $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}_+, v\mapsto\|v\|$, é contínua.

4.3 Seja $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{K}-$espaço vetorial normado. A cada escalar $\alpha \in \mathbb{K}$, temos associada a função:

$$\begin{array}{rccc} H_\alpha : & V & \to & V \\ & v & \mapsto & \alpha \cdot v \end{array}$$

que denominamos a "homotetia de escala α". Mostrar que H_α é uma função contínua.

4.4 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos, $X \subseteq M$ e $f : M \to N$ uma função contínua. Demonstrar que $f\restriction_X : X \to f[X]$ é contínua.

4.5 Seja $M = \{0\} \cup \left\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\right\}$ com a métrica induzida de $\mathbb{R}$. Mostrar que $f : M \to \mathbb{R}$ dada por $f(0) = 0$ e $f\left(\frac{1}{n}\right) = n$ é contínua em todo ponto da forma $\frac{1}{n}$ mas não é contínua em 0.

4.6 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ satisfaz a **condição de Hölder de ordem** $k > 0$ se existir $c > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) \leq c \cdot [d_M(x, y)]^k$$

Mostrar que toda função que satisfaz a condição de Hölder é contínua.

4.7 Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} n+1, \text{ se } x = n \in \mathbb{N} \\ x, \text{ se } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N} \end{cases} \end{array}$$

Mostrar que f é contínua em $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$, mas não é contínua em $\mathbb{N}$.

4.8 Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{ se } (x, y) \neq (0, 0) \\ \dfrac{x \cdot y}{x^2 + y^2} \text{ se}(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \end{cases} \end{array}$$

Argumentar por que a função f é contínua em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ e mostrar que f não é contínua em $(0, 0)$. (**Dica:** mostre que f restrita à diagonal do plano não é contínua em $(0, 0)$.)

4.9 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Mostrar que $f : M \to N$ é contínua se, e somente se, para qualquer $X \subset M$ tivermos $f[\text{Cl.}(X)] \subset \text{Cl.}(f[X])$.

4.10 Sejam (M,d) um espaço métrico, $A \subset M$ e:

$$\begin{array}{rccc} \chi_A : & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A \\ 0, & \text{se } x \notin A \end{cases} \end{array}$$

Mostrar que χ_A é contínua em $x_0 \in M$ se, e somente se, $x_0 \notin \mathrm{Fr.}(A)$.

4.11 Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(a) < 0 < f(b)$. Se $\alpha = \sup\{x \in [a,b] \mid f(x) < 0\}$, mostrar que $f(\alpha) = 0$.

4.12 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f, g : M \to N$ funções contínuas. Mostrar que se existe $x_0 \in M$ tal que $f(x_0) \neq g(x_0)$, então existe $\eta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in B(x_0, \eta))(\forall y \in B(x_0, \eta))(f(x) \neq f(y))$$

4.13 Sejam $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ contínuas. Mostrar que:

$$(\forall x \in \mathbb{Q})(f(x) = g(x)) \Rightarrow (f = g).$$

3.18.3 Funções Uniformemente Contínuas

Sejam $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ uma função contínua em um ponto $x_0 \in M$. Como sabemos, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $d_N(f(x), f(x_0))$ para todo $x \in M$ tal que $d_M(x, x_0) < \delta$. Em geral, este δ depende não somente de ε, mas do ponto $x_0 \in M$ dado (cf. **Exemplo 3.180**). Há casos, no entanto, em que ε depende exclusivamente de δ (e é daqui que vem o advérbio "uniformemente") – ou seja, pode-se usar o mesmo δ para todos os pontos de M, no seguinte sentido:

Definição 3.199 (função uniformemente contínua). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é* ***uniformemente contínua*** *se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Intuitivamente, isto significa que para obter valores de $f(x)$ e $f(y)$ arbitrariamente próximos entre si, basta tomarmos pontos $x, y \in M$ suficientemente próximos, não importando em qual região do domínio os pontos estejam. Alternativamente, podemos "controlar" a distância entre as imagens de pontos x e y apenas limitando (e com um limitante que vale para qualquer par de pontos) a distância entre x e y.

Ao contrário da simples continuidade, que é um fenômeno local, a continuidade uniforme é uma noção global, isto é, se relaciona com o comportamento da função em todo o espaço simultaneamente. Pode ocorrer de uma função $f : (M, d_1) \to (N, d_2)$ ser uniformemente contínua quando restrita a bolas abertas do espaço e, no entanto, f não ser uniformemente contínua *per se*.

É fácil demonstrar que toda função uniformemente contínua também é contínua (em todo o seu domínio): suponha $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ uniformemente contínua e seja $x_0 \in M$. Dado qualquer $\varepsilon > 0$ arbitrado, da continuidade uniforme de f constroi-se $\delta > 0$ tal que, dado qualquer $x \in M$ com $d(x_0, x) < \delta$, tem-se $d(f(x_0), f(x)) < \varepsilon$ – donde segue que f é contínua em x_0.

A recíproca desta afirmação, no entanto, é falsa: a função $\text{inv} : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ é contínua, mas não uniformemente contínua, como veremos posteriormente.

No exemplo a seguir, apresentamos uma classe de funções que são uniformemente contínuas.

Exemplo 3.200. *Toda função lipschitziana é uniformemente contínua. De fato, se $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é lipschitziana, existe $K > 0$ tal que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_N(f(x), f(y)) \leq K \cdot d_M(x, y))$$

Dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{K} > 0$, e teremos:

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x, y) < \frac{\varepsilon}{K} \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) \leq K \cdot d_M(x, y) < K \cdot \frac{\varepsilon}{K} = \varepsilon)$$

Em particular, contrações fracas são funções uniformemente contínuas.

O exemplo a seguir nos mostra que:

$$(f \text{ contínua}) \nRightarrow (f \text{ uniformemente contínua})$$

Exemplo 3.201. *A função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$$

não é uniformemente contínua.

De fato, afirmar que f não é uniformemente contínua é negar:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in \mathbb{R}^*)(\forall x \in \mathbb{R}^*)(|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

ou seja, f não é uniformemente contínua se, e somente se:

$$(\exists \varepsilon > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x \in \mathbb{R}^*)(\exists y \in \mathbb{R}^*)((|x-y| < \delta)\&(|f(x)-(y)| \geq \varepsilon))$$

Seja $\varepsilon = 1$. Para qualquer que seja $\delta > 0$ existem números naturais não nulos, n_0, n_0+1 tais que:

$$\frac{1}{n_0 \cdot (n_0+1)} < \delta$$

Tomemos $x = \dfrac{1}{n_0}$ e $y = \dfrac{1}{n_0+1}$. Temos, então:

$$|x-y| = \left|\frac{1}{n_0 \cdot (n_0+1)}\right| = \frac{1}{n_0 \cdot (n_0+1)} < \delta$$

e no entanto:

$$|f(x)-f(y)| = \left|\frac{1}{\frac{1}{n_0}} - \frac{1}{\frac{1}{n_0+1}}\right| = \Big|n_0 - (n_0+1)\Big| = 1 = \varepsilon$$

O exemplo a seguir nos mostra que:

$$(f \text{ uniformemente contínua}) \not\Rightarrow (f \text{ lipschitziana})$$

Exemplo 3.202. *Considere a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & [0,\infty[& \to & [0,\infty[\\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Note que f é uniformemente contínua. De fato, tem-se:

$$(\forall x \in [0,\infty[)(\forall y \in [0,\infty[)(|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|})$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon^2$, se $|x-y| < \delta = \varepsilon^2$, teremos:

$$|\sqrt{x}-\sqrt{y}| \leq \sqrt{|x-y|} < \sqrt{\varepsilon^2} = \varepsilon$$

No entanto, f <u>não</u> é lipschitziana, uma vez que para qualquer $K > 0$ existem $x, y \in [0,\infty[$, $x \neq y$ de tal modo que:

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|} = \frac{|\sqrt{x}-\sqrt{y}|}{|x-y|} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} > K$$

Basta tomarmos, por exemplo, $x = \frac{1}{16 \cdot K^2}$ e $y = \frac{1}{4 \cdot K^2}$, e teremos:

$$\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{16 \cdot K^2}} + \sqrt{\frac{1}{4 \cdot K^2}}} = \frac{1}{\frac{1}{4 \cdot K} + \frac{1}{2 \cdot K}} = \frac{1}{\frac{3}{4 \cdot K}} = \frac{4}{3} \cdot K > K.$$

Exemplo 3.203. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $X \subset M$ qualquer. A função inclusão:*

$$\begin{array}{rccc} \iota_X^M : & X & \hookrightarrow & M \\ & x & \mapsto & x \end{array}$$

que consideramos em X a métrica induzida por d, ou seja, $d\restriction_{X\times X}$, é uniformemente contínua. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \varepsilon$ e teremos, para quaisquer que sejam $x,y \in X$:

$$d\restriction_{X\times X}(x,y) < \delta = \varepsilon \iff d(x,y) < \varepsilon \iff d(\iota_X^M(x), \iota_X^M(y)) < \varepsilon$$

Poderíamos caracterizar a continuidade uniforme em termos de pré-imagens, como segue:

Definição 3.204. *Uma função $f : (M,d_M) \to (N,d_N)$ é* ***uniformemente contínua*** *se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $\delta > 0$ tal que:*

$$\{(x,y) \in M \times M \mid d_M(x,y) < \delta\} \subseteq (f \times f)^{\dashv}[\{(z,w) \in N \times N \mid d_N(z,w) < \varepsilon\}]$$

onde:

$$\begin{array}{rccc} f \times f : & M \times M & \to & N \times N \\ & (x,y) & \mapsto & (f(x), f(y)) \end{array}$$

Note que na definição acima *não* estamos exigindo que a pré-imagem de todo subconjunto aberto do contradomínio seja aberta no domínio, mas que a pré-imagem (por $f \times f$) de subconjuntos da forma $\{(z,w) \in N \times N \mid d(z,w) < \varepsilon\}$ contenham algum conjunto da forma $\{(x,y) \in M \times M \mid d(x,y) < \delta\}$, para algum $\delta > 0$. Não se trata, portanto, de exigir que certa propriedade que faça referência exclusivamente a pré-imagens e a subconjuntos abertos se cumpra, mas que certos subconjuntos especiais do co-domínio (que não se caracterizam *somente* por serem abertos) contenham, em sua pré-imagem, um conjunto da forma $\{(z,w) \in N \times N \mid d(z,w) < \varepsilon\}$.

Na verdade, não se pode caracterizar a continuidade uniforme unicamente em termos de abertos e de pré-imagens.

3.18.4 Fatos sobre Funções Uniformemente Contínuas

Começamos apresentando uma condição suficiente para que uma função cujo domínio esteja munido de duas métricas diferentes seja uniformemente contínua de acordo com uma das métricas se, e somente se, for uniformemente contínua com respeito à outra.

Teorema 3.205. *Seja M um conjunto não vazio e sejam $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ métricas sobre M tais que existem constante $\alpha > 0, \beta > 0$ tais que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y))$$

Se (N,d) é um espaço métrico qualquer, tem-se que:

$$f : (M, d_1) \to (N, d)$$

é uniformemente contínua se, e somente se:

$$f : (M, d_2) \to (N, d)$$

for uniformemente contínua.

Demonstração. ($\Leftarrow$) Suponhamos que $f : (M, d_2) \to (N, d)$ seja uniformemente contínua, de modo que dado $\varepsilon > 0$ existirá $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$:

$$d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dado $\varepsilon > 0$, tomamos portanto $\dfrac{\delta}{\beta} > 0$, e teremos, para quaisquer $x, y \in M$:

$$d_1(x,y) < \frac{\delta}{\beta} \Rightarrow \beta \cdot d_1(x,y) < \delta \overset{d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y)}{\Longrightarrow} d_2(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

e portanto $f : (M, d_1) \to (N, d)$ é uniformemente contínua.

($\Rightarrow$) Suponhamos que $f : (M, d_1) \to (N, d)$ seja uniformemente contínua. Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in M$:

$$d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Tomando $\delta \cdot \alpha > 0$, teremos, para quaisquer $x, y \in M$:

$$d_2(x,y) < \delta \cdot \alpha \iff \frac{1}{\alpha} \cdot d_2(x,y) < \delta \overset{\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y)}{\Longrightarrow} d_1(x,y) < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

$\square$

Na sequência, apresentamos uma condição suficiente para que uma função cujo co-domínio esteja munido de duas métricas diferentes seja uniformemente contínua de acordo com uma das métricas se, e somente se, for uniformemente contínua com respeito à outra.

Teorema 3.206. *Seja N um conjunto não vazio e sejam $d_1, d_2 : N \times N \to \mathbb{R}_+$ métricas sobre N tais que existem constantes $\alpha > 0, \beta > 0$ tais que:*

$$(\forall x \in N)(\forall y \in N)(\alpha \cdot d_1(x,y) \leq d_2(x,y) \leq \beta \cdot d_1(x,y))$$

Se (M,d) é um espaço métrico qualquer, tem-se que:

$$f : (M,d) \to (N,d_1)$$

é uniformemente contínua se, e somente se:

$$f : (M,d) \to (N,d_2)$$

for uniformemente contínua.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponhamos que $f : (M,d) \to (N,d_1)$ seja uniformemente contínua. Seja $\varepsilon > 0$ dado qualquer. Considere o número $\dfrac{\varepsilon}{\beta} > 0$: como $f : (M,d) \to (N,d_1)$ é uniformemente contínua, existe um $\delta > 0$ tal que:

$$d(x,y) < \delta \Rightarrow d_1(f(x),f(y)) < \frac{\varepsilon}{\beta} \overset{d_2(f(x),f(y)) \leq \beta \cdot d_1(f(x),f(y))}{\Longrightarrow} d_2(f(x),f(y)) < \varepsilon$$

Logo, $f : (M,d) \to (N,d_2)$ é uniformemente contínua.

$(\Leftarrow)$ Exercício.

$\square$

Os dois resultados acima nos garantem, em particular, que quando o domínio ou o contra-domínio de uma função f for um produto cartesiano de espaços métricos, é indiferente usar qualquer uma das métricas usuais, d_E, d_M ou d_S no produto, a fim de verificar a continuidade uniforme de f. Isto significa que, se f é uniformemente contínua com relação a uma dessas métricas, também o será em relação às outras duas.

Teorema 3.207. *Sejam $(M,d_M), (N,d_N)$ e (P,d_P) espaços métricos e sejam $f : M \to N$ e $g : N \to P$ funções uniformemente contínuas. Então $g \circ f : M \to P$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. Dado $\varepsilon > 0$, uma vez que g é uniformemente contínua, existe $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ tal que, para quaisquer $z, w \in N$ tais que $d_N(z,w) < \eta$ tem-se $d_P(g(z),g(w)) < \varepsilon$. Também, como

f é uniformemente contínua, dado $\eta > 0$ existirá algum $\delta(\eta) = \delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ tais que $d_M(x,y) < \delta$, tem-se $d_N(f(x), f(y)) < \eta$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $\delta = \delta(\eta(\varepsilon))$ construído acima e teremos, para quaisquer $x, y \in M$:

$$d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_P(g(f(x)), g(f(y))) < \varepsilon.$$

□

Corolário 3.208. *A restrição de qualquer função uniformemente contínua é uniformemente contínua.*

Proposição 3.209. *Sejam $(M, d_M), (N_1, d_1), \cdots, (N_k, d_k)$ espaços métricos. Uma função $f : (M, d) \to (N_1 \times \cdots \times N_k, d_N)$,*

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & N_1 \times \cdots \times N_k \\ & x & \mapsto & (f_1(x), \cdots, f_k(x)) \end{array}$$

onde d_N é qualquer uma das métricas (equivalentes) da qual se pode munir o produto, é uniformemente contínua se, e somente se, $(\forall i \in \{1, \cdots, k\})(f_i : M \to N_i$ é uniformemente contínua$)$.

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha f uniformemente contínua. Para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$, o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "f_i"'] & N_1 \times \cdots \times N_k \arrow[d, "\pi_i"] \\ & N_i \end{tikzcd}$$

comuta (isto significa que $f_i = \pi_i \circ f$). Uma vez que a projeção na $i-$ésima coordenada é uma função uniformemente contínua (por ser uma contração fraca), segue do **Teorema 3.207** que f_i é uniformemente contínua.

$(\Leftarrow)$ Suponha, reciprocamente, que cada uma das funções $f_i : M \to N_i$ seja uniformemente contínua. Consideremos $d_N =$ a métrica do máximo. Sejam $x, y \in M$ quaisquer e $\varepsilon > 0$ dado. Como cada f_i é uniformemente contínua, para cada $i \in \{1, \cdots, k\}$ existirá $\delta_i > 0$ tal que:

$$d_M(x,y) < \delta_i \Rightarrow d_i(f_i(x), f_i(y)) < \varepsilon$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_k\}$. Para este δ, teremos:

$$d_M(x,y) < \delta \Rightarrow \begin{cases} d_M(x,y) < \delta_1 \\ d_M(x,y) < \delta_2 \\ \vdots \\ d_M(x,y) < \delta_k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_1(f_1(x), f_1(y)) < \varepsilon \\ d_2(f_2(x), f_2(y)) < \varepsilon \\ \vdots \\ d_k(f_k(x), f_k(y)) < \varepsilon \end{cases} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \max\{d_i(f_i(x), f_i(y)) \mid i \in \{1, \cdots, k\}\} = d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

□

Teorema 3.210. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Uma função $f : M \to N$ é uniformemente contínua se, e somente se, para todo par de sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ valha:*

$$\lim_{n\to\infty} d_M(x_n, y_n) = 0 \Rightarrow \lim_{n\to\infty} d_N(f(x_n), f(y_n)) = 0$$

Demonstração. ($\Rightarrow$) Como f é uniformemente contínua, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in M$ vale:

$$d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

Dado o $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ acima, uma vez que $d(x_n, y_n) \to 0$, existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\delta) \Rightarrow 0 \leq d_M(x_n, y_n) < \delta$$

Desta forma, como para qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow d_N(f(x_n), f(y_n)) < \varepsilon,$$

ou seja, $d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$.

($\Leftarrow$) [**Estratégia:** mostrar, por contraposição, que se f não for uniformemente contínua então existem sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em M tais que $d_M(x_n, y_n) \to 0$ mas $d_N(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$]

Suponha (por contraposição) que f *não* seja uniformemente contínua em M. Assim, haverá algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer $\delta > 0$ tem-se:

$$(d_M(x,y) < \delta) \& (d_N(f(x), f(y)) \geq \varepsilon_0)$$

Desta forma, para cada $n \in \mathbb{N}$, podemos encontrar $x_n, y_n \in M$ tais que:

$$\left(d_M(x_n, y_n) < \frac{1}{2^n}\right) \& (d_N(f(x_n), f(y_n)) \geq \varepsilon_0)$$

Claramente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são tais que $d(x_n, y_n) \to 0$ mas $d(f(x_n), f(y_n)) \not\to 0$, e segue o resultado. $\square$

Proposição 3.211. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo limitado de $\mathbb{R}$, com a métrica usual. Então toda função uniformemente contínua $f : I \to (M, d)$ é limitada.*

Demonstração. Tomemos $\varepsilon = 1$. Como f é uniformemente contínua em I, segue que existe $\delta > 0$ tal que $(\forall x \in I)(\forall y \in I)(|x - y| < \delta \Rightarrow d(f(x), f(y)) < 1)$.

Como I é limitado, podemos decompor I como reunião de, digamos, n subintervalos consecutivos, todos de comprimento menor do que δ:

$$I = I_1 \cup I_2 \cup \cdots \cup I_n$$

Sejam a_1, a_2 os extremos de I_1, a_2, a_3 os extremos de I_2 e assim por diante, a_k, a_{k+1} os extremos de I_n. Certamente $k \leq n$. Caso $k = 0$, não haverá pontos na subdivisão, de modo que $|x - y| < \delta$ e portanto $d(f(x), f(y)) < 1$. Caso tenhamos $k > 0$, valerá:

$$\begin{aligned} d(f(x), f(y)) \leq \\ &\leq d(f(x), f(a_1)) + d(f(a_1), f(a_2)) + \cdots + d(f(a_k), f(y)) \leq \\ &\leq 1 + 1 + \cdots + 1 \leq n + 1 \end{aligned}$$

Como $\operatorname{diam.}(f[I]) = \sup\{d(f(x), f(y)) \mid (x \in I)\&(y \in I)\}$ e $n + 1$ é cota superior para este conjunto, segue-se que $\operatorname{diam.}(f[I]) \leq n + 1$. Logo, f é limitada, por definição. $\square$

Exercícios sobre Funções Uniformemente Contínuas

5.1 Sejam $(M, d), (N_1, d_1), \cdots, (N_n, d_n)$ espaços métricos e:

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & N_1 \times \cdots \times N_n \\ & x & \mapsto & (f_1(x), \cdots, f_n(x)) \end{array}$$

Mostrar que f é uniformemente contínua se, e somente se, $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})(f_i : M \to N_i$ é uniformemente contínua$)$.

5.2 Sejam $(M_1, d_{M_1}), \cdots, (M_n, d_{M_n}), (N_1, d_{N_1}), \cdots, (N_n, d_{N_n})$ espaços métricos. Considere:

$$\begin{array}{rccc} f: & M_1 \times \cdots \times M_n & \to & N_1 \times \cdots \times N_n \\ & (x_1, \cdots, x_n) & \mapsto & (f_1(x_1), \cdots, f_n(x_n)) \end{array}$$

Mostrar que f é uniformemente contínua se, e somente se, $(\forall i \in \{1, 2, \cdots, n\})(f_i : M_i \to N_i$ é uniformemente contínua$)$.

5.3 Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Mostrar que a função:

$$\begin{array}{rccc} d(\cdot, X): & M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & d(x, X) \end{array}$$

é uniformemente contínua.

5.4 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos. Mostrar que a função $f : M \to N$ é uniformemente contínua se, e somente se, para quaisquer sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de M e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, de elementos de N, tivermos:

$$d(x_n, y_n) \to 0 \Rightarrow d(f(x_n), f(y_n)) \to 0$$

3.19 Espaços Homeomorfos

Informalmente, a Topologia é o estudo de certas transformações chamadas "homeomorfismos" (do grego, ʼομοιος (similar, parecido) + μορφέ (forma, aspecto); esta palavra foi cunhada por H. Poincaré em 1895). Essencialmente, essas transformações formam a grande classe das transformações bijetoras e bicontínuas de um espaço em outro.

Pontos distintos de um espaço, portanto, não são juntados (ou colapsados) por um homeomorfismo, e não são permitidos "rasgões" no espaço - a menos que sejam posteriormente consertados. Apesar de sua aparente simplicidade, a noção de homeomorfismo envolve questões dificílimas, centrais em diversas áreas da Matemática, muitas das quais até hoje sem solução.

Abaixo damos a definição formal de homeomorfismo:

Definição 3.212 (homeomorfismo). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos e $f : M \to N$ uma função. Dizemos que f* ***é um homeomorfismo*** *se:*

(H1) *f é bijetora;*

(H2) *f é bicontínua, ou seja, tanto f como f^{-1} são ambas contínuas.*

No caso de existir um homeomorfismo entre (M, d_M) e (N, d_N), dizemos que (M, d_M) e (N, d_N) são espaços métricos homeomorfos.

As propriedades preservadas por homeomorfismos são denominadas "propriedades topológicas". Veremos que propriedades como "ser aberto", "ser fechado", "ser ponto de acumulação" dentre muitas outras são propriedades topológicas. Veja o:

Teorema 3.213. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ um homeomorfismo. Então dado qualquer aberto $U \subseteq M$, tem-se que $f[U] \subseteq N$ será aberto.*

Demonstração. De fato, sendo um homeomorfismo, f admite inversa contínua. Sendo f uma bijeção, vale que $f[U] = (f^{-1})^{\dashv}[U]$, e como f^{-1} é contínua, segue que $(f^{-1})^{\dashv}[U] \subseteq N$ é aberto. $\square$

Observe que a continuidade de uma bijeção $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é independente da continuidade e/ou da descontinuidade de sua inversa, de modo que não é redundante exigi-la na definição de homeomorfismo. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [0, 2\pi[& \to & \mathbb{S}^1 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

que é contínua, uma vez que suas duas coordenadas o são, e é bijetora (verifique).

No entanto, veremos que $f^{-1} : \mathbb{S}^1 \to [0, 2\pi[$ *não* é contínua, pois é descontínua no ponto $(1, 0) \in \mathbb{S}^1$. Consideremos a bola aberta de centro em $0 \in [0, 2\pi[$ e raio 1: $B_{[0,2\pi[}(0, 1) = \{x \in [0, 2\pi[\mid |x| < 1\} = [0, 1[$. Consideremos uma bola de centro em $(0, 1)$ e de raio $\delta > 0$ qualquer. Esta bola nada mais é do que um arco aberto em $\mathbb{S}^1$ centrado em $(1, 0)$. Do fato que $\lim_{t \to 2\pi_-} f(t) = (1, 0)$, segue que dado $\delta > 0$ existe $\eta > 0$ tal que $t \in]2\pi - \eta, 2\pi[$ implica $f(t) \in B_{\mathbb{S}^1}((1, 0), \delta)$. Escolhendo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\eta} < n$ (o que é possível uma vez que $\mathbb{R}$ é arquimediano), teremos:

$$P_n = \left(\cos\left(2\pi - \frac{1}{n}\right), \sin\left(2\pi - \frac{1}{n}\right)\right) \in B_{\mathbb{S}^1}((0, 1), \delta)$$

Então:

$$f^{-1}(P_n) = 2\pi - \frac{1}{n}$$

mas como $2\pi - \frac{1}{n} > 1$, segue que $f^{-1}(P_n) \notin [0, 1[$. Desta forma, $(f^{-1})^{\dashv}[[0, 1[] \not\subset B((1, 0), \delta)$.

Denominamos funções que aplicam subconjuntos abertos em subconjuntos abertos por "funções abertas". Assim, todo homeomorfismo é uma função aberta.

É fácil ver que um homeomorfismo estabelece uma bijeção entre os subconjuntos abertos dos dois espaços, ou seja, se $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo, então:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & \operatorname{Open}(M, d_M) & \to & \operatorname{Open}(N, d_N) \\ & U & \mapsto & f[U] \end{array}$$

é uma bijeção.

Isto implica que as noções topológicas de um desses espaços correspondem fielmente às do outro. Assim, a fechados de M correspondem fechados N, a conjuntos densos de M correspondem conjuntos densos de N e assim por diante. Isto motiva a seguinte:

Definição 3.214 (invariante topológico). *Seja (M, d_M) um espaço métrico qualquer. As propriedades de M que são preservadas sob homeomorfismos são denominadas* ***invariantes topológicos****.*

Propriedades de elementos e/ou de subconjuntos de um espaço métrico invariantes sob homeomorfismos são denominadas "propriedades topológicas".

Observação 3.215. *Dados um espaço métrico (M, d) e $X \subset M$, a propriedade "X é aberto" é preservada por homeomorfismos. Com efeito, se (N, d_N) é um espaço métrico e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo, do* ***Teorema 3.213*** *segue que $f[U] \subseteq N$ é aberto. Assim,*

$$X \subset M \text{ aberto} \overset{f \text{ homeo}}{\Longrightarrow} f[X] \subset N \text{ aberto}$$

Disto segue imediatamente que homeomorfismos aplicam pontos interiores de subconjuntos do domínio em pontos interiores do respectivo conjunto imagem contido no contradomínio, i.e., $x_0 \in \operatorname{int.}(X) \overset{f \text{ homeo}}{\Longrightarrow} f(x_0) \in \operatorname{int.}(f[X])$.

Observação 3.216. *Dados um espaço métrico (M, d), $X \subset M$ e $x_0 \in M$, a propriedade "$x_0 \in \operatorname{Fr.}(X)$" é preservada sob homeomorfismos. Com efeito, se (N, d_N) é um espaço métrico e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo, $f(x_0) \in \operatorname{Fr.}(f[X])$. De fato, dado qualquer $\varepsilon > 0$, como f é contínua em x_0, existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)]$. Como $x_0 \in \operatorname{Fr.}(X)$, temos:*

$$B(x_0, \delta) \cap X \neq \varnothing \;\; e \;\; B(x_0, \delta) \cap M \setminus X \neq \varnothing$$

ou seja, existem $x_1 \in B(x_0, \delta) \cap X$ e $x_2 \in B(x_0, \delta) \cap (M \setminus X)$. Assim, como $f[B(x_0, \delta)] \subseteq B(f(x_0), \varepsilon)$, segue que $f(x_1) \in f[B(x_0, \delta)] \cap f[X] \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \cap f[X]$ e $f(x_2) \in f[B(x_0, \delta)] \cap f[M \setminus X] \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \cap f[M \setminus X] = B(f(x_0), \varepsilon) \cap f[M] \setminus f[X] = B(f(x_0), \varepsilon) \cap (N \setminus f[X])$. Assim,

$$B(f(x_0), \varepsilon) \cap f[X] \neq \varnothing \;\; e \;\; B(f(x_0), \varepsilon) \cap N \setminus f[X] \neq \varnothing$$

de modo que $f(x_0) \in \operatorname{Fr.}(f[X])$. Assim,

$$x_0 \in \operatorname{Fr.}(X) \overset{f \text{ homeo}}{\Longrightarrow} f(x_0) \in \operatorname{Fr.}(f[X]).$$

Observação 3.217. *Dados um espaço métrico (M, d), $X \subset M$ e $x_0 \in M$, a propriedade "$x_0 \in \operatorname{Cl.}(X)$" é preservada sob homeomorfismos. Com efeito, se (N, d_N) é um espaço métrico e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um homeomorfismo, $f(x_0) \in \operatorname{Fr.}(\operatorname{Cl.}(X))$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, da continuidade de f segue que existe $\delta > 0$ tal que $B(x_0, \delta) \subseteq f^{\dashv}[B(f(x_0), \varepsilon)]$. Como, por hipótese, $x_0 \in \operatorname{Cl.}(X)$, existe* *algum $x_\delta \in B(x_0, \delta) \cap X$. Assim, $f(x_\delta) \in f[B(x_0, \delta) \cap X] \subseteq B(f(x_0), \varepsilon) \cap f[X]$. Concluímos assim que $f(x_0) \in \mathrm{Cl.}(f[X])$.*

É comum usarmos a mesma designação para todos os espaços de uma mesma classe de espaços homeomorfos. Isto naturalmente significa que o aspecto puramente métrico foi abstraído e que o enfoque é aquele chamado "topológico", ou seja, a estrutura dada pela coleção dos abertos desse espaço.

Por exemplo:

- todo espaço métrico homeomorfo a $[0, 1]$ é chamado de "arco";
- todo espaço métrico homeomorfo ao círculo unitário $\mathbb{S}^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ no plano euclidiano $\mathbb{R}^2$ é chamado de "curva simples" ou "curva de Jordan";

Exemplo 3.218. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma função contínua. O gráfico de f, $\mathrm{Graf}(f) = \{(x, f(x)) \in M \times N \mid x \in M\}$, com a métrica induzida de $M \times N$ é homeomorfo a (M, d_M). De fato, considere:*

$$\begin{array}{rccc} \varphi : & M & \to & \mathrm{Graf.}(f) \\ & x & \mapsto & (x, f(x)) \end{array}$$

que é uma função contínua, uma vez que cada uma de suas funções-coordenadas é contínua.

φ é injetora, uma vez que se $x_1, x_2 \in M$ forem tais que $x_1 \neq x_2$, então, por definição de igualdade de pares ordenados, teremos $\varphi(x_1) = (x_1, f(x_1)) \neq (x_2, f(x_2)) = \varphi(x_2)$ (uma vez que pelo menos suas primeiras coordenadas diferem). Ademais, dado qualquer $(x, y) \in \mathrm{Graf}(f)$ temos, por definição do gráfico, $y = f(x)$, de modo que $\varphi(x) = (x, f(x)) = (x, y)$, logo φ é sobrejetora.

Finalmente, observe que:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} : & \mathrm{Graf.}(f) & \to & M \\ & (x, y) & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua, pois é a projeção na primeira coordenada.

Exemplo 3.219. *O hemisfério norte da esfera unitária em $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{S}^1_+ = \{(x, y) \mid (x^2 + y^2 = 1) \& (y > 0)\}$ é homeomorfo ao intervalo $]-1, 1[$ – uma vez que é o gráfico da função:*

$$\begin{array}{rccc} \eta : &]-1, 1[& \to & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & (x, \sqrt{1 - x^2}) \end{array}$$

Exemplo 3.220. *A reta real, $\mathbb{R}$, é homeomorfa à parábola $y = x^2$, por esta ser o gráfico da função $f(x) = x^2$.*

Exemplo 3.221. *Se $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ é um espaço vetorial normado, então qualquer bola aberta é homeomorfa ao espaço todo.*

Seja $v_0 \in V$ um ponto qualquer e $\varepsilon > 0$. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & B(v_0, \varepsilon) & \to & B(0,1) \\ & v & \mapsto & \dfrac{1}{\varepsilon} \cdot (v - v_0) \end{array}$$

é contínua, por ser composição da translação $v \mapsto v - v_0$ e da homotetia $u \mapsto \frac{1}{\varepsilon} \cdot u$. É fácil verificar que f é injetora. Agora, como para qualquer $u \in B(v_0, \varepsilon)$ tem-se:

$$\|f(u)\| = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \|u - v_0\| < \frac{1}{\varepsilon} \cdot \varepsilon = 1$$

podemos concluir que $f[B(v_0, \varepsilon)] = B(0,1)$. Assim, f é bijetora e sua inversa, que é dada por:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & B(0,1) & \to & B(v_0, \varepsilon) \\ & u & \mapsto & \varepsilon \cdot u + v_0 \end{array}$$

que, portanto, também é contínua. Destarte, f é um homeomorfismo entre $B(v_0, \varepsilon)$ e $B(0,1)$. Mostremos agora que $B(0,1)$ é homeomorfo a $\mathcal{V}$.

Note que a função:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & V & \to & B(0,1) \\ & v & \mapsto & \dfrac{v}{1 + \|v\|} \end{array}$$

é contínua, e que sua inversa:

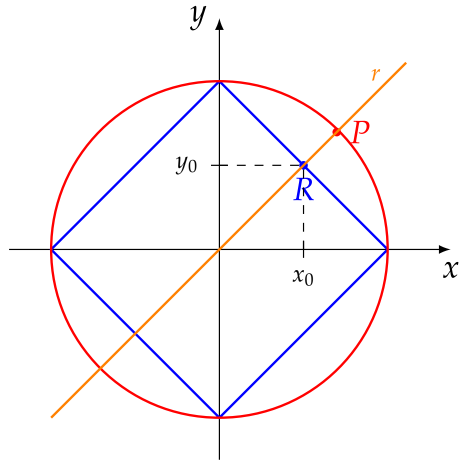
$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1}: & B(0,1) & \to & V \\ & v & \mapsto & \dfrac{v}{1 - \|v\|} \end{array}$$

também é contínua. Assim, $\varphi \circ f$ é um homeomorfismo entre $B(v_0, \varepsilon)$ e V.

Exemplo 3.222. *A circunferência unitária, $\mathbb{S}^1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é homeomorfa ao quadrado $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\}$. De fato, a função:*

$$\begin{array}{rccc} f: & Q & \to & \mathbb{S}^1 \\ & (x,y) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) \end{array}$$

é um homeomorfismo.



Nota-se, facilmente, que como cada uma de suas coordenadas é contínua, a função f é contínua. Note que, geometricamente, f aplica um ponto $(x_0, y_0) \in Q$, do quadrado, sobre o ponto em que a semirreta $r : (x, y) = t \cdot (x_0, y_0), t > 0$ intercepta $\mathbb{S}^1$. Note que $t_0 \in \mathbb{R}_+^*$ é tal que $(tx_0, ty_0) \in \mathbb{S}^1$ se, e somente se, $t_0^2 \cdot (x_0^2 + y_0^2) = 1$ e $t_0 > 0$, ou seja, se $t_0 = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}$. Logo, f aplica (x_0, y_0) em $\left(\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}, \frac{y_0}{\sqrt{x_0^2+y_0^2}}\right) \in \mathbb{S}^1$.

A inversa de f será, geometricamente, a função que a cada ponto $(u_0, v_0) \in \mathbb{S}^1$ associa o ponto em que a semirreta $(u, v) = t \cdot (u_0, v_0), t > 0$ intercepta o quadrado Q, ou seja, tal que:

$$|t \cdot u_0| + |t \cdot v_0| = 1$$

$$|t| \cdot (|u_0| + |v_0|) = 1$$

$$t = \frac{1}{|u_0| + |v_0|}$$

Isto nos sugere que a função inversa de f é:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{S}^1 & \to & Q \\ & (u, v) & \mapsto & \left(\frac{u}{|u| + |v|}, \frac{v}{|u| + |v|}\right) \end{array}$$

De fato, dado $(x, y) \in Q$ (ou seja, tais que $|x| + |y| = 1$), tem-se:

$$g \circ f(x,y) = g\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}, \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\left|\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right| + \left|\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|}\right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}, \frac{\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}}{\frac{|x|+|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}\right) = \left(\frac{x}{|x|+|y|}, \frac{y}{|x|+|y|}\right) \overset{|x|+|y|=1}{\overset{\uparrow}{=}} (x,y)$$

de modo que f é uma seção (i.e., tem inversa à esquerda).

Também, dado $(u,v) \in \mathbb{S}^1$ (ou seja, tal que $\sqrt{u^2+v^2} = 1$). Tem-se:

$$f \circ g(u,v) = f\left(\frac{u}{|u|+|v|}, \frac{v}{|u|+|v|}\right) = \left(\frac{\frac{u}{|u|+|v|}}{\sqrt{\left(\frac{u}{|u|+|v|}\right)^2 + \left(\frac{v}{|u|+|v|}\right)^2}}, \frac{\frac{v}{|u|+|v|}}{\sqrt{\left(\frac{u}{|u|+|v|}\right)^2 + \left(\frac{v}{|u|+|v|}\right)^2}}\right) =$$

$$= \left(\frac{\frac{u}{|u|+|v|}}{\sqrt{\frac{u^2+v^2}{(|u|+|v|)^2}}}, \frac{\frac{v}{|u|+|v|}}{\sqrt{\frac{u^2+v^2}{(|u|+|v|)^2}}}\right) = \left(\frac{\frac{u}{|u|+|v|}}{\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{|u|+|v|}}, \frac{\frac{v}{|u|+|v|}}{\frac{\sqrt{u^2+v^2}}{|u|+|v|}}\right) = \left(\frac{u}{\sqrt{u^2+v^2}}, \frac{v}{\sqrt{u^2+v^2}}\right) \overset{\sqrt{u^2+v^2}=1}{\overset{\uparrow}{=}} (u,v)$$

Assim, f também é uma retração, ou seja, f admite uma inversa à direita. Portanto $g = f^{-1}$. Note que g é contínua, pois cada uma de suas coordenadas é uma função contínua em $\mathbb{S}^1$. Assim, Q e $\mathbb{S}^1$ são conjuntos homeomorfos. Do que expusemos agora seque que Q é uma curva de Jordan.

Exemplo 3.223. *Considere $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$em que $d(x,y) = |x-y|$. Quaisquer dois intervalos abertos não degenerados, digamos, $]a,b[$ e $]c,d[$ (com $a < b$ e $c < d$) são homeomorfos.*

De fato, a função:

$$\begin{array}{rccc} \varphi : &]a,b[& \to &]c,d[\\ & x & \mapsto & \frac{d-c}{b-a} \cdot (x-a) + c \end{array}$$

é um homeomorfismo.

Exemplo 3.224 (projeção estereográfica). *Seja $N = (0,0,1)$ o polo norte da esfera $\mathbb{S}^2 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 = 1\}$. Então $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$. De fato, vamos construir o homeomorfismo: dado um ponto $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$, considere a reta que contém o polo norte e este ponto, ou seja, a reta $r : (x,y,z) = (0,0,1) + \lambda \cdot [(x_0,y_0,z_0) - (0,0,1)]$, que também pode ser expressa por $(x,y,z) = (0,0,1) + \lambda \cdot (x_0,y_0,z_0-1)$ [note que, como removemos o polo norte, $z \neq 1$, e portanto*

$z - 1 \neq 0$]. Aplicaremos o ponto (x_0, y_0, z_0) sobre o ponto de interseção desta reta com o plano $z = 0$ (que é homeomorfo a $\mathbb{R}^2$). Qualquer ponto da reta r é da forma $(\lambda \cdot x_0, \lambda \cdot y_0, 1 + \lambda \cdot (z_0 - 1))$. Se este ponto estiver no plano $z = 0$ deveremos ter $1 + \lambda \cdot (z_0 - 1) = 0$, ou seja,

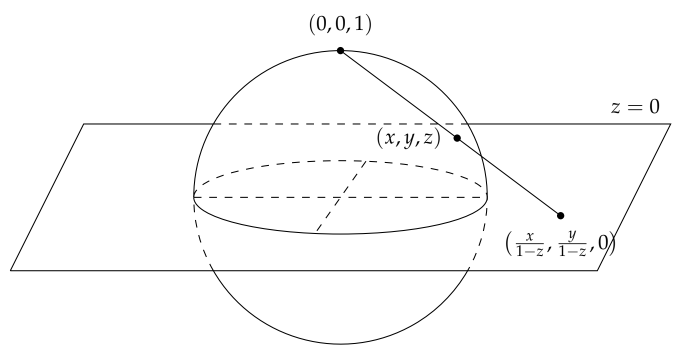
$$\lambda = \frac{1}{1 - z_0}$$

Desta forma, o ponto correspondente no plano será $\left(\frac{x_0}{1 - z_0}, \frac{y_0}{1 - z_0}, 0\right)$

Consideremos, portanto, a função:

$$\begin{array}{rccc} \pi: & \mathbb{S}^2 \setminus \{N\} & \to & \mathbb{R}^2 \times \{0\} \\ & (x, y, z) & \mapsto & \left(\frac{x}{1 - z}, \frac{y}{1 - z}, 0\right) \end{array}$$

Pode-se demonstrar, sem dificuldades, que π é um homeomorfismo. (exercício).



Exemplo 3.225. *Os espaços $X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ (com a métrica euclidiana, induzida pela métrica de $\mathbb{R}^2$), $Y = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$ (com a métrica euclidiana, induzida pela métrica de $\mathbb{R}^3$) e $Z = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ (com a métrica euclidiana, induzida pela métrica de $\mathbb{R}^3$) são homeomorfos entre si.*

A função contínua:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & X & \to & Y \\ & (x, y) & \mapsto & \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{1}{2}\ln(x^2 + y^2)\right) \end{array}$$

cuja inversa é:

$$\begin{array}{rccc} \varphi^{-1} & Y & \to & X \\ & (x, y, z) & \mapsto & (xe^z, ye^z) \end{array}$$

é um homeomorfismo entre X e Y, enquanto que a função contínua:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & Y & \to & Z \\ & (x,y,z) & \mapsto & (x\sqrt{1+z^2}, y\sqrt{1+z^2}, z) \end{array}$$

cuja inversa é:

$$\begin{array}{rccc} \psi^{-1}: & Z & \to & Y \\ & (x,y,z) & \mapsto & \left(\dfrac{x}{\sqrt{1+z^2}}, \dfrac{y}{\sqrt{1+z^2}}, z\right) \end{array}$$

Teorema 3.226. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Se $f : M \to N$ é um homeomorfismo então:*

$$\begin{array}{rccc} f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}: & M\setminus\{x_0\} & \to & N\setminus\{f(x_0)\} \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é um homeomorfismo.

Demonstração. Não é difícil verificar que $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}$ é injetora: dados quaisquer $x, y \in M\setminus\{x_0\}$ tais que $x \neq y$, como f é injetora, vale $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}(x) = f(x) \neq f(y) = f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}(y)$.

Veremos, primeiramente, que $f[M\setminus\{x_0\}] = N\setminus\{f(x_0)\}$.

De fato, dado qualquer $y \in N\setminus\{f(x_0)\}$, tem-se $y \in N$ e $y \neq f(x_0)$. Como $f[M] = N$, existe $x \in M$ tal que $f(x) = y$. Ademais, como f é injetora e $y = f(x) \neq f(x_0)$, segue que $x \neq x_0$. Assim, para todo $y \in N\setminus\{f(x_0)\}$ existe $x \in M\setminus\{x_0\}$ tal que $f(x) = y$, e portanto $N\setminus\{f(x_0)\} \subseteq f[M\setminus\{x_0\}]$.

Também, dado qualquer $x \in M\setminus\{x_0\}$, tem-se $x \neq x_0$ e portanto $f(x) \neq f(x_0)$. Desta forma, $f[M\setminus\{x_0\}] \subseteq N\setminus\{f(x_0)\}$. Segue, portanto, que $f[M\setminus\{x_0\}] = N\setminus\{x_0\}$, de modo que $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}$ é uma função sobrejetora.

Assim, $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}: M\setminus\{x_0\} \to N\setminus\{f(x_0)\}$ é uma bijeção.

Por ser restrição de uma função contínua, $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}$ é contínua.

Observe, finalmente, que a inversa de $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}$ é $f^{-1}\restriction_{N\setminus\{f(x_0)\}}$ – que, por ser restrição da função contínua $f^{-1}: N \to M$, é contínua. Com efeito, dado qualquer $x \in M\setminus\{x_0\}$ tem-se $x \neq x_0$ e, portanto, $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}(x) = f(x) \in N\setminus\{f(x_0)\}$, e portanto $f^{-1}\restriction_{N\setminus\{f(x_0)\}} \circ f\restriction_{M\setminus\{x_0\}}(x) = f^{-1}\restriction_{N\setminus\{f(x_0)\}}(f(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$. Dado $y \in N\setminus\{f(x_0)\}$, tem-se $y \neq f(x_0)$ e, portanto, $f\restriction_{M\setminus\{x_0\}} \circ f^{-1}\restriction_{N\setminus\{f(x_0)\}}(y) = f\restriction_{M\setminus}(f^{-1}(y)) = f(f^{-1}(x)) = x$. $\square$

3.19.1 Homeomorfismos Uniformes

Definição 3.227 (homeomorfismo uniforme). *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos. Uma função $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é um **homeomorfismo uniforme** se:*

(HU1) *f for bijetora;*

(HU2) *f e f^{-1} forem ambas uniformemente contínuas.*

Na definição acima, a exigência explícita da continuidade unforme de f^{-1} não é supérflua. A função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

é bijetora, uniformemente contínua, mas sua inversa:

$$\begin{array}{rccc} f^{-1}: & \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R}_+ \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

não é uniformemente contínua. De fato, dado $\varepsilon = 1$, para todo $\delta > 0$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{1}{n} < \delta$. Tomemos $x = n$ e $y = n + \frac{1}{n}$. Embora tenhamos:

$$|x - y| = \left| n - \left(n + \frac{1}{n} \right) \right| = \frac{1}{n} < \delta$$

vale que:

$$|f(x) - f(y)| = \left| n^2 - \left(n + \frac{1}{n} \right)^2 \right| = 2 + \frac{1}{n^2} > \varepsilon = 1.$$

Exemplo 3.228. *Toda isometria é um homeomorfismo uniforme.*

Definição 3.229 (métricas uniformemente equivalentes). *Sejam $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ métricas. Dizemos que d_1 e d_2 são **uniformemente equivalentes** se, e somente se, a função identidade $\mathrm{id}_M^{1 \to 2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ for um homeomorfismo uniforme.*

Proposição 3.230. *Sejam M um conjunto e $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ métricas. Se existem constantes reais $\alpha, \beta > 0$ tais que:*

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(\alpha \cdot d_1(x, y) \leq d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y))$$

então d_1 e d_2 são uniformemente equivalentes.

Demonstração. [Estratégia da prova: mostraremos que a função identidade entre (M, d_1) e (M, d_2) é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua].

Considere:

$$\mathrm{id}_M^{1\to 2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$$

e

$$\mathrm{id}_M^{2\to 1} : (M, d_2) \to (M, d_1)$$

É (realmente!) imediato que $id_M^{1\to 2-1} = \mathrm{id}_M^{2\to 1}$, de modo que $\mathrm{id}_M^{1\to 2}$ é bijetora. Resta mostrarmos que $\mathrm{id}_M^{2\to 1} : (M, d_2) \to (M, d_1)$ e $\mathrm{id}_M^{1\to 2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ são ambas uniformemente contínuas, pois aí teremos mostrado que $\mathrm{id}_M^{1\to 2}$ é um homeomorfismo uniforme.

De fato, $\mathrm{id}_M^{1\to 2}$ é mesmo lipschitziana cuja constante de Lipschitz é $\beta > 0$: para quaisquer que sejam $x, y \in M$, temos:

$$d_2(\mathrm{id}_M^{1\to 2}(x), \mathrm{id}_M^{1\to 2}(y)) = d_2(x, y) \leq \beta \cdot d_1(x, y)$$

Também, $\mathrm{id}_M^{2\to 1}$ é, também, uma função lipschitziana, pois:

$$d_1(\mathrm{id}_M^{2\to 1}(x), \mathrm{id}_M^{2\to 1}(y)) = d_1(x, y) \leq \frac{1}{\alpha} \cdot d_2(x, y)$$

ou seja, $\frac{1}{\alpha}$ é sua constante de Lipschitz.

Desta forma, como ambas as funções são lipschitzianas, ambas são uniformemente contínuas, de modo que $\mathrm{id}_M^{1\to 2}$ é um homeomorfismo uniforme entre (M, d_1) e (M, d_2). $\square$

Exercícios sobre Homeomorfismos e Espaços Métricos Homeomorfos

6.1 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) dois espaços métricos, $x_0 \in M$ e $y_0 \in N$. Mostrar que $(M \times \{y_0\})$, munido de qualquer métrica no produto, é homeomorfo a M.

6.2 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ um homeomorfismo. Mostrar que, para qualquer $X \subseteq M$, $x_0 \in X' \iff f(x_0) \in f[X]'$.

6.3 Sejam M um conjunto e $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ uma métrica. Mostrar que a métrica:

$$\begin{array}{rccc} d_* : & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x, y) & \mapsto & \min\{1, d(x, y)\} \end{array}$$

é uniformemente equivalente a d.

6.4 Sejam M um conjunto e $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ duas métricas. Mostrar que $d_1 \sim d_2$ se, e somente se, a função identidade $\mathrm{id}_M : M \to M$ for um homeomorfismo.

6.5 Mostrar que $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x-y|$ e $(]-1,1[, d \restriction_{]-1,1[\times]-1,1[})$,em que $d \restriction_{]-1,1[\times]-1,1[}$ é a métrica induzida por d, são homeomorfos. Baseando-se nisto, dizer se "ser limitado" é uma propriedade topológica.

6.6 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos. Mostrar que:

(a) Se d_1 for uma métrica uniformemente equivalente a d_M então o fato de $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ ser uniformemente contínua implica que $f : (M, d_1) \to (N, d_N)$ é uniformemente contínua.

(b) Se d_2 for uma métrica uniformemente equivalente a d_N então o fato de $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ ser uniformemente contínua implica que $f : (M, d_M) \to (N, d_2)$ é uniformemente contínua.

6.7* Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ um homeomorfismo. Mostrar que a função:

$$\begin{array}{rccc} d'_M : & M \times M & \to & \mathbb{R}_+ \\ & (x,y) & \mapsto & d_N(f(x), f(y)) \end{array}$$

(a) constitui uma métrica;

(b) é tal que $d_M \sim d'_M$.

3.20 Propriedades e Invariantes Topológicos

É natural nos perguntamos, a esta altura, quais as propriedades dos espaços que ficam invariantes por homeomorfismos, e esperamos encontrar tais "invariantes" em uma quantidade razoável que nos permita decidir se dois espaços podem ou não ser transformados uns nos outros mediante homeomorfismos.

Este objetivo é análogo ao de qualquer outro ramo da Geometria. Por exemplo, na Geometria Euclidiana Plana, nos restringimos a transformações de figuras que são composições de movimentos rígidos (as transformações de "congruência"). Um segundo exemplo é o da Geometria Projetiva Plana, em que as transformações permitidas são projeções repetidas por centros diferentes. Então, por exemplo, quatro pontos colineares P, Q, R, S podem ser transformados em quatro outros pontos colineares A, B, C, D se, e somente se, as razões duplas[1] $(ABCD)$ e $(PQRS)$ forem iguais – sendo esses números "invariantes projetivos" das quádruplas de pontos.

[1] $(ABCD) = \dfrac{\overline{AC} \cdot \overline{BD}}{\overline{AD} \cdot \overline{BC}}$

Em geral, é muito difícil dizer se dois espaços são homeomorfos. A Topologia Algébrica enfrenta o problema da seguinte forma: associa ao espaço (M,d) um objeto $G(M,d)$ satisfazendo a propriedade "se (M,d_M) é homeomorfo a (N,d_N), então $G(M,d_M) \cong G(N,d_N)$". Neste curso, entretanto, analisaremos (algumas) propriedades que, na eventualidade de dois espaços serem homeomorfos e um deles as satisfizer, o outro obrigatoriamente também as satisfará.

3.21 Compacidade Sequencial

Definição 3.231 (conjunto sequencialmente compacto). *Sejam (M,d) um espaço métrico e $K \subset M$. Dizemos que K é* ***sequencialmente compacto*** *se, e somente se, para toda sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de K existir uma subsequência, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum ponto $\bar{x} \in K$. Um espaço métrico (M,d) é sequencialmente compacto quando o conjunto M for sequencialmente compacto.*

Exemplo 3.232. *Qualquer espaço métrico finito, $(\{x_1,\cdots,x_n\},d)$ é sequencialmente compacto. Com efeito, se*

$$x : \mathbb{N} \to \{x_1,\cdots,x_n\}$$

é uma sequência, haverá pelo menos um $r \in \{1,\cdots,n\}$ tal que $x^{\dashv}[\{x_r\}]$ é um conjunto infinito[2]*. Basta, portanto, tomar a subsequência $(x_r,x_r,x_r,\cdots,x_r,\cdots)$, que naturalmente converge para x_r.*

Exemplo 3.233. *Em $\mathcal{R} = (\mathbb{R},d)$,em que $d(x,y) = |y-x|$ é a métrica usual, todo intervalo fechado e limitado, ou seja, da forma $[a,b]$ para certos $a,b \in \mathbb{R}$ com $a < b$, é sequencialmente compacto. De fato, seja $(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ uma sequência em $[a,b]$. Consideremos a sequência $(s_1,s_2,\cdots,s_n,\cdots)$ dada por, para cada n, o ínfimo da $n-$ésima cauda da sequência:*

$$(\forall n \in \mathbb{N})(s_n = \inf\{x_n,x_{n+1},x_{n+2},\cdots\})$$

Como $\{x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots\} \subset [a,b]$, e como para quaisquer $m,n \in \mathbb{N}$ tais que $n < m$ tem-se $X_m \subset X_n$, vale $s_n = \inf X_n \leq \inf X_m = s_m$ e tem-se:

$$a \leq s_1 \leq s_2 \leq \cdots \leq s_n \leq \cdots \leq b$$

Sendo monótona não-decrescente e limitada superiormente, s_n converge para $s = \sup\{s_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. ***Note bem*** *que $s \in [a,b]$, uma vez que s é limite de uma sequência de elementos de $[a,b]$ (da sequência $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$) e $[a,b]$ é fechado.*

[2] Se não fosse este o caso, poderíamos decompor $\mathbb{N}$ como uma reunião finita de subconjuntos finitos de $\mathbb{N}$, o que é absurdo.

Vamos, agora, construir uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *que converge para* s.

Para tal, provaremos a seguinte:

Afirmação: $(\forall k \in \mathbb{N})(\exists i_k \in \mathbb{N})(x_{i_k} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \cap B\left(s, \frac{1}{2^k}\right))$

Caso $k = 1$***:*** *tomando* $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, *existe um índice* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_1 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{1}{2}$. *Considerando algum índice* $m > n_1$, *como* $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \cdots\}$, *existe um índice* $i_1 \geq m$ *tal que* $s_m \leq x_{i_1} < s_m + \frac{1}{2}$, *de modo que* $|x_{i_1} - s_m| < \frac{1}{2}$. *Daí, então:*

$$|x_{i_1} - s| \leq |x_{i_1} - s_m| + |s_m - s| < 1$$

de modo que $x_{i_1} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \cap B\,(s, 1)$.

Caso $k = 2$***:*** *para* $\varepsilon = \frac{1}{4}$, *existe* $n_2 \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_2 \Rightarrow |s_n - s| < \frac{1}{4}$. *Tomando um índice* m *tal que* $m > n_2$ *e* $m > i_1$, *sendo* $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \cdots\}$, *existe um índice* $i_2 \geq m$ *(logo* $i_2 > n_2$ *e* $i_2 > i_1$*) de maneira que* $s_m \leq x_{i_2} < s_m + \frac{1}{4}$, *e portanto:*

$$|x_{i_2} - s| \leq |x_{i_2} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

de modo que $x_{i_2} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \cap B\left(s, \frac{1}{2}\right)$.

Hipótese Indutiva: *Suponhamos que exista* $i_{k-1} \in \mathbb{N}$ *tal que* $x_{i_{k-1}} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \cap B\left(s, \frac{1}{2^{k-1}}\right)$;

Para $k \in \mathbb{N}$ *qualquer, consideramos* $\varepsilon = \frac{1}{2^{k-1}}$. *Para este* $\varepsilon > 0$ *existirá* $n_k \in \mathbb{N}$ *tal que* $n \geq n_k \Rightarrow |s_n - s| < \frac{1}{2^{k-1}}$. *Tomando um índice* m *tal que* $m > n_k$ *e* $m > i_{k-1}$, *sendo* $s_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, \cdots\}$, *existe um índice* $i_k \geq m$ *(logo* $i_k > n_k$ *e* $i_k > i_{k-1}$*) de maneira que* $s_m \leq x_{i_k} < s_m + \frac{1}{2^{k-1}}$, *e portanto:*

$$|x_{i_k} - s| \leq |x_{i_k} - s_m| + |s_m - s| < \frac{1}{2^{k-1}} + \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}$$

ou seja, $x_{i_k} \in \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \cap B\left(s, \dfrac{1}{2^k}\right)$.

Para cada $k \in \mathbb{N}$, *portanto, podemos escolher um (único) índice* $i_k \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_{i_k} - s| < \dfrac{1}{2^k}$. *Obtemos, deste modo, uma subsequência* $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_k}, \cdots)$.

Como $\lim_{k\to\infty} \dfrac{1}{2^k} = 0$, *então* $\lim_{k\to\infty}(x_{i_k} - s) = 0$, *e portanto:*

$$\lim_{k\to\infty} x_{i_k} = s.$$

Logo a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *admite* $(x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n}, \cdots)$ *como subsequência que converge para* s.

Teorema 3.234. *Sejam* (M, d) *um espaço métrico,* $K \subset M$ *um subconjunto sequencialmente compacto e* $F \subseteq K$ *fechado. Então* F *é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja $(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$ uma sequência de elementos de F. Como $F \subset K$, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de K, e como K é sequencialmente compacto, existem uma subsequência $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ e um elemento $\bar{x} \in K$ (que, *a priori*, não sabemos se pertence a F) tais que $x_{i_k} \to \bar{x}$. Deste modo, tem-se que, para todo $\delta > 0$ podemos encontrar um $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $k \geq k_0$, $x_{i_k} \in F \cap B(\bar{x}, \delta)$ – isto significa que ou bem $\bar{x} \in F$ $\bar{x} \in F'$, e como F é fechado, segue que $F' \subset F$ e, portanto, $\bar{x} \in F$, ou bem para todo $k \geq k_0(\delta)$ tem-se $x_{i_k} = \bar{x}$. Logo, em qualquer dos casos, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto de F, a saber $\bar{x}$. Como o argumento pode ser repetido para *qualquer* sequência de elementos de F, segue que F é sequencialmente compacto. $\square$

Teorema 3.235. *Seja* (M, d) *um espaço métrico. Se* $K \subset M$ *é sequencialmente compacto então* K *é fechado.*

Demonstração. Basta demonstrarmos que $\mathrm{Cl.}\,(K) \subset K$.

Dado $x \in \mathrm{Cl.}\,(K)$, por definição de fecho, para todo $n \in \mathbb{N}$ vale:

$$B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap K \neq \varnothing$$

Escolhemos um elemento $x_1 \in B(x, 1) \cap K$, um elemento $x_2 \in B\left(x, \frac{1}{2}\right) \cap K$ e, sucessivamente, para um $n \in \mathbb{N}$ qualquer, escolhemos um elemento $x_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right)$.

Obtemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de K que converge para x.

Sendo K sequencialmente compacto, todas as suas sequências admitem subsequência convergente. Em particular, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ construída acima admite uma subsequência, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, convergente para um ponto de K. Como $x_n \to x$, todas as suas subsequências também convergem para x – e, em particular, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para x. Disto decorre que $x \in K$.

Como este argumento pode ser repetido para qualquer $x \in \mathrm{Cl.}\,(K)$, segue que $\mathrm{Cl.}\,(K) \subseteq K$, e portanto $K \subset M$ é fechado. $\square$

A seguir veremos que a compacidade sequencial é uma propriedade preservada por funções contínuas.

Teorema 3.236. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e seja $f : M \to N$ uma função contínua. Se $K \subset M$ é sequencialmente compacto, então $f[K] \subset N$ é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de pontos de $f[K]$. Como para cada $n \in \mathbb{N}$ tem-se $y_n \in f[K]$, segue que existe, para todo n, pelo menos um $x_n \in K$ tal que $f(x_n) = y_n$. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de elementos de K, como K é sequencialmente compacto, existe uma subsequência, $(x_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\lim_{k\to\infty} x_{i_k} = x \in K$. Uma vez que f é contínua, $f(x_{i_k}) = y_{i_k} \to f(x) \in f[K]$. Logo, $(y_{i_k})_{k\in\mathbb{N}}$ é uma subsequência de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um ponto de $f[K]$. $\square$

Note, assim, que "ser sequencialmente compacto" é uma propriedade topológica: se (M, d_M) e (N, d_N) forem homeomorfos e M for compacto, denotando por $f : M \to N$ o homeomorfismo, seguirá que $f[M] = N$ também é sequencialmente compacto.

Desta forma, dados dois espaços topológicos (M, d_M) e (N, d_N), caso um deles seja sequencialmente compacto e o outro não seja, segue que (M, d_M) não é homeomorfo a (N, d_N).

Proposição 3.237. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos sequencialmente compactos, $K \subset M$, $L \subset N$, e considere em $M \times N$ qualquer uma das métricas canônicas das quais podemos dotar o produto. Tem-se:*

$$K \times L \text{ é seq. compacto} \iff (K \text{ é seq. compacto})\&(L \text{ é seq. compacto})$$

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Suponha $K \times L$ sequencialmente compacto. Como as projeções $\pi_M : M \times N \to M$ e $\pi_N : M \times N \to N$ são contínuas, segue que $\pi_1[K \times L] = K$ é sequencialmente compacto em Me $\pi_2[K \times L] = L$ é sequencialmente compacto em N.

$(\Leftarrow)$ Seja

$$\begin{array}{rccc} (x,y): & \mathbb{N} & \to & K \times L \\ & n & \mapsto & (x(n), y(n)) \doteq (x_n, y_n) \end{array}$$

uma sequência de pontos em $K \times L$, que denotaremos por $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Considere, em K, a sequência $x : \mathbb{N} \to K$ tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "{(x,y)}"] \arrow[dr, "x"'] & K \times L \arrow[d, "\pi_M"] \\ & K \end{tikzcd}$$

que denotaremos por

$$\begin{array}{cccc} x: & \mathbb{N} & \to & K \\ & n & \mapsto & x_n \end{array}$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de pontos em K, e como K é sequencialmente compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, ou seja, existe uma função $j:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ estritamente crescente tal que:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "x\circ j"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "x"] \\ & K \end{tikzcd}$$

(que denotamos por $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$) converge para algum ponto $\bar{x}\in K$.

Considere, agora, a <u>sequência</u> $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ dada por:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "j"] \arrow[dr, "y\circ j"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "y"] \\ & L \end{tikzcd}$$

Como $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}\in L^{\mathbb{N}}$ e L é sequencialmente compacto, $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência $(y\circ j)\circ\ell:\mathbb{N}\to L$:

$$\begin{tikzcd} \mathbb{N} \arrow[r, "\ell"] \arrow[dr, "(y\circ j)\circ\ell"'] & \mathbb{N} \arrow[d, "y\circ j"] \\ & L \end{tikzcd}$$

convergente para algum ponto $\bar{y}\in L$.

Considere a sequência:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{N} & \xrightarrow{\ell} & \mathbb{N} & \xrightarrow{j} & \mathbb{N} & \xrightarrow{(x,y)} & K\times L \\ r & \mapsto & \ell(r) & \mapsto & j(\ell(r)) & \mapsto & (x(j(\ell(r))),y(j(\ell(r)))) \doteq (x_{n_{k_r}},y_{n_{k_r}})_{r\in\mathbb{N}} \end{array}$$

que é subsequência de $((x_n,y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ uma vez que $j\circ\ell:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ é estritamente crescente.

Afirmamos que $(x_{n_{k_r}},y_{n_{k_r}})\to(\bar{x},\bar{y})$.

De fato, dado $\varepsilon>0$, considerando $\frac{\varepsilon}{2}>0$ como $x_{n_r}\to\bar{x}$ existe $r_1\in\mathbb{N}$ tal que $r\geq r_1\Rightarrow d_M(x_{n_r},\bar{x})<\frac{\varepsilon}{2}$, Também, como $y_{n_r}\to\bar{y}$, considerando $\frac{\varepsilon}{2}>0$ existe $r_2\in\mathbb{N}$ tal que

$r \geq r_2 \Rightarrow d_N(y_{n_r}, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considerando em $M \times N$ a métrica da soma, segue que para $r \geq r_0 = \max\{r_1, r_2\}$ vale:

$$d_S((x_{n_r}, y_{n_r}), (\bar{x}, \bar{y})) = d_M(x_{n_r}, \bar{x}) + d_N(y_{n_r}, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de modo que $(x_{n_r}, y_{n_r})_{r \in \mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, \bar{y})$. □

Observe que a proposição acima se estende para qualquer quantidade finita de fatores do produto cartesiano.

Definição 3.238 (conjunto totalmente limitado). *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que X é **totalmente limitado** se para qualquer $\varepsilon > 0$ existirem $x_1, \cdots, x_n \in X$ tais que:*

$$X \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

Naturalmente, todo conjunto totalmente limitado é limitado (verifique).

Observe que afirmar que um conjunto X *não* é totalmente limitado significa dizer que existe algum $\varepsilon_0 > 0$ tal que para qualquer coleção finita de pontos, $\{x_1, \cdots, x_n\} \subset X$ tem-se:

$$X \not\subset B(x_1, \varepsilon_0) \cup \cdots, \cup B(x_n, \varepsilon_0)$$

Teorema 3.239. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$ sequencialmente compacto. Então K é totalmente limitado.*

Demonstração. [Demonstração por redução ao absurdo] Suponhamos que K seja sequencialmente compacto porém não seja totalmente limitado. Então existe certo $\varepsilon_0 > 0$ tal que nenhuma coleção finita de bolas abertas centradas em pontos de X e de raio ε_0 contém K.

Escolhemos $x_1 \in K$ qualquer, e em seguida escolhemos um único $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$, um único $x_3 \in K \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$, e assim sucessivamente escolhemos um único $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_0)$. Destarte obtemos uma sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ de termos todos distintos entre si.

Construímos, assim, a sequência $(x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots)$ que é tal que $x_1 \in K$, $x_2 \in K \setminus B(x_1, \varepsilon_0)$, $x_3 \in K \setminus (B(x_1, \varepsilon_0) \cup B(x_2, \varepsilon_0))$, $\cdots$, $x_n \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \varepsilon_0)$. Como K é, por hipótese, sequencialmente compacto, esta sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ admite uma subsequência, $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente para algum ponto $\bar{x} \in K$. Como os termos de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ são, por construção, distintos entre si e $x_{n_k} \to \bar{x}$, dado $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ existe algum $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k \geq k_0(\varepsilon)$ implica $x_{n_k} \in B\left(\bar{x}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$. Como os termos da sequência (e, em particular, da subsequência) são todos distintos, segue que $B(\bar{x}, \varepsilon_0/2)$ contém infinitos desses termos.

Assim, tomando $r, s \geq k_0\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ tais que $r < s$, teremos $x_r, x_s \in B\left(\bar{x}, \frac{\varepsilon_0}{2}\right)$ tais que $x_r \neq x_s$ (pois $x_s \in K \setminus \bigcup_{i=1}^{s-1} B(x_i, \varepsilon_0) \subset K \setminus B(x_r, \varepsilon_0)$). Logo,

$$d(x_r, x_s) \leq d(x_r, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_s) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

donde segue que $x_s \in B(x_r, \varepsilon_0)$ – o que é um absurdo, devido à própria construção da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pois $x_s \notin B(x_r, \varepsilon_0)$). O absurdo veio de supor que K fosse simultaneamente sequencialmente compacto e não totalmente limitado. Assim, segue que sempre que K for sequencialmente compacto, K será totalmente limitado, como queríamos demonstrar. $\square$

Corolário 3.240. *Todo subconjunto sequencialmente compacto de um espaço métrico qualquer é (em particular) limitado.*

M limitado $\not\Rightarrow$ M sequencialmente compacto

A recíproca do corolário acima é **falsa**: sejam M um conjunto infinito e $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ a métrica zero-um. Naturalmente, (M, d) é limitado e diam. $(M) = 1$:

$$\text{diam.}\,(M) = \sup\{d(x,y) \mid (x \in M)\&(y \in M)\} = \sup\{0,1\} = 1.$$

No entanto, existe uma sequência de pontos de M que não tem qualquer subsequência convergente.

Sendo M infinito, podemos construir uma sequência de pontos distintos de M, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afirmamos que nenhuma de suas subsequências converge.

Com efeito, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de elementos de M tais que $m \neq n \Rightarrow x_m \neq x_n$. Suponhamos, por absurdo, que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admita uma subsequência, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que convirja para algum ponto $\bar{x} \in M$. Então, para todo $\varepsilon > 0$ existirá $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n_k}, \bar{x}) < \varepsilon.$$

Em particular, para $\varepsilon = \frac{1}{2}$ deverá existir $k_0\left(\frac{1}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{1}{2}$$

Logo, teríamos para $k \geq k_0\left(\frac{1}{2}\right)$, $x_{n_k} \neq x_{n_{k+1}}$ mas:

$$d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) \leq d(x_{n_k}, \bar{x}) + d(x_{n_{k+1}}, \bar{x}) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

Como d é a métrica zero-um, $d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) < 1 \Rightarrow d(x_{n_k}, x_{n_{k+1}}) = 0$, e portanto $x_{n_k} = x_{n_{k+1}}$, o que é um absurdo (uma vez que termos de índices distintos devem ser distintos, por construção).

O absurdo veio de supor que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admitisse subsequência convergente.

Desta forma, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ não admite nenhuma subsequência convergente – o que mostra que (M, d) não é sequencialmente compacto.

3.22 Subconjuntos Sequencialmente Compactos em $\mathbb{R}^n$

Vimos, na seção precedente, que todo subconjunto sequencialmente compacto de um espaço métrico é fechado (**Teorema 3.235**) e limitado (**Corolário 3.240**). Contudo, devido à nota acima, num espaço métrico um conjunto pode ser fechado e limitado sem ser sequencialmente compacto. No caso de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ veremos que “ser sequencialmente compacto” e “ser fechado e limitado" são coisas equivalentes.

Teorema 3.241. *Um subconjunto $X \subseteq \mathbb{R}^n$ é sequencialmente compacto se, e somente se, for fechado e limitado.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Vale para qualquer espaço métrico, e em particular para $(\mathbb{R}^n, d)$,em que d é a métrica usual.

($\Leftarrow$) Se X é limitado, existe $a > 0$ tal que:

$$X \subset \overbrace{[-a, a] \times \cdots \times [-a, a]}^{n}$$

Uma vez que cada intervalo $[-a, a]$ é sequencialmente compacto em $\mathbb{R}$ (cf. **Exemplo 3.233**), então o produto:

$$[-a, a] \times \cdots \times [-a, a]$$

é compacto em $\mathbb{R}^n$. Assim, X é um subconjunto fechado do $\mathbb{R}^n$ que está contido num sequencialmente compacto desse espaço. Pelo **Teorema 3.234**, segue que X também é sequencialmente compacto. $\square$

3.22.1 Continuidade e Compacidade Sequencial

A compacidade sequencial é uma das mais importantes propriedades topológicas em diversos ramos da Matemática.

Teorema 3.242 (Teorema do Valor Extremo). *Seja K um subconjunto sequencialmente compacto de um espaço métrico (M, d). Se $f : M \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existem $a, b \in K$ tais que:*

$$f(a) = \inf f[K] \quad e \quad f(b) = \sup f[K].$$

Demonstração. Uma vez que K é sequencialmente compacto, então pelo **Teorema 3.236**, $f[K] \subset \mathbb{R}$ é sequencialmente compacto – e portanto fechado e limitado. Segue da limitação que existem:

$$u = \inf f[K] \text{ e } v = \sup f[K].$$

Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, como $u = \inf f[K]$, existe $y_1 \in f[K]$ tal que:

$$u \leq y_1 < u + \varepsilon$$

e como $v = \sup f[X]$, existe $y_2 \in f[K]$ tal que:

$$v - \varepsilon < y_2 \leq v.$$

Segue, portanto, que

$$y_2 \in]u - \varepsilon, u + \varepsilon[\cap f[K] \neq \varnothing$$

e

$$y_2 \in]v - \varepsilon, v + \varepsilon[\cap f[K] \neq \varnothing$$

Assim, como $f[K] \subset \mathbb{R}$ é, por hipótese, fechado, segue que $u, v \in \mathrm{Cl.}\,(f[K]) \Rightarrow u, v \in f[K]$. Mas, por definição de pertencer ao conjunto imagem, segue que existem $a, b \in K$ tais que:

$$f(a) = u = \inf f[K] \ \text{ e } \ f(b) = v = \sup f[K]$$

$\square$

O teorema acima nos garante que uma função contínua real, definida num conjunto sequencialmente compacto, assume seus valores máximo e mínimo.

Não obstante, observe que o resultado não nos garante que devamos ter $f[K] = [u, v]$. De fato, o conjunto $K = \left\{2, 1, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{7}{4}, \cdots\right\}$ é compacto porque é limitado (contido em $[-2, 2]$) e fechado (uma vez que contém seu único ponto de acumulação – a saber, o número 2).

Considerando a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 2x \end{array}$$

então $u = f(1) = 2$ e $v = f(2) = 4$, mas evidentemente $f[K] \neq [2, 4]$ (a propósito, $f[K]$ sequer é um intervalo).

3.22.2 Compacidade Sequencial e Continuidade Uniforme

Antes de enunciar o próximo teorema, vamos recordar o que significa uma função entre espaços métricos, $f : (M, d_M) \rightarrow (N, d_N)$ *não* ser uniformemente contínua.

Se f *não* é uniformemente contínua, então a afirmação:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

é falsa. Isto significa que existe uma testemunha, $\varepsilon_0 > 0$ que nos diz que:

$$(\exists \delta > 0)(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon_0)$$

é falso. Mas isto significa que para todo δ,

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x,y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon_0)$$

é falso. Isto significa que, para todo $\delta > 0$ devem existir $x_0(\delta), y_0(\delta) \in M$ tal que:

$$d_M(x_0(\delta), y_0(\delta)) < \delta \not\Rightarrow d_N(f(x_0(\delta)), f(y_0(\delta))) < \varepsilon_0,$$

ou seja, tais que:

$$(d_M(x_0(\delta), y_0(\delta)) < \delta) \& (d_N(f(x_0(\delta)), f(y_0(\delta))) \geq \varepsilon_0)$$

Assim, f *não* é uniformemente contínua se, e somente se:

$$(\exists \varepsilon_0 > 0)(\forall \delta > 0)(\exists x_0(\delta) \in M)(\exists y_0(\delta) \in M)$$
$$(d_M(x_0(\delta), y_0(\delta)) < \delta) \& (d_N(f(x_0(\delta)), f(y_0(\delta))) \geq \varepsilon_0)$$

Teorema 3.243. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos, (M, d_M) sequencialmente compacto. Toda função contínua $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ é uniformemente contínua.*

Demonstração. [Estratégia da prova: assumir, por absurdo, que K seja sequencialmente compacto mas que f não é uniformemente contínua]

Suponhamos, por absurdo, que f não seja uniformemente contímnua. Desta forma, existiria $\varepsilon_0 > 0$ tal que, para qualquer que seja $\delta = \frac{1}{k} > 0$, $k \in \mathbb{N}$, existem $x_k, y_k \in M$ tais que:

$$d_M(x_k, y_k) < \frac{1}{k} \text{ e } d_N(f(x_k), f(y_k)) \geq \varepsilon_0 \tag{3.10}$$

de modo que podemos construir sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tais que cada um de seus termos satisfaça as desigualdades acima.

Uma vez que (M, d_M) é sequencialmente compacto, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admite uma subsequência convergente, digamos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, para algum ponto $\bar{x} \in M$. Mostraremos que, nestas condições, a subsequência $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (note que estamos tomando a mesma indexação de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$) tal que $y_{n_k} \to \bar{x}$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, existem $k_1 \in \mathbb{N}$ (pois $x_{n_k} \to \bar{x}$) e $k_2 \in \mathbb{N}$ (pois $\mathbb{R}$ é arquimediano) tais que:

$$k \geq k_1 \Rightarrow d_M(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e

$$k \geq k_2 \Rightarrow \frac{1}{k} < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tome $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$, e teremos:

$$k \geq k_0 \Rightarrow d_M(y_{n_k}, \bar{x}) \overset{\text{D.T.}}{\leq} d_M(y_{n_k}, x_{n_k}) + d_M(x_{n_k}, \bar{x}) \overset{(3.10)}{<} \frac{1}{k} + d(x_{n_k}, \bar{x}) \overset{k \geq k_1}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim, segue que $y_{n_k} \to \bar{x}$.

Como f é contínua e $x_{n_k} \to \bar{x}$ e $y_{n_k} \to \bar{x}$, segue que:

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\bar{x}) = \lim_{k\to\infty} f(y_{n_k})$$

Desta forma, dado $\frac{\varepsilon_0}{2} > 0$ existirá um índice $k(\varepsilon_0/2) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k(\varepsilon_0) \Rightarrow d_N(f(x_{n_k}), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

e

$$k \geq k(\varepsilon_0) \Rightarrow d_N(f(y_{n_k}), f(\bar{x})) < \frac{\varepsilon_0}{2}$$

Assim,

$$k \geq k(\varepsilon_0) \Rightarrow d_N(f(x_{n_k}), f(y_{n_k})) \overset{\text{D.T.}}{\leq} d_N(f(x_{n_k}), f(\bar{x})) + d_N(f(\bar{x}), f(y_{n_k})) < \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0$$

o que contradiz a nossa construção das sequências $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Logo, sempre que M for sequencialmente compacto, $f : M \to N$ será uniformemente contínua. $\square$

3.22.3 Distância entre conjuntos sequencialmente compactos

Nesta seção, veremos que a distância entre dois subconjuntos sequencialmente compactos de um espaço métrico é realizada pela distância entre dois pontos, um de cada subconjunto.

Proposição 3.244. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $K \subset M$ sequencialmente compacto. Dado $X \subset M$, existe $x_0 \in K$ tal que:*

$$d(x_0, X) = d(K, X)$$

Demonstração. Seja $\varepsilon = d(K, X)$. Como, por definição:

$$d(K, X) = \inf\{d(x, y) \mid (x \in K)\&(y \in X)\} = \inf\{d(x, y) \mid (x, y) \in K \times X\}$$

então existe (pelo fato de ε ser ínfimo de um conjunto), para cada $n \in \mathbb{N}$, um par $(x_n, y_n) \in K \times X$ tal que:

$$\varepsilon \leq d(x_n, y_n) < \varepsilon + \frac{1}{n}$$

Escolhendo, para cada $n \in \mathbb{N}$ um único x_n, obtemos uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Seja $B = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ o conjunto de todos os termos da sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Como K é sequencialmente compacto, existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para um certo $\bar{x} \in K$. Afirmamos que:

$$d(K, X) = d(\bar{x}, X)$$

Suponha, por absurdo, que não seja este o caso, de modo que existe um $\delta > 0$ tal que $d(\bar{x}, X) = \varepsilon + \delta$. Como $x_{n_k} \to \bar{x}$, a bola aberta $B\left(\bar{x}, \frac{\delta}{2}\right)$ contém uma infinidade de pontos de $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ (todos os termos a partir de um índice suficientemente grande) e, em particular, de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da propriedade arquimediana de $\mathbb{R}$ podemos assegurar a existência de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_0} \in B\left(\bar{x}, \frac{\delta}{2}\right)$ e $\dfrac{1}{n_0} < \dfrac{\delta}{2}$. Daí segue que:

$$d(\bar{x}, y_{n_0}) \leq d(\bar{x}, x_{n_0}) + d(x_{n_0}, y_{n_0}) < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2} + \varepsilon + \frac{\delta}{2} = \varepsilon + \delta = d(\bar{x}, X) \overset{y_{n_0} \in X}{\leq} d(\bar{x}, y_{n_0})$$

$$d(\bar{x}, y_{n_0}) < d(\bar{x}, y_{n_0})$$

o que é absurdo. Logo, $d(K, X) = d(\bar{x}, X)$, como queríamos. □

Corolário 3.245. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $K \subset M$ sequencialmente compacto e $F \subset M$ fechado. Se $K \cap F = \varnothing$ então $d(K, F) > 0$.*

Demonstração. [Prova por contraposição] Suponhamos que $d(K, F) = 0$. Como K é sequencialmente compacto, existe $\bar{x} \in K$ tal que:

$$d(K, F) = d(\bar{x}, F) = 0$$

Mas $d(\bar{x}, F) = 0 \Rightarrow \bar{x} \in \mathrm{Cl.}\,(F) \subset F$, ou seja, $\bar{x} \in F$. Logo, $\bar{x} \in K \cap F$. □

Corolário 3.246. *Sejam (M, d) um espaço métrico, $K, L \subset M$ subconjuntos sequencialmente compactos. Então existe $x_K \in K$ e $x_L \in L$ tais que:*

$$d(K, L) = d(x_K, x_L).$$

Demonstração. Como K é sequencialmente compacto, existe $x_K \in K$ tal que:

$$d(K, L) = d(x_K, L).$$

Como L é compacto, existe $x_L \in L$ tal que:

$$d(\{x_K\}, L) = d(\{x_K\}, x_L) = d(x_K, x_L)$$

Portanto, existem $x_K \in K$ e $x_L \in L$ tais que:

$$d(K, L) = d(x_K, x_L).$$

□

3.22.4 Abertos e Compacidade Sequencial: a Propriedade de Heine-Borel

Definição 3.247 (cobertura aberta). *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Uma **cobertura aberta de** X é uma coleção de subconjuntos abertos de M, $\mathcal{U} = \{U_i \mid (U_i \subset M \text{ aberto})\&(i \in I)\}$, tal que:*

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i$$

Exemplo 3.248. *Considere $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$. A coleção:*

$$\{]-n, n[\subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

é uma cobertura aberta de $\mathbb{R}$, uma vez que cada intervalo $]-n, n[$ é aberto em $\mathbb{R}$ e vale:

$$\mathbb{R} \subset \bigcup \{]-n, n[\subset \mathbb{R} \mid n \in \mathbb{N}\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}}]-n, n[$$

Dado um espaço métrico (M, d) e $X \subset M$, denotaremos por $\text{Cov.}(X)$ o conjunto de todas as coberturas abertas de X, ou seja:

$$\text{Cov.}(X) = \left\{ \{U_i \mid i \in I\} \in \wp(M) \mid (\forall i \in I)(U_i \in \text{Open}(M, d))\&(X \subset \bigcup_{i \in I} U_i) \right\}$$

Definição 3.249 (subcobertura finita). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $X \subset M$ e $\mathcal{U} = \{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta de X. Uma **subcobertura finita de** $\mathcal{U}$ é um subconjunto finito de $\mathcal{U}$, $\{U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots, U_{i_n}\} \subset \mathcal{U}$ que ainda é uma cobertura aberta para X, ou seja, tal que:*

$$X \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n} = \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

Definição 3.250 (propriedade de Heine-Borel). *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Dizemos que X **satisfaz a propriedade de Heine-Borel** se, e somente se, toda cobertura aberta de X admitir uma subcobertura finita. Usando a notação introduzida acima, X tem a propriedade de Heine-Borel se, e somente se:*

$$(\forall \mathcal{U} \in \mathrm{Cov.}\,(X))(\exists \mathcal{U}' \in \mathrm{Cov.}\,(X))(\mathcal{U}' \subset_{\mathrm{fin.}} \mathcal{U})$$

A proposição abaixo nos permitirá provar que conjuntos têm a propriedade de Heine-Borel analisando apenas coberturas bem específicas: aquelas constituídas por bolas abertas.

Proposição 3.251. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Então X satisfaz a propriedade de Heine-Borel se, e somente se, toda cobertura de X por bolas abertas, $\mathcal{B} = \{B(x_i, \delta_i) \mid (x_i \in M)\&(\delta_i > 0)\&(i \in I)\}$ admitir subcobertura finita.*

Demonstração. De fato, se X satisfaz a propriedade de Heine-Borel, como $\mathcal{B}$ é cobertura aberta, segue que $\mathcal{B}$ admite subcobertura finita.

Reciprocamente, suponhamos que apenas coberturas por bolas abertas admitam subcoberturas finitas. Seja $\mathcal{A} = \{U_i \subset M \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta para X. Como, para cada $i \in I$, U_i é aberto, pela **Proposição 3.87** existem bolas abertas $B(x^{(i)}, \delta_{x^{(i)}})$, com $x^{(i)} \in U_i$, tais que:

$$U_i = \bigcup_{x^{(i)} \in U_i} B(x^{(i)}, \delta_{x^{(i)}})$$

Assim, afirmar que $\{U_i \subset M \mid i \in I\}$ é cobertura aberta de X equivale a afirmar que:

$$X \subset \bigcup_{i \in I} U_i = \bigcup_{i \in I} \left(\bigcup_{x^{(i)} \in U_i} B(x^{(i)}, \delta_{x^{(i)}}) \right)$$

Seja $J = \bigcup_{i \in I} \{i\} \times U_i = \{(i, x^{(i)}) \mid (i \in I)\&(x^{(i)} \in U_i)\}$. Tem-se, portanto,

$$X \subset \bigcup_{(i, x^{(i)}) \in J} B(x^{(i)}, \delta_{x^{(i)}})$$

Note, agora, que $\mathcal{B} = \{B(x^{(i)}, \delta_{x^{(i)}}) \mid (i, x^{(i)}) \in J\}$ é uma cobertura de bolas abertas para X. Por hipótese, esta cobertura admite uma subcobertura finita, ou seja, existe $J_f = \{(i_1, x^{(i_1)}), \cdots, (i_k, x^{(i_k)})\} \subset J$ tal que:

$$X \subset B(x^{(i_1)}, \delta_{x^{(i_1)}}) \cup \cdots \cup B(x^{(i_k)}, \delta_{x^{(i_k)}})$$

Mas, para $j \in \{1, 2, \cdots, k\}$, tem-se:

$$B(x^{(i_j)}, \delta_{x^{(i_j)}}) \subseteq \bigcup_{x^{(i_j)} \in U_{i_j}} B(x^{(i_j)}, \delta_{x^{(i_j)}}) = U_{i_j}$$

e portanto:

$$X \subset U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$$

sendo $\{U_{i_j} \mid j \in \{1, 2, \cdots, k\}\}$ a subcobertura aberta finita que desejávamos exibir. $\square$

Exemplo 3.252. *No espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, o intervalo fechado e limitado $[0, 1]$ satisfaz a propriedade de Heine-Borel. Pela **Proposição 3.251**, basta mostrarmos que toda cobertura de $[0, 1]$ por bolas abertas admite subcobertura finita.*

Seja $\mathcal{A} = \{]a_i, b_i[\subset \mathbb{R} \mid i \in I\}$ uma cobertura (por bolas abertas) aberta de $[0, 1]$. Denotemos $[0, 1]$ por J.

Suponhamos, por absurdo, que $[0, 1]$ não satisfaça a propriedade de Heine-Borel.

De fato, se $[0, 1]$ não satisfizesse a propriedade de Heine-Borel, então pelo menos um dos intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ ou $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ não satisfaria a propriedade de Heine Borel.

Seja $J_1 = [c_1, d_1]$ um dos intervalos acima tal que nenhuma reunião finita de elementos de $\mathcal{A}$ contém J_1.

Considerando agora os subintervalos $\left[c_1, \frac{c_1+d_1}{2}\right]$ e $\left[\frac{c_1+d_1}{2}, d_1\right]$, chamemos de J_2 o subintervalo que não está contido em nenhuma reunião finita de elementos de $\mathcal{A}$.

Procedendo recursivamente, construímos uma sequência de intervalos fechados encaixados, $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \cdots \supset J_n \supset \cdots$, cada um dos quais não está contido em nenhuma reunião finita de elementos de $\mathcal{A}$.

*Pela **Propriedade dos Intervalos Encaixados**, existe um único $\bar{x} \in \bigcap_{n \in \mathbb{N}} J_n$. Como $\bar{x} \in J$ e $\mathcal{A}$ é cobertura de J, existe pelo menos um $i_0 \in I$ tal que $\bar{x} \in]a_{i_0}, b_{i_0}[$.*

Observe que cada intervalo J_i tem diâmetro $\frac{1}{2^i}$. Dado $\min\{\bar{x} - a_{i_0}, b_{i_0} - \bar{x}\} > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\frac{1}{2^{n_0}} < \bar{x} - a_{i_0} \ \ e \ \ \frac{1}{2^{n_0}} < b_{i_0} - \bar{x}$$

Basta tomar, por exemplo, $n_0 = \left\lceil \log_2 \left(\frac{1}{\min\{\bar{x} - a_{i_0}, b_{i_0} - \bar{x}\}} \right) \right\rceil$.

Assim, tem-se:

$$a_{i_0} < \bar{x} - \frac{1}{2^{n_0}} < \bar{x} < \bar{x} + \frac{1}{2^{n_0}} < b_{i_0}$$

Como $d_{n_0} - c_{n_0} = \dfrac{1}{2^{n_0}} < \bar{x} - a_{i_0} \overset{\bar{x} \leq d_{n_0}}{\leq} d_{n_0} - a_{i_0}$, *segue que* $-c_{n_0} < a_{i_0}$, *ou seja,* $a_{i_0} \leq c_{n_0}$.

Também, como o diâmetro do intervalo $[c_{n_0}, d_{n_0}]$ *é* $\frac{1}{2^{n_0}}$, *tem-se* $d_{n_0} - c_{n_0} = \dfrac{1}{2^{n_0}} < b_{i_0} - \bar{x} \overset{\bar{x} \geq c_{n_0}}{\leq} b_{i_0} - c_{n_0}$, *segue que* $-c_{n_0} < a_{i_0}$, *ou seja,* $d_{n_0} \leq b_{i_0}$.

Como $a_{i_0} \leq c_{n_0} < d_{n_0} \leq b_{i_0}$, *segue que* $J_{n_0} = [c_{n_0}, d_{n_0}]$ *está contido em* $]a_{i_0}, b_{i_0}[$ *– ou seja, está contido em* um *elemento de* $\mathcal{A}$, $J_{n_0} \subset]a_{i_0}, b_{i_0}[= \bigcup\{[a_{i_0}, b_{i_0}]\}$ *– o que é um absurdo, uma vez que, por construção,* J_{n_0} *não está contido em nenhuma reunião finita de elementos de* $\mathcal{A}$.

O absurdo vem de supor que $[0, 1]$ não *satisfaz a propriedade de Heine-Borel.*

Lema 3.253. *Se um espaço métrico* (M, d) *satisfaz a condição de Heine-Borel, então* (M, d) *é sequencialmente compacto.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$. Temos dois casos a analisar:

Caso 1: O conjunto dos termos é finito, ou seja, temos $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$, para algum $n \in \mathbb{N}$;

Neste caso, existe algum índice $k_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$ tal que x_{k_0} ocorre infinitas vezes na sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Neste caso, temos a subsequência $(x_{k_0}, x_{k_0}, x_{k_0}, \cdots)$, que por ser estacionária, converge – neste caso a implicação segue sem usar a propriedade de Heine-Borel;

Caso 2: O conjunto dos termos, $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ é infinito.

Mostraremos primeiramente que existe $\bar{x} \in X'$, e depois construiremos uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para $\bar{x}$.

Suponhamos, por absurdo, que $X' = \varnothing$. Daqui concluiremos que se M satisfaz a propriedade de Heine-Borel então X também a satisfaz.

Uma vez que $\mathrm{Cl.}(X) = X \cup X'$ e $X' = \varnothing$, segue que $\mathrm{Cl.}(X) = X$ e X é fechado em M.

Seja $\{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta de X, de modo que $\{U_i \mid i \in I\} \cup \{M \setminus X\}$ é uma cobertura aberta de M (pois sendo X fechado, seu complementar, $M \setminus X$ é aberto) e, evidentemente,

$$M = (M \setminus X) \cup X \subset (M \setminus X) \cup \bigcup_{i \in I} U_i$$

Como M satisfaz a propriedade de Heine-Borel, segue que existe uma subcobertura finita para M, digamos $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}, M \setminus X\}$ (note que $M \setminus X$ pode ou não pertencer à subcobertura, dependendo do fato de $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}\}$ não recobrir ou recobrir (respectivamente) M). Segue, portanto, que $X \subset U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \cdots \cup U_{i_n}$, ou seja, X também satisfaz a propriedade de Heine-Borel.

Como $(\forall x \in M)(x \notin X')$, então para cada $x \in M$ existe uma bola aberta $B(x, \delta_x) \subset M$ tal que $B(x, \delta_x) \setminus \{x\} \cap X = \varnothing$, o que equivale a dizer que, ou $B(x, \delta_x) \cap X = \varnothing$ ou $B(x, \delta_x) \cap X = \{x\}$.[3]

Note que $\{B(x, \delta_x) \mid x \in M\}$ é uma cobertura aberta de M e, portanto, de X. Pela propriedade de Heine-Borel que X tem, existem $x_{i_1}, \cdots x_{i_k} \in M$ tais que $X \subset B(x_{i_1}, \delta_{x_{i_1}}) \cup B(x_{i_2}, \delta_{x_{i_2}}) \cup \cdots \cup B(x_{i_k}, \delta_{x_{i_k}})$. Disto segue que:

$$X = X \cap X \subset (B(x_{i_1}, \delta_{x_{i_1}}) \cup B(x_{i_2}, \delta_{x_{i_2}}) \cup \cdots \cup B(x_{i_k}, \delta_{x_{i_k}})) \cap X =$$

$$= (B(x_{i_1}, \delta_{x_{i_1}}) \cap X) \cup (B(x_{i_2} \delta_{x_{i_2}}) \cap X) \cup \cdots \cup (B(x_{i_k}, \delta_{x_{i_k}}) \cap X) \subseteq \{x_{i_1}, \cdots, x_{i_k}\}$$

ou seja, X está contido em um conjunto finito. Isto é absurdo. O absurdo provém de supor que $X' = \varnothing$. Assim, na verdade, tem-se $X' \neq \varnothing$.

Seja $\bar{x} \in X'$. Mostraremos, agora, que existe uma subsequência de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ que converge para $\bar{x}$.

De fato, como $\bar{x} \in X'$, para $k = 1$ podemos escolher $n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $x_{n_1} \in B(\bar{x}, 1) \setminus \{\bar{x}\}$. Para $k = 2$, podemos escolher $n_2 > n_1$ tal que $x_{n_2} \in B(\bar{x}, 1/2) \setminus \{\bar{x}\}$. Para $k = 3$ podemos escolher $n_3 > n_2$ tal que $x_{n_3} \in B(\bar{x}, 1/3) \setminus \{\bar{x}\}$. Procedendo indutivamente, supondo que já escolhemos $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_{k-1}}$ nas condições acima, para $n = k \in \mathbb{N}$ escolhemos $n_k > n_{k-1}$ tal que $x_{n_k} \in B(\bar{x}, 1/k) \setminus \{\bar{x}\}$. Assim, construímos a subsequência $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ que, por construção, converge para $\bar{x}$.

Daí segue que toda sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de elementos de X (quer assuma finitos ou infinitos valores distintos) admite subsequência convergente. Portanto X é sequencialmente compacto. $\square$

Proposição 3.254. *Sejam (M, d) um espaço métrico sequencialmente compacto. Se $\{U_i \mid i \in I\}$ é uma cobertura aberta de M então existe um número real $\lambda > 0$ tal que para todo $x \in M$ existe um $i_0 \in I$ tal que $B(x, \lambda) \subset U_{i_0}$.*

[3] ou seja, $B(x, \delta_x) \setminus \{x\} \cap X = \varnothing \iff (B(x, \delta_x) \cap X = \varnothing) \vee (B(x, \delta_x) \cap X = \{x\})$.

Demonstração. Suponhamos, por absurdo, que este não seja o caso. Então para qualquer $\lambda > 0$ existe pelo menos um $x \in M$ tal que:

$$(\forall i \in I)(B(x, \lambda) \not\subset U_i)$$

Desta forma, podemos escolher:

- um único x_1 tal que $(\forall i \in I)(B(x_1, 1) \not\subset U_i)$;
- um único x_2 tal que $(\forall i \in I)(B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) \not\subset U_i)$;
- um único x_2 tal que $(\forall i \in I)(B\left(x_2, \frac{1}{2}\right) \not\subset U_i)$;

Indutivamente, para qualquer $k \in \mathbb{N}$ podemos escolher:

- um único x_k tal que $(\forall i \in I)(B\left(x_k, \frac{1}{k}\right) \not\subset U_i)$;

Desta forma, construímos a sequência $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$.

Temos duas possibilidades:

Caso 1: $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$ é finito;

Quando isto ocorre, é porque existe $\bar{x} \in M$ tal que para uma infinidade de valores de $k \in \mathbb{N}$ tem-se $x_n = \bar{x}$. Como $\bar{x} \in M = \bigcup_{i \in I} U_i$, existe algum $i_0 \in I$ tal que $\bar{x} \in U_{i_0}$. Mas como U_{i_0} é aberto, existirá um $\delta_{i_0} > 0$ tal que $\bar{x} \in B(\bar{x}, \delta_{i_0}) \subset U_{i_0}$.

Como $\mathbb{R}$ é arquimediano, dado este $\delta_{i_0} > 0$ existe um número natural $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0$ implica:

$$\frac{1}{n} < \delta_{i_0}$$

de modo que para todo $n \geq n_0$ tem-se:

$$B\left(\bar{x}, \frac{1}{n}\right) \subset B(\bar{x}, \delta_{i_0}).$$

Como há uma infinidade de números naturais k tais que $x_k = \bar{x}$, escolhendo um $k > n_0$ tal que $x_k = \bar{x}$, obtemos que:

$$B\left(x_k, \frac{1}{k}\right) = B\left(\bar{x}, \frac{1}{k}\right) \subset B(\bar{x}, \delta_{i_0}) \subset U_{i_0},$$

o que é um absurdo. Logo, neste caso deve existir um número $\lambda > 0$ com as propriedades dadas no enunciado.

Caso 2: X é infinito.

Neste caso, se $\bar{x} \in M$ é tal que existe alguma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que converge para $\bar{x}$, tem-se $\bar{x} \in X'$. Como $\bar{x} \in M \subset \bigcup_{i\in I} U_i$, existe $i_0 \in I$ tal que:

$$\bar{x} \in U_{i_0}.$$

Como U_{i_0} é aberto, existe $\delta_{i_0} > 0$ tal que:

$$\bar{x} \in B\left(\bar{x}, \delta_{i_0}\right) \subset U_{i_0}.$$

Como existem infinitos pontos de X em $B\left(\bar{x}, \dfrac{\delta_{i_0}}{2}\right)$, podemos tomar $x_k \in X$ tal que:

$$x_k \in B\left(\bar{x}, \frac{\delta_{i_0}}{2}\right) \;\text{ e }\; \frac{1}{k} < \frac{\delta_{i_0}}{2}$$

e assim teremos:

$$B\left(x_k, \frac{1}{k}\right) \subset B(\bar{x}, \delta_{i_0}).$$

Com efeito, se $x \in B\left(x_k, \frac{1}{k}\right)$, então $d(\bar{x}, x_k) < \frac{1}{k}$ e daí:

$$d(x, \bar{x}) \leq d(x, x_k) + d(x_k, \bar{x}) < \frac{1}{k} + \frac{\delta}{2} < \delta.$$

Isto garante que $x \in B(\bar{x}, \delta)$. Como, porém, $B(\bar{x}, \delta) \subset U_{i_0}$, segue que:

$$B\left(x_k, \frac{1}{n}\right) \subset U_{i_0}$$

o que, novamente, contradiz a escolha de x_k. Absurdo.

Desta forma, existe um número $\lambda > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(\exists i \in I)(B(x, \lambda) \subset U_i).$$

□

O número cuja existência é assegurada pela **Proposição 3.254** é denominado o **número de Lebesgue da cobertura** $\{U_i \mid i \in I\}$.

Lema 3.255. *Se um espaço métrico (M, d) é sequencialmente compacto, então (M, d) satisfaz a condição de Heine-Borel.*

Demonstração. Seja $\{U_i \mid i \in I\}$ uma cobertura aberta qualquer de M. Mostraremos que $\{U_i \mid i \in I\}$ admite uma subcobertura finita.

Pela **Proposição 3.254** existe $\varepsilon > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(\exists i \in I)(B(x, \varepsilon) \subset U_i)$$

Sendo (M, d) sequencialmente compacto, (M, d) é totalmente limitado, de modo que existem $x_1, \cdots, x_n \in M$ tais que:

$$M \subset B(x_1, \varepsilon) \cup \cdots \cup B(x_n, \varepsilon)$$

Da **Proposição 3.254**, segue que existem $i_1, i_2, \cdots, i_n \in I$ tais que:

$$\begin{gathered} B(x_1, \varepsilon) \subset U_{i_1} \\ B(x_2, \varepsilon) \subset U_{i_2} \\ \vdots \\ B(x_n, \varepsilon) \subset U_{i_n} \end{gathered}$$

Segue portanto que:

$$M \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon) \subset \bigcup_{k=1}^{n} U_{i_k}$$

□

Os lemas acima nos fornecem o seguinte:

Teorema 3.256. *Um espaço métrico (M, d) é sequencialmente compacto se, e somente se, M satisfaz a propriedade de Heine-Borel.*

Para espaços topológicos gerais, ou seja, na ausência da noção de métrica, existem espaços sequencialmente compactos que não satisfazem a propriedade de Heine-Borel (*e.g.*, a reta longa) e existem espaços com a propriedade de Heine-Borel que não são sequencialmente compactos (*e.g.* a compatificação de Stone-Čech de $\mathbb{Z}$).

Como no contexto dos espaços métricos as duas noções coincidem, denominaremos espaços métricos que são sequencialmente compactos (ou, equivalente, que têm a propriedade de

Heine-Borel) simplesmente por "compactos".

Deixamos registrado o seguinte:

A compacidade é uma propriedade topológica, ou seja, é uma propriedade preservada por homeomorfismos.

Já temos, portanto, ferramentas para afirmar que:

- $\mathbb{S}^1$ *não* é homeomorfo a $\mathbb{R}$;
- $[a, b]$, para $a < b$, não é homeomorfo a $\mathbb{R}$;

Exercícios sobre Compacidade Sequencial

7.1 As seguintes afirmações são verdadeiras quando em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$. Justifique-as:

(a) $\mathbb{Q}$ não é sequencialmente compacto;

(b) $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \cdots, \frac{n}{n+1}, \cdots\right\}$ é sequencialmente compacto;

(c) $\mathbb{Z}$ não é sequencialmente compacto;

(d) $[1, 2] \cap \mathbb{Q}$ não é sequencialmente compacto;

(e) $\mathbb{R}$ não é sequencialmente compacto.

7.2 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ uma bijeção aberta. Mostrar que:

(a) Se $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em N então $(f^{-1}(y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em M.

(b) Se $K \subset N$ é sequencialmente compacto então $f^{-1}[K] = \{x \in M \mid f(x) \in K\}$ é sequencialmente compacto.

7.3 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) e $f : M \to N$ uma função contínua. Mostrar que se M é sequencialmente compacto então $f[M] \subset N$ é fechado.

7.4 Sejam (K, d_K) um espaço métrico compacto, (N, d_N) um espaço métrico qualquer. Mostrar que se $f : K \to N$ é uma função bijetora contínua tal que para todo fechado $F \subseteq K$ tem-se $f[F] \subset N$ fechado, então f é um homeomorfismo.

7.5 Sabe-se que todo intervalo fechado e limitado da reta é sequencialmente compacto, e que toda função contínua transforma subconjuntos compactos do domínio em subconjuntos compactos do contradomínio. Mostrar, usando os fatos acima, que são sequencialmente compactos os conjuntos:

(a) $\mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ munido da métrica usual;

(b) O quadrado $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| + |y| = 1\} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^2$ com a métrica usual; **dica:** use o item (a) e o fato de haver uma função contínua entre $\mathbb{S}^1$ e Q;

(c) O conjunto:

$$\mathcal{E} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\} \subset \mathbb{R}^2$$

que $a > 0$, $b > 0$ e $\mathbb{R}^2$ é considerado com a métrica usual.

7.6 Sejam (K, d_K) um espaço métrico compacto, (L, d_L) um espaço métrico qualquer e $\varphi : K \twoheadrightarrow L$ uma sobrejeção contínua. Mostrar que, dado qualquer espaço métrico (M, d_M), tem-se que $f : (L, d_L) \to (M, d_M)$ contínua se, e somente se, $f \circ \varphi : (K, d_K) \to (M, d_M)$ é contínua.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, two heads, "\varphi"] \arrow[dr, "f\circ\varphi"'] & L \arrow[d, "f"] \\ & M \end{tikzcd}$$

3.23 Conexidade

Definimos, primeiramente, o que entendemos por um espaço ser "desconexo", uma vez que esta definição envolve o quantificador "existe", ao invés de "não existe nenhum".

Definição 3.257 (espaço desconexo). *Um espaço métrico (M, d) é **desconexo** se, e somente se, existirem conjuntos abertos e não vazios $U, V \subset M$ tais que $U \cup V = M$ e $U \cap V = \varnothing$. A decomposição $M = U \cup V$ é denominada uma **cisão não trivial de** M.*

Definição 3.258 (espaço conexo). *Um espaço (M, d) é **conexo** se não for desconexo, ou seja, se não existirem abertos disjuntos não vazios, $U, V \subset M$, tais que $M = U \cup V$. Equivalentemente, (M, d) é conexo se, e somente se, para quaisquer abertos $U, V \subset M$ tais que $U \cap V = \varnothing$ e $M = U \cup V$, tivermos $M = U$ ou $M = V$. Neste caso, a cisão é dita "trivial".*

Seja (M, d) um espaço métrico. Dizemos que um subconjunto $X \subset M$ é conexo quando $(X, d\restriction_{X\times X})$ for conexo – e, analogamente, um subconjunto $X \subset M$ é desconexo quando $(X, d\restriction_{X\times X})$ for desconexo.

Observação 3.259. *É claro que, se (M,d) é desconexo, de modo que existem $U,V \subset M$ abertos disjuntos e não-vazios tais que $M = U \cup V$, existem fechados disjuntos não vazios, $F_1, F_2 \subset M$ tais que $M = F_1 \cup F_2$ – basta tomarmos $F_1 = M \setminus U$ e $F_2 = M \setminus V$.*

Exemplo 3.260. *Seja M um conjunto com mais de um elemento, e considere (M, d_{0-1}). Mostraremos que (M, d_{0-1}) é desconexo.*

De fato, para qualquer $x \in M$, os conjuntos $\{x\}$ e $M \setminus \{x\}$ são abertos, não vazios e disjuntos tais que $M = \{x\} \cup (M \setminus \{x\})$.

Exemplo 3.261. *Considere o espaço métrico $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |y-x|$. O subespaço $(\{0,1\}, d \restriction_{\{0,1\}\times\{0,1\}})$ é desconexo.*

De fato, os conjuntos $\{0\}$ e $\{1\}$ são ambos não vazios, disjuntos e tais que $\{0,1\} = \{0\} \cup \{1\}$.
Basta verificarmos que $\{0\}$ e $\{1\}$ são abertos. De fato, basta mostrarmos que são interseções de $\{0,1\}$ com algum aberto de $\mathcal{R}$. Tem-se:

$$\{0\} =]-1, 1/2[\cap \{0,1\}$$

e

$$\{1\} =]1/2, 2[\cap \{0,1\}$$

Exemplo 3.262. *Todo subconjunto unitário de um espaço métrico qualquer é conexo.*

Exemplo 3.263. *O conjunto:*

$$\mathcal{H} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \cdot y = 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

munido da métrica induzida da métrica usual de $\mathbb{R}^2$, é desconexo.

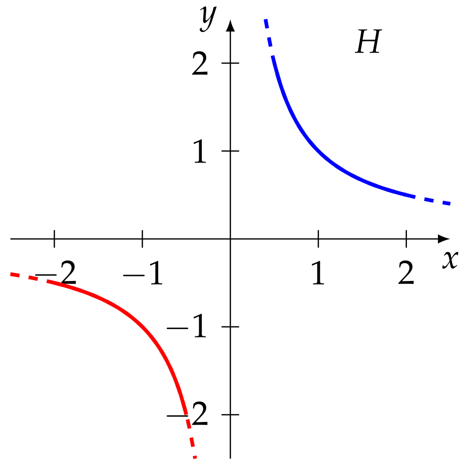
Com efeito, os conjuntos $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ e $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < 0\}$ são ambos abertos em $\mathbb{R}^2$, de modo que:

$$H_1 = \mathcal{H} \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot y = 1) \& (y > 0)\} \text{ é aberto em } \mathcal{H}$$

e

$$H_2 = \mathcal{H} \cap U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot y = 1) \& (y < 0)\} \text{ é aberto em } \mathcal{H}$$

Note que $H_1 \cap H_2 = \varnothing$, que $(1,1) \in H_1$, de modo que $H_1 \neq \varnothing$, que $(1,-1) \in H_2$, de modo que $H_2 \neq \varnothing$, que $H_1 \cap H_2 = \varnothing$ e, finalmente, que $\mathcal{H} = H_1 \cup H_2$. Logo $\mathcal{H}$, por admitir uma cisão não trivial, é desconexo.



Mostraremos, a seguir, que o espaço $\{0,1\}$, dado no **Exemplo 3.261** não só é desconexo, mas também representa, de um certo modo, todos os espaços desconexos.

Proposição 3.264. *Um espaço métrico (M,d) é desconexo se, e somente se, existir uma função* ***contínua e sobrejetora*** *$f: M \to \{0,1\}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$ Como M é desconexo, existem abertos disjuntos e não vazios, $U, V \subset M$ tais que $M = U \cup V$. Defina:

$$\begin{array}{rrcl} f: & M & \to & \{0,1\} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} 0, \text{ se } x \in U \\ 1, \text{ se } x \in V \end{cases} \end{array}$$

Como nem U nem V é vazio, existem $x \in U$ e $y \in V$, de modo que $1 = f(x)$ e $0 = f(y)$ – e portanto f é sobrejetora.

Note que $\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0,1\}$ são todos os subconjuntos abertos de $\{0,1\}$. Mas $f^{\dashv}[\varnothing] = \varnothing \subset M$ é aberto em M, $f^{\dashv}[\{0\}] = U$ é aberto em M, $f^{\dashv}[\{1\}] = V$ é aberto em M e $f^{\dashv}[\{0,1\}] = M$ é aberto em M. Assim, a pré-imagem de qualquer subconjunto aberto de $\{0,1\}$ por f é aberta, o que significa que f é contínua.

$(\Leftarrow)$ Por hipótese, existe uma sobrejeção contínua $f: M \twoheadrightarrow \{0,1\}$. Como vimos no **Exemplo 3.261**, $\{0\}$ e $\{1\}$ são subconjuntos abertos de $\{0,1\}$. Como f é contínua, $f^{\dashv}[\{0\}] = U$ e $f^{\dashv}[\{1\}] = V$ são subconjuntos abertos de M. Além disto, por f ser sobrejeção, tem-se $f^{\dashv}[\{0\}] = U \neq \varnothing$ e $f^{\dashv}[\{1\}] = V \neq \varnothing$. Assim, $M = f^{\dashv}[\{0\}] \cup f^{\dashv}[\{1\}] = U \cup V$ é uma cisão não trivial de M, e portanto M é desconexo. $\square$

Corolário 3.265. *Um espaço métrico (M, d) é conexo se, e somente se, as únicas funções contínuas de M em $\{0, 1\}$ forem constantes.*

A proposição a seguir nos permite concluir que a conexidade é preservada por funções contínuas – e portanto é uma propriedade topológica.

Teorema 3.266. *Sejam (M, d_M) um espaço métrico conexo, (N, d_N) um espaço métrico qualquer e $f : (M, d_M) \to (N, d_N)$ uma função contínua. Então $f[M] \subset N$ é conexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que f seja contínua, M seja conexo mas que $f[M]$ seja desconexo. Pela **Proposição 3.264**, existe uma sobrejeção contínua $g : f[M] \to \{0, 1\}$. Defina:

$$\begin{array}{rccc} f_1 : & M & \to & f[M] \\ & x & \mapsto & f(x) \end{array}$$

que é uma função contínua e sobrejetora (restringimos o co-domínio à imagem). Desta forma, $g \circ f_1 : M \to \{0, 1\}$ é uma função contínua e sobrejetora, o que contradiz o fato de M ser conexo.

A contradição vem de supor que f seja contínua, M conexo e N desconexo. Assim, se f é contínua e M é conexo, então $f[M]$ também é conexo. □

Corolário 3.267. *A conexidade é uma propriedade topológica, ou seja, se $\mathcal{M} = (M, d_M)$ e $\mathcal{N} = (N, d_N)$ são espaços métricos homeomorfos e $\mathcal{M}$ é conexo, então $\mathcal{N}$ também será conexo.*

Proposição 3.268. *Sejam $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico, $A, B \subset M$ subespaços conexos de M tais que $A \cap B \neq \emptyset$. Então $A \cup B$ é conexo.*

Demonstração. Suponhamos, por contraposição, que $A \cup B$ seja desconexo. Neste caso existiria uma sobrejeção contínua $f : A \cup B \to \{0, 1\}$.

Como $A \cap B \neq \emptyset$, existe algum $x \in A \cap B$. Suponhamos, sem perda de generalidade, que $f(x) = 0$. Da sobrejetividade de f segue que existe $y \in A \cup B$ tal que $f(y) = 1$.

Se $y \in A$, então $f \restriction_A : A \to \{0, 1\}$ é uma sobrejeção contínua (por ser restrição de função contínua), de modo que A é desconexo;

Se $y \in B$, então $f \restriction_B : B \to \{0, 1\}$ é uma sobrejeção contínua (por ser restrição de função contínua), de modo que B é desconexo;

Assim, fica provado que:

$$(A \cup B \ \text{desconexo}) \overset{A\cap B\neq\varnothing}{\Rightarrow} (A \ \text{desconexo}) \vee (B \ \text{desconexo})$$

ou, equivalentemente,

$$(A \ \text{conexo})\&(B \ \text{conexo}) \overset{A\cap B\neq\varnothing}{\Rightarrow} (A \cup B \ \text{conexo})$$

□

Proposição 3.269. *Seja (M,d) um espaço métrico tal que para quaisquer $x,y \in M$ existe um subconjunto conexo de M, $C_{x,y}$ tal que $x \in C_{x,y}$ e $y \in C_{x,y}$. Então M é conexo.*

Demonstração. Suponha, por absurdo, que M satisfaça a propriedade do enunciado e, ainda assim, seja desconexo. Então existe uma sobrejeção contínua $f : M \to \{0,1\}$.

Como f é sobrejetora, existem $x,y \in M$ tais que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$.

Como M satisfaz a propriedade dada no enunciado, para os pontos $x,y \in M$ existe um conjunto conexo $C_{x,y}$ tal que $x \in C_{x,y}$ e $y \in C_{x,y}$.

Assim, $f\restriction_{C_{x,y}} : C_{x,y} \to \{0,1\}$ é uma sobrejeção contínua, o que contradiz o fato de $C_{x,y}$ ser conexo.

Este absurdo proveio de supor que M não fosse conexo. Logo, sob as condições dadas no enunciado, M é conexo. □

Proposição 3.270. *Sejam (M,d_M) e (N,d_N) espaços métricos. Então $(M \times N, d)$,em que d é qualquer uma das métricas equivalentes das quais podemos dotar o produto, é conexo se, e somente se, (M,d_M) e (N,d_N) forem conexos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Uma vez que as projeções $\pi_M : M \times N \to M$ e $\pi_N : M \times N \to N$ são contínuas, segue que se $M \times N$ for conexo, $M = \pi_M[M \times N]$ e $N = \pi_N[M \times N]$ serão ambos conexos.

($\Leftarrow$) Sejam $p = (a,b) \in M \times N$ e $q = (c,d) \in M \times N$ pontos arbitrários de $M \times N$. Como $\{a\} \times N$ é homeomorfo a N[4] e N é, por hipótese, conexo, segue que $\{a\} \times N$ é conexo. Analogamente, como $M \times \{d\}$ é homeomorfo a M e M é conexo, segue que $M \times \{d\}$ é conexo.

[4]De fato, a função $f : \{a\} \times N \to N, (a,y) \mapsto y$ é contínua (por ser projeção) e $\jmath_a : N \to \{a\} \times N, x \mapsto (a,x)$ é sua inversa, que também é contínua (veja o **Exemplo 3.166**)

Como $\{a\} \times N$ e $M \times \{d\}$ são conexos e $\{a\} \times N \cap M \times \{d\} \neq \varnothing$, segue da **Proposição 3.268** que $(\{a\} \times N) \cup (M \times \{d\})$ é um conjunto conexo que contém (a, b) e (c, d). Da **Proposição 3.269**, como (a, b) e (c, d) são quaisquer, segue que $M \times N$ é conexo. □

Corolário 3.271. *Sejam $(M_1, d_1), \cdots, (M_n, d_n)$ espaços métricos. O produto $\prod_{i=1}^{n} M_i$ é conexo se, e somente se, $(\forall i \in \{1, \cdots, n\})(M_i$ é conexo$)$.*

Teorema 3.272. *Seja (M, d) um espaço métrico. (M, d) é conexo se, e somente se, os únicos abertos fechados de M forem $\varnothing$ e M.*

Demonstração. Suponha que os únicos abertos fechados de M sejam $\varnothing$ e M. Sejam U, V abertos disjuntos tais que $M = U \cup V$. Se $U \neq \varnothing$ então $V = M \setminus U \subsetneq M$ é fechado, logo V é um aberto fechado – e portanto $V = M$ ou $V = \varnothing$. Mas $V \neq M$, pois supusemos $U \neq \varnothing$, logo $V = \varnothing$. Desta forma, M só admite a cisão trivial.

Reciprocamente, suponhamos, por absurdo, que seja M conexo e que exista $\varnothing \neq U \subsetneq M$ é um aberto fechado.

Nestas condições, $V = M \setminus U$ será aberto (por ser complementar de um fechado, U) não-vazio, pois $U \neq M$. Deste modo, tem-se U e $V = M \setminus U$ ambos abertos, não vazios, disjuntos (pois $U \cap V = U \cap (M \setminus U) = \varnothing$) e tais que $M = U \cup V$ – ou seja, obtivemos uma cisão não trivial de M – o que é absurdo, pois M é conexo. Logo, o absurdo provém de supor que existia um aberto fechado diferente de $\varnothing$ e de M. □

Costumamos chamar um conjunto simultaneamente aberto e fechado de **clopen** – ou, em sua forma aportuguesada, de **faberto**.

Pode-se, assim, medir a desconexidade de um espaço métrico pela sua abundância em clopens: quanto mais clopens, mais desconexo.

Proposição 3.273. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $X \subset M$. Se X é conexo então $\mathrm{Cl.}(X)$ é conexo.*

Demonstração. Vamos considerar primeiramente o caso em que X é conexo e $\mathrm{Cl.}(X) = M$ (ou seja, X é denso em M). Mostraremos que M é conexo.

Com efeito, seja $M = U \cup V$ uma cisão de M, de modo que $X = (U \cap X) \cup (V \cap X)$ é uma cisão de X. Como X é conexo, tem-se $U \cap X = \varnothing$ ou $V \cap X = \varnothing$. Uma vez que X é denso em M, segue que $U \cap X = \varnothing \iff U = \varnothing$ e $V \cap X = \varnothing \iff V = \varnothing$ – ou seja, $M = U \cup V$ é a cisão trivial de M, e M é, portanto, conexo.

No caso geral, se X for conexo, como X é denso em $\mathrm{Cl.}(X)$, $\mathrm{Cl.}(X)$ é conexo (pelo que provamos acima). $\square$

Proposição 3.274. *Sejam (M,d) um espaço métrico e $X,Y \subset M$. Se $X \subset Y \subset \mathrm{Cl.}(X)$ e X é conexo, então Y é conexo.*

Demonstração. Com efeito, considerando $(X, d\restriction_{X\times X})$ como subespaço de $(Y, d\restriction_{Y\times Y})$, o fecho de X no espaço Y é $\mathrm{Cl.}_Y(X) = \mathrm{Cl.}(X) \cap Y = Y$, segue que X é denso em Y e, portanto, Y é conexo. $\square$

3.23.1 Subconjuntos conexos de $\mathbb{R}$ e de $\mathbb{R}^n$

Nesta seção veremos que em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x-y|$, "ser conexo" é o mesmo que "ser um intervalo" ou "ser um conjunto unitário".

Definição 3.275 (intervalo). *Seja $(\mathbb{R}, d)$, com $d(x,y) = |y-x|$ o espaço métrico dos números reais munido da métrica usual. Um conjunto $I \subset \mathbb{R}$ é um **intervalo** se, e somente se, para quaisquer $x,y \in I$ com $x < y$, dado qualquer $z \in \mathbb{R}$ tal que $x < z < y$, tem-se $z \in I$.*

Proposição 3.276. *Em $\mathcal{R} = (\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |x-y|$, os intervalos $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ são todos conexos.*

Demonstração. (Demonstração por redução ao absurdo) Faremos a demonstração para um intervalo $]a,b]$ – os demais casos são análogos (bastará, no caso de $[a,b[$ substituir b por a e argumentar adequadamente).

Se $]a,b]$ fosse desconexo, existiria uma sobrejeção contínua $f :]a,b] \to \{0,1\}$ tal que $f(b) = 1$.

De fato, existe pelo menos uma sobrejeção contínua, $f :]a,b] \to \{0,1\}$, uma vez que $]a,b]$ foi suposto desconexo. Se $f(b) \neq 1$, poderíamos considerar a função $g(x) = 1 - f(x)$, que também seria uma sobrejeção contínua em $\{0,1\}$, ou seja, teríamos $g(b) = 1$.

Seja $c = \sup\{x \in]a,b] \mid f(x) = 0\}$, e note que como $f(b) = 1$ temos $c < 1$. Como f é contínua neste c, dado $\varepsilon = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, existe $\delta_n > 0$ tal que se x satisfaz $a < x \leq b$ e $|x-c| < \delta_n$, então $|f(x) - f(c)| < 1$. Em particular, existe $x_n \in \{x \in]a,b] \mid f(x) = 0\}$ tal que $c - \frac{1}{n} < x_n < c$ e, portanto, $|f(x_n) - f(c)| < \frac{1}{n}$. Como $f(x_n) \in \{0,1\}$, dizer que

$|f(x_n) - f(c)| < 1/n$ equivale a dizer que $f(x_n) = 0$. Deste modo, construímos uma sequência de elementos de $\{x \in]a, b] \mid f(x) = 0\}$ com $x_n \to c$. Como f é contínua em c e $x_n \to c$, segue que $f(x_n) \to f(c)$ – e como para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(x_n) = 0$, segue que $f(c) = 0$.

Uma vez que $c = \sup\{x \in]a, b] \mid f(x) = 0\}$, dado $\frac{1}{n} > 0$ existe $y_n \in]a, b]$ tal que $c < y_n \leq c + \frac{1}{n}$ e $f(y_n) = 1$, de modo que resulta, da continuidade de f em c, que como $y_n \to c$ e para todo $n \in \mathbb{N}$, $f(y_n) = 1$, que $f(c) = 1$, o que é absurdo, uma vez que f é função.

O absurdo provém de supor que o intervalo $]a, b]$ seja desconexo. □

Corolário 3.277. *Os intervalos do tipo $]a, b[$ são conexos.*

Demonstração. Com efeito, basta tomarmos $c \in]a, b[$ e observar que:

$$]a, b[=]a, c] \cup [c, b[,$$

que é reunião de dois conexos com um ponto em comum – e portanto conexo. □

Corolário 3.278. *Todo intervalo da forma $[a, \infty[$ é conexo.*

Demonstração. Basta observar que a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & [a, b[& \to & [a, \infty[\\ & x & \mapsto & \dfrac{a \cdot (b - a)}{b - x} \end{array}$$

é contínua e que $f[[a, b[] = [a, \infty[$.
Como $[a, b[$ é conexo e f é contínua, segue que $[a, \infty[$ também é conexo. □

Corolário 3.279. *Todos os intervalos da forma $]a, \infty[,]-\infty, a[$ e $]-\infty, a]$ são conexos.*

Teorema 3.280. *O espaço métrico $\mathbb{R}$, com a métrica usual, é conexo.*

Demonstração. Basta observar que:

- o intervalo $I = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ é conexo;
- a função $\tan : I \to \mathbb{R}$ é um homeomorfismo.

□

Corolário 3.281. *Para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^n$ (com a métrica usual) é conexo.*

Demonstração. Basta observar que $\mathbb{R}$ é conexo: deste modo, o produto cartesiano de $\mathbb{R}$ com $\mathbb{R}$ será conexo, e assim sucessivamente. □

Sumarizando todos os resultados vistos acima, temos o:

Teorema 3.282. *Todo intervalo em $\mathbb{R}$ é um subconjunto conexo da reta.*

Proposição 3.283. *Para que um subconjunto não-vazio e não unitário J de $\mathbb{R}$ seja conexo é necessário e suficiente que J seja um intervalo.*

Demonstração. Seja $J \subset \mathbb{R}, J \neq \varnothing$ um subconjunto conexo e não unitário de $\mathbb{R}$.

Suponha, por contraposição, que J não seja um intervalo, de modo que existem $a, x, y \in \mathbb{R}$ tais que $x < a < y$, $x, y \in J$ e $a \notin J$. Considerando $U = J \cap]-\infty, a[$ e $V =]a, \infty[$, tem-se:

- U e V são ambos abertos em J;
- $U \neq \varnothing$ (pois $x \in U$) e $V \neq \varnothing$ (pois $y \in V$);
- $U \cap V = (J \cap]-\infty, a[) \cap (]a, \infty[\cap J) =]-\infty, a[\cap]a, \infty[= \varnothing$;
- $J = U \cup V = (]-\infty, a[\cap J) \cup (J \cap]a, \infty[) = \mathbb{R} \cap J$

Daí concluímos que J é desconexo. □

3.23.2 Aplicações da Conexidade

Teorema 3.284 (Teorema do Valor Intermediário). *Sejam (M, d) um espaço métrico conexo e $f : M \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se $y_1, y_2 \in f[M]$ são tais que $y_1 < y_2$, dado $y \in \mathbb{R}$ tal que $y_1 < y < y_2$ segue que $y \in f[M]$.*

Demonstração. Como f é contínua e M é conexo, segue que $f[M] \subset \mathbb{R}$ é conexo, e portanto um intervalo. Daí segue a conclusão. □

Observe que o resultado acima nos garante que se uma função real contínua definida em um espaço conexo assume valores $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$, com $y_1 < y_2$, então essa função assume todos os valores y compreendidos entre esses dois pontos, $y_1 < y < y_2$.

O teorema a seguir é um caso particular do famoso **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer**:

Teorema 3.285. *Dada uma função contínua:*

$$f : [a, b] \to [a, b]$$

existe algum $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = c$.

Demonstração. Se $f(a) = a$ ou se $f(b) = b$, não há nada a se provar.

Suponhamos, portanto, que $f(a) \neq a$ e $f(b) \neq b$ – do que segue, em particular, que $a < f(a)$ e $f(b) < b$. Definimos:

$$\begin{array}{rccc} g: & [a, b] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - x \end{array}$$

que é contínua, uma vez que f é contínua.

Como $g(a) = f(a) - a > 0$ e $g(b) = f(b) - b < 0$, segue do **Teorema do Valor Intermediário** que existe $c \in [a, b]$ tal que $g(c) = 0$, ou seja, tal que $f(c) = c$. □

O **Teorema do Ponto Fixo de Brouwer** nos garante, em sua forma mais geral, que toda função contínua $f : B[0, 1] \to B[0, 1]$,em que $B[0, 1]$ denota a bola fechada de centro na origem e raio 1 em $\mathbb{R}^n$ admite no mínimo um ponto fixo.

Note que $\mathbb{S}^1$ é um espaço métrico conexo, por ser imagem do intervalo $[0, 2\pi]$ pela função contínua:

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & [0, 2\pi] & \to & \mathbb{R}^2 \\ & t & \mapsto & (\cos(t), \sin(t)) \end{array}$$

Teorema 3.286. *Se $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, então existe $x \in \mathbb{S}^1$ tal que $f(-x) = f(x)$ (onde $-x$ denota o ponto antípoda de x).*

Demonstração. Considere a função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{S}^1 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x) - f(-x) \end{array}$$

Observe que $g(-x) = f(-x) - f(-(-x)) = f(-x) - f(x) = -g(x)$, de modo que g é uma função ímpar.

Desta forma, dado $x \in \mathbb{S}^1$, se $g(x) = 0$ então $f(x) = f(-x)$. Se $g(x) < 0$, teremos $g(-x) = -g(x) > 0$, e portanto $g(x) < 0 < g(-x)$. Pelo **Teorema do Valor Intermediário**, existe $x_0 \in \mathbb{S}^1$ tal que $g(x_0) = 0$, ou seja, tal que $f(-x_0) = f(x_0)$. □

O resultado acima pode ser generalizado para funções contínuas de $\mathbb{S}^n$ em $\mathbb{R}^n$, recebendo, em sua generalidade, o nome de **Teorema de Borsuk-Ulam**.

Proposição 3.287. *Todo polinômio de grau ímpar com coeficientes reais admite pelo menos uma raiz real.*

Demonstração. Seja $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$ um polinômio com $a_n \neq 0$ e n ímpar. Sem perda de generalidade, suponhamos $a_n = 1$.

Para demonstrar que p admite uma raiz real, basta mostrarmos que existem $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tais que $p(x_1) < 0 < p(x_2)$.

Para todo $x \neq 0$, podemos escrever:

$$p(x) = x^n \cdot \left[\frac{a_0}{x^n} + \frac{a_1}{x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1\right] \tag{3.11}$$

Seja $r = |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1 > 1$. Se tomarmos $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| > r$, teremos:

$$\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} \leq \left|\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x}\right| \leq \frac{|a_0|}{|x|^n} + \cdots + \frac{|a_{n-1}|}{|x|} \overset{|x|>1}{\leq}$$

$$\overset{|x|>1}{\leq} \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|}{|x|} \leq \frac{|a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}| + 1}{|x|} \overset{|x|>r}{<} 1$$

Assim,

$$-1 < -\left|\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x}\right| \leq \frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} \leq \left|\frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x}\right| < 1$$

Logo, para $x \in \mathbb{R}$ com $|x| > r$, $-1 < \frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x}$, e portanto $0 < \frac{a_0}{x^n} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{x} + 1$ – ou seja, o fator dentro dos colchetes em (3.11) é positivo.

Isto implica que, para valores de x tais que $|x| > r$ o sinal de $p(x)$ é o mesmo sinal de x^n. Como n é ímpar, segue que x^n assume valores negativos e positivos – de modo que pelo **Teorema do Valor Intermediário**, $p(x)$ se anula em algum ponto. $\square$

A proposição acima assegura que o corpo ordenado $(\mathbb{R}, \leq)$ é **real fechado** na seguinte acepção: todo número positivo segundo a ordem $\leq$ admite uma raiz quadrada e todo polinômio de grau ímpar admite, no mínimo, uma raiz.

Proposição 3.288. *Seja (M, d) um espaço métrico. Um conjunto $C \subset M$ é conexo se, e somente se, para qualquer $X \subset C$ tal que* $\text{Fr.}\,(X) = \varnothing$ *tem-se ou $X = C$ ou $X = \varnothing$.*

Demonstração. Uma vez que C é conexo, pelo **Teorema 3.272** os únicos subconjuntos de C simultaneamente abertos e fechados são $\varnothing$ e C. Caso $\text{Fr.}\, X = \varnothing$, então como $X \subset C$, para todo $x \in X$ existe $\delta > 0$[5] tal que $B(x, \delta) \cap (C \setminus X) = \varnothing$, ou seja, tal que $B(x, \delta) \subset X$. Logo X é aberto em C.

Observe que $C \setminus X$ também é aberto, uma vez que $\text{Fr.}\, X = \varnothing$, dado $x \in C \setminus X$, existe $\delta > 0$ tal que $B(x, \delta) \cap X = \varnothing$, de modo que $B(x, \delta) \subset C \setminus X$. Logo $C \setminus X$ é aberto em C.

Disto segue que, como X e $C \setminus X$ são clopens, e como C é conexo, ou $X = \varnothing$ ou $C \setminus X = \varnothing$, e portanto $C = X$.

Reciprocamente, suponha que para qualquer $X \subset C$ tal que $\text{Fr.}\,(X) = \varnothing$ tenha-se ou $X = C$ ou $X = \varnothing$.

Seja $C = U \cup V$ uma cisão para C (ou seja, U e V são ambos abertos e disjuntos tais que $C = U \cup V$). Como $C = U \cup (C \setminus U)$ e $\text{Fr.}\,(U) = \varnothing$, segue, por hipótese, que $U = C$ ou $U = \varnothing$ – de modo que a cisão é trivial. Logo C é conexo. □

O seguinte teorema generaliza o **Teorema do Valor Intermediário**, e sua presente demonstração contou com a colaboração de O. O. Luciano:

Teorema 3.289 (Teorema da Alfândega). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $C, X \subset M$. Se C for conexo e tiver pontos em comum tanto com X como com $M \setminus X$, então algum ponto de C pertencerá à fronteira de X, ou seja,* $\text{Fr.}\,(X) \cap C \neq \varnothing$.

Demonstração. **[Estratégia:** provar, por contraposição: se $\text{Fr.}\,(X) \cap C = \varnothing$ então C é desconexo].

Suponhamos $\text{Fr.}\,(X) \cap C = \varnothing$. Pelo **Teorema 3.123**, tem-se:

$$M = \text{int.}\,(X) \cup \text{Fr.}\,(X) \cup \text{int.}\,(M \setminus X)$$

Assim, podemos escrever:

$$C = (\text{int.}\,(X) \cap C) \cup (\text{Fr.}\,(X) \cap C) \cup (\text{int.}\,(M \setminus X) \cap C).$$

Uma vez que $\text{Fr.}\,(X) \cap C = \varnothing$, isto se reduz a:

[5] uma testemunha de que x não é ponto aderente de $M \setminus X$

$$C = (\text{int.}\,(X) \cap C) \cup (\text{int.}\,(M \setminus X) \cap C).$$

que é uma reunião de dois subconjuntos abertos e disjuntos de C (logo, uma cisão de C).

Como $X \subseteq \text{int.}\,(X) \cup \text{Fr.}\,(X)$ e $C \cap X \neq \varnothing$, segue que $\varnothing \neq C \cap X \subseteq (C \cap \text{int.}\,(X)) \cup (C \cap \text{Fr.}\,(X)) = C \cap \text{int.}\,(X)$, pois $C \cap \text{Fr.}\,(X) = \varnothing$.

Desta forma, $\text{int.}\,(X) \cap C$ é um subconjunto aberto e não vazio de C;

Como $M \setminus X \subseteq \text{int.}\,(M \setminus X) \cup \text{Fr.}\,(M \setminus X) \overset{\textbf{Prp. 3.122}}{=} \text{int.}\,(M \setminus X) \cup \text{Fr.}\,(X)$ e $C \cap (M \setminus X) \neq \varnothing$, segue que $\varnothing \neq C \cap (M \setminus X) \subseteq (C \cap \text{int.}\,(M \setminus X)) \cup (C \cap \text{Fr.}\,(X))$. Como $C \cap \text{Fr.}\,(X) = \varnothing$, segue que $\varnothing \neq C \cap (M \setminus X) \subseteq C \cap \text{int.}\,(M \setminus X)$. Segue, portanto, que $\text{int.}\,(M \setminus X) \cap C$ é um subconjunto aberto e não vazio de C.

Concluímos, assim, que $C = (\text{int.}\,(X) \cap C) \cup (\text{int.}\,(M \setminus X) \cap C)$,em que $\text{int.}\,(X) \cap C) \neq \varnothing$, $\text{int.}\,(M \setminus X) \neq \varnothing$ e $(\text{int.}\,(X) \cap C) \cap (\text{int.}\,(M \setminus X) \cap C) = \varnothing$. Desta forma, exibimos uma cisão não trivial de C, donde concluímos que C é desconexo. □

Note que, do **Teorema da Alfândega** podemos deduzir facilmente uma "generalização" do **Teorema do Valor Intermediário**:

Teorema 3.290. *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é contínua e $f(a) < d < f(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $f(c) = d$.*

Demonstração. Considere o conjunto $C = \text{Graf}\,(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in [a,b]\}$, que é conexo por ser homeomorfo ao intervalo $[a,b]$ (veja o **Exemplo 3.218** e o **Teorema 3.266**).

Seja $X = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < d\}$. É (realmente) fácil ver que $\text{Fr.}\,(X) = \{(x,d) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Uma vez que $a \in C \cap X$ (pois $f(a) < d$, por hipótese) e $b \in C \cap (\mathbb{R}^2 \setminus X)$ (pois $f(b) > d$, por hipótese), estão satisfeitas as hipóteses do **Teorema da Alfândega**. Daí concluímos que $\{(x,d) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in \mathbb{R}\} \cap \text{Graf.}\,(f) \neq \varnothing$, de modo que existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = d$. □

3.23.3 Conexidade por Caminhos

Definição 3.291 (caminho). *Seja (M,d) um espaço métrico. Um **caminho** em M é uma função contínua:*

$$\gamma : [0,1] \to M$$

*O ponto $\gamma(0)$ é denominado o **ponto inicial** do caminho e o ponto $\gamma(1)$ é denominado o **ponto final** do caminho.*

Note que, em M, a relação:

$$\sim = \{(x,y) \in M \times M \mid (\exists \gamma : [0,1] \to M)(\gamma \text{ contínua})(\gamma(0) = x)\&(\gamma(1) = y)\} \tag{3.12}$$

é uma relação de equivalência.

A relação é reflexiva, uma vez que para qualquer $x \in M$ a função:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & M \\ & t & \mapsto & x \end{array}$$

é contínua e $\gamma(0) = x = \gamma(1)$;

A relação é simétrica, uma vez que dados $x, y \in M$ tais que $x \sim y$, existe:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & M \\ & t & \mapsto & \gamma(t) \end{array}$$

contínua tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$. Considerando:

$$\begin{array}{rccc} \gamma^{-1} : & [0,1] & \to & M \\ & t & \mapsto & \gamma(1-t) \end{array}$$

vê-se que γ^{-1} é contínua ($t \mapsto 1 - t \mapsto \gamma(1-t)$) e que $\gamma^{-1}(0) = \gamma(1-0) = \gamma(1) = y$ e $\gamma^{-1}(1) = \gamma(1-1) = \gamma(0) = x$, logo $y \sim x$.

Finalmente, tem-se que $\sim$ é uma relação transitiva.

Com efeito, dados $x, y, z \in M$ tais que $x \sim y$ e $y \sim z$, existem $\alpha : [0,1] \to M$ e $\beta : [0,1] \to M$ contínuas tais que $\alpha(0) = x, \alpha(1) = y, \beta(0) = y$ e $\beta(1) = z$. A função:

$$\begin{array}{rccc} \alpha * \beta : & [0,1] & \to & M \\ & t & \mapsto & \begin{cases} \alpha(2t), \text{ se } t \in [0,1/2]; \\ \beta(2t-1), \text{ se } t \in [1/2,1] \end{cases} \end{array}$$

é contínua e tal que $(\alpha * \beta)(0) = x$ e $(\alpha * \beta)(1) = z$.

Definição 3.292 (componente conexa por caminhos). *Sejam (M, d) um espaço métrico e $\sim$ a relação de equivalência dada por* (3.12). *Cada elemento do conjunto quociente:*

$$\frac{M}{\sim} = \{[x] \mid x \in M\}$$

é uma ***componente conexa por caminhos*** *de M.*

Definição 3.293 (espaço métrico conexo por caminhos). *Um espaço métrico (M, d) é **conexo por caminhos** se, e somente se, $M/\sim$ tiver um único elemento. Equivalentemente, M é conexo por caminhos se, e somente se, para quaisquer $x, y \in M$ existir uma função contínua $\gamma : [0,1] \to M$ tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma(1) = y$.*

Proposição 3.294. *Todo espaço métrico conexo por caminhos é conexo.*

Demonstração. Seja (M, d) um espaço métrico conexo por caminhos. Tendo em conta que todo caminho é uma função contínua, dados quaisquer $x, y \in M$ o conjunto $\alpha[0,1] \subset M$ é conexo (onde $\alpha : [0,1] \to M$ é um caminho que une x a y). Pela **Proposição 3.269**, segue que Mé conexo. $\square$

A recíproca da proposição acima é, em geral, falsa, ou seja, nem todo espaço métrico conexo é conexo por caminhos, como ilustraremos ao final desta seção.

Exemplo 3.295. *Todo subconjunto convexo de $\mathbb{R}^n$ é conexo por caminhos. De fato, dado $U \subset \mathbb{R}^n$ convexo, dados quaisquer $x, y \in U$ existe um segmento de reta que une x e y. Assim, basta considerarmos o caminho:*

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & U \\ & t & \mapsto & t \cdot x + (1-t) \cdot y \end{array}$$

Exemplo 3.296. *Todo espaço vetorial normado é conexo por caminhos.*

Exemplo 3.297. *A esfera $\mathbb{S}^n = \{\vec{u} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|\vec{u}\| = 1\}$ é conexa por caminhos.*

Dados $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{S}^1$, temos dois casos a analisar:

Caso 1: *$\vec{u} \neq -\vec{v}$. Quando isto acontece, temos $(1-t) \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v} \neq 0$ – pois se não fosse este o caso, teríamos $|1-t| \cdot \|\vec{u}\| = |t| \cdot \|v\|$, e como $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 1$, então $1 - t = t$ e daí $t = \frac{1}{2}$, e disto resultaria que $\vec{u} = -\vec{v}$, contra a hipótese.*

Assim, podemos definir:

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & [0,1] & \to & \mathbb{S}^n \\ & t & \mapsto & \dfrac{(1-t) \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}}{\|(1-t) \cdot \vec{u} + t \cdot \vec{v}\|} \end{array}$$

que é um caminho tal que $\gamma(0) = \vec{u}$ e $\gamma(1) = \vec{v}$.

Caso 2: *$\vec{u} = -\vec{v}$. Neste caso, toma-se um ponto $\vec{w} \in \mathbb{S}^n \setminus \{\vec{u}, \vec{v}\}$, do que obviamente resulta que $\vec{w} \neq \vec{u}$ e $\vec{w} \neq -\vec{v}$. Pelo **Caso 1**, temos $\vec{w} \sim \vec{u}$ e $\vec{w} \sim \vec{v}$, e portanto $\vec{u} \sim \vec{v}$. Desta forma, existe um caminho de ponto inicial $\vec{u}$ e ponto final $\vec{v}$.*

3.23.4 Componentes Conexas

Nosso objetivo, agora, é mostrar a existência de uma importante partição em qualquer espaço métrico M: ou este espaço é conexo ou é formado de partes conexas, disjuntas entre si.

Proposição 3.298. *Seja $\{U_i \mid i \in I\}$ é uma família de subconjuntos conexos de um espaço M. Se $\bigcap_{i\in I} U_i \neq \varnothing$ então $U = \bigcup_{i\in I} U_i$ é também conexo.*

Demonstração. De fato, se existisse uma sobrejeção contínua $f : U \to \{0,1\}$, escolhendo $x, y \in U$ de modo que $f(x) = 1$ e $f(y) = 0$ e supondo, por exemplo, que $x \in U_{i_x}$ e $y \in U_{i_y}$, então a restrição de f a $U_{i_x} \cup U_{i_y}$ seria contínua e sobrejetora – o que não é possível, pois $U_{i_x} \cup U_{i_y}$ é conexo (pela **Proposição 3.268**). □

Proposição 3.299. *Dado $x \in M$, a coleção dos subconjuntos conexos de M que contêm x é não-vazia.*

Demonstração. Dado $x \in M$, a coleção dos subconjuntos conexos de M que contêm x é não-vazia, pois $\{x\}$ é conexo. □

Definição 3.300 (componente conexa de um ponto). *Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $\mathcal{V} = \{U \subseteq M \mid (U \text{ conexo})\&(x \in U)\}$. A **componente conexa de** x, que denotaremos por $C(x)$, é a reunião de todos os conjuntos conexos que contêm x:*

$$C(x) = \bigcup \mathcal{V} = \bigcup\{U \subseteq M \mid (U \text{ conexo})\&(x \in U)\} = \bigcup_{\substack{U \text{ conexo} \\ x \in U}} U$$

Proposição 3.301. *Sejam (M, d) um espaço métrico e $x \in M$. A componente conexa de x, $C(x)$, é o maior subconjunto conexo de M que contém x, ou seja, se $V \subseteq M$ é um subconjunto conexo tal que $x \in V$, então $V \subseteq C(x)$.*

Demonstração. Devido à **Proposição 3.298**, $C(x)$ (por ser uma reunião de conexos com um ponto em comum) é conexo. A fim de provar a maximalidade de $C(x)$, basta notar que se V é conexo tal que $x \in V$, então $V \in \mathcal{V}$ e, portanto:

$$V \subseteq \bigcup_{\substack{U \text{ conexo} \\ x \in U}} U = \bigcup \mathcal{V} = C(x)$$

logo $V \subseteq C(x)$. □

Teorema 3.302. *O conjunto das componentes conexas de um espaço métrico* (M, d), $\mathcal{C}(M) = \{C(x) \mid x \in M\}$, *é uma partição de* M, *ou seja:*

(i) *Se* $C(x) \neq C(y)$, *então* $C(x) \cap C(y) = \varnothing$;

(ii) *Tem-se* $M = \bigcup_{x \in M} C(x) = \bigcup \mathcal{C}(M)$.

Demonstração. Ad **(i)**: [contraposição] Se $C(x) \cap C(y) \neq \varnothing$, então pela **Proposição 3.268**, $C(x) \cup C(y)$ também será conexo.

Pela **Proposição 3.301**, $C(x)$ é o maior subconjunto conexo de M que contém x, e como $C(x) \cup C(y)$ também é um conexo que contém x, vale $C(x) \cup C(y) \subseteq C(x)$, ou seja, $C(y) \subseteq C(x)$.

Pela **Proposição 3.301**, $C(y)$ é o maior subconjunto conexo de M que contém y, e como $C(x) \cup C(y)$ também é um conexo que contém y, vale $C(x) \cup C(y) \subseteq C(y)$, ou seja, $C(x) \subseteq C(y)$.

Daí se conclui que $C(x) = C(y)$.

Ad **(ii)**: É trivialmente válido, uma vez que dado $x \in M$, $\{x\}$ é um conjunto conexo que contém x, de modo que $\{x\} \subset C(x)$, e portanto:

$$x \in \{x\} \subset \bigcup \mathcal{V} = C(x).$$

□

Portanto, efetivamente, a coleção dos subconjuntos $C(x), x \in M$ forma uma partição de M.

Proposição 3.303. *As componentes conexas de um espaço são todas fechadas.*

Demonstração. Sejam (M, d) um espaço métrico, $x \in M$ e $C(x)$ a componente conexa de x. Como o fecho de um conjunto conexo é também conexo, segue que $\text{Cl.}(C(x))$ é conexo e, é claro, $x \in \text{Cl.}(C(x))$. No entanto, como $C(x)$ é o maior conexo que contém x, segue que $\text{Cl.}(C(x)) \subseteq C(x)$. Segue, portanto, que $\text{Cl.}(C(x)) = C(x)$, e $C(x)$ é fechado. □

Sumarizando, temos a seguinte:

Proposição 3.304. *As componentes conexas de um espaço métrico* (M, d) *são subconjuntos não vazios, conexos, maximais quanto à conexidade, fechados e a coleção dessas componentes constitui uma partição de* M.

Assim, um espaço métrico qualquer pode ser decomposto como a reunião disjunta de seus subconjuntos conexos maximais:

$$M = \bigsqcup_{x \in M} C(x)$$

Para finalizar nosso estudo da conexidade, apresentamos o seguinte resultado que nos mostra que a quantidade de componentes conexas se mantém inalterada sob homeomorfismos, ou seja, é um invariante topológico:

Teorema 3.305. *A quantidade de componentes conexas de um espaço métrico (M, d), que denotaremos por* nc. (M), *é um invariante topológico, ou seja, é preservada por homeomorfismos.*

Demonstração. Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \to N$ um homeomorfismo. Sejam $\mathcal{C}(M)$ e $\mathcal{C}(N)$ os conjuntos das componentes conexas de M e de N, respectivamente.

Note que, dado qualquer $C \in \mathcal{C}(M)$, como f é contínua e C é conexo, segue que $f[C]$ é conexo em N. Desta forma, $f[C]$ está contido em alguma (única) componente conexa de N.

De fato, sejam $D_1, D_2 \in \mathcal{C}(N)$ tais que $\varnothing \neq f[C] \subset D_1 \cap D_2$. Como D_1 e D_2 são conexos tais que $D_1 \cap D_2 \neq \varnothing$, segue da **Proposição 3.268** que $D_1 \cup D_2$ é conexo. Mas como $D_1 \subseteq D_1 \cup D_2$ e $D_2 \subseteq D_1 \cup D_2$, da maximalidade de D_1 e de D_2 (com respeito à conexidade) segue que $D_1 = D_2$.

Seja, portanto, $D \in \mathcal{C}(N)$ a (única) componente conexa de N tal que $f[C] \subset D$.

Como f é bijetora, tem-se $f^{\dashv}[f[C]] = C$, de modo que:

$$f[C] \subset D \iff C \subseteq f^{\dashv}[D] = f^{-1}[D]$$

Pela maximalidade de C (enquanto componente conexa de M), segue que $C \subseteq f^{\dashv}[D] \Rightarrow C = f^{\dashv}[D]$.

Logo, $f[C] = f[f^{\dashv}[D]] = D$, ou seja, $f[C]$ é uma componente conexa de N.

Isto nos motiva a definir a seguinte função *induzida*:

$$\begin{array}{rccc} \bar{f}: & \mathcal{C}(M) & \to & \mathcal{C}(N) \\ & C & \mapsto & f[C] \end{array}$$

que, como vimos, faz corresponder a cada componente conexa de M uma única componente conexa de N.

Note que $\bar{f}$ é injetora: se $C_1, C_2 \in \mathcal{C}(M)$ são tais que $\bar{f}(C_1) = f[C_1] = f[C_2] = \bar{f}(C_2)$, como f é bijetora,

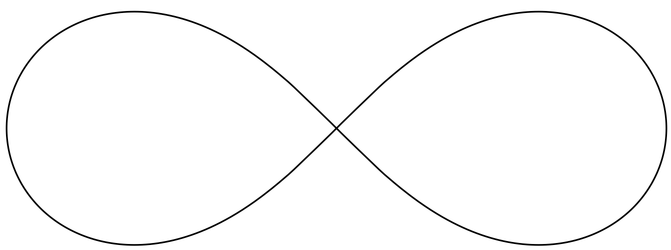
$$f[C_1] = f[C_2] \Rightarrow f^{-1}[f[C_1]] = f^{-1}[f[C_2]] \Rightarrow C_1 = C_2.$$

Ademais, $\bar{f}$ é sobrejetora: dada uma componente conexa $D \in \mathcal{C}(N)$, sendo f^{-1} contínua e bijetora, pode-se demonstrar que $f^{-1}[D] \in \mathcal{C}(M)$ (de modo análogo ao que fizemos para f). Logo, dado $D \in \mathcal{C}(N)$ existe $C = f^{-1}[D] \in \mathcal{C}(M)$ tal que $\bar{f}(C) = f[C] = f[f^{-1}[D]] = D$.

Logo, se (M, d_M) é homeomorfo a (N, d_N), então $\bar{f} : \mathcal{C}(M) \to \mathcal{C}(N)$ é uma bijeção, de modo que $\text{nc.}\,(M) = \sharp\mathcal{C}(M) = \sharp\mathcal{C}(N) = \text{nc.}\,(N)$. $\square$

O resultado acima é frequentemente usado em sua forma contrapositiva: se (M, d_M) e (N, d_N) forem espaços métricos tais que $\text{nc.}\,(M) \neq \text{nc.}\,(N)$, então M e N *não* são homeomorfos, como veremos abaixo:

Exemplo 3.306. *Com a teoria desenvolvida até agora já podemos deduzir que* $\mathbb{S}^1$ não *é homeomorfo à lemniscata* $\mathcal{L}$*:*



Com efeito, se $\mathbb{S}^1$ *fosse homeomorfa a* $\mathcal{L}$*, então pelo* ***Teorema 3.226****, ao removermos o ponto nodal de* $\mathcal{L}$ *e o respectivo ponto de* $\mathbb{S}^1$ *obteríamos espaços homeomorfos. No entanto, ao remover o ponto nodal de* $\mathcal{L}$ *obtemos um espaço com duas componentes conexas, enquanto que removendo o ponto correspondente de* $\mathbb{S}^1$ *obtemos um espaço homeomorfo a* $\mathbb{R}$ *– ou seja, com apenas uma componente conexa, o que é absurdo.*

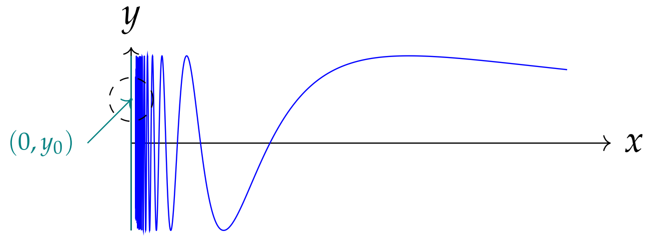
Atenção: (M, d) conexo $\not\Rightarrow$ (M, d) conexo por caminhos.

Exemplo 3.307. *Em* $(\mathbb{R}^2, d_E)$*,em que* $d_E((x,y),(z,w)) = \sqrt{(z-x)^2 + (w-y)^2} = \|(z,w) - (x,y)\|$*, considere os seguintes subespaços:*

$$Y = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \leq y \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$Z = \left\{\left(x, \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x \leq 1\right\} \subseteq \mathbb{R}^2$$

e tome $X = Y \cup Z$*, munido da métrica induzida de* $\mathbb{R}^2$*.*



Note que Z é conexo, uma vez que é imagem do conjunto $]0,1]$ pela função contínua:

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \rightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & x & \mapsto & \left(x, \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)\right) \end{array}$$

Afirmação 1: $\mathrm{Cl.}(Z) = Z \cup Y = X$.

Dado $(x, y) \in X = Y \cup Z$, se $(x, y) \in Z$ então $(x, y) \in \mathrm{Cl.}(Z)$. Suponhamos, portanto, $(x, y) \in Y$, de modo que $x = 0$ e $y \in [-1, 1]$. Denotaremos este ponto por $(0, y_0)$ (onde $-1 \leq y_0 \leq 1$).

Caso 1: *$y_0 = 0$. Neste caso, dado $\delta > 0$ basta tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{\delta} < n$, e teremos $\left(\frac{1}{n}, 0\right) \in B((0,0), \delta) \cap Z$;*

Caso 2: *$y_0 \neq 0$. Neste caso, dado $\delta > 0$, basta tomarmos $n \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi}{\delta} - \arcsin(y_0)\right) < n$$

e teremos:

$$\left(\frac{\pi}{\arcsin(y_0) + 2 \cdot n \cdot \pi}, y_0\right) \in B((0, y_0), \delta) \cap Z$$

*Desta forma, fica estabelecido que $Y \subset \mathrm{Cl.}(Z)$. Como $Z \subset \mathrm{Cl.}(Z)$ e $Y \subset \mathrm{Cl.}(Z)$, segue que $Z \subset X = Z \cup Y \subset \mathrm{Cl.}(Z)$. Pela **Proposição 3.274**, como $Z \subset X \subset \mathrm{Cl.}(Z)$ e Z é conexo, segue que X é conexo.*

Afirmação 2: *X não é conexo por caminhos.*

De fato, dados um ponto de Y e um ponto de Z, não existe nenhum caminho que os une. Mostraremos isto argumentando que qualquer caminho que contenha um ponto de Y deverá estar inteiramente contido em Y, não podendo, portanto, conter nenhum ponto de Z.

Sejam $(0, y) \in Y$ e:

$$\begin{array}{rccc} \alpha: & [0,1] & \rightarrow & X \\ & t & \mapsto & \alpha(t) \end{array}$$

um caminho tal que $\alpha(0) = (0, y)$. *Sendo* $Y \subset \mathbb{R}^2$ *fechado e* α *contínua, tem-se que* $\alpha^{\dashv}[Y] \subset [0,1]$ *é fechado.*

Uma vez que $0 \in \alpha^{\dashv}[Y]$, $\alpha^{\dashv}[Y] \neq \varnothing$. *Assim, se demonstrarmos que* $\alpha^{\dashv}[Y] \subset [0,1]$ *é simultaneamente aberto e fechado, como* $[0,1]$ *é conexo, concluiremos que* $\alpha^{\dashv}[Y] = [0,1]$, *de modo que* $\alpha[[0,1]] \subset Y$.

Dado $t_0 \in \alpha^{\dashv}[Y]$, *como* α *é contínua em* t_0, *dado* $\varepsilon = \frac{1}{2}$ *existirá* $\delta > 0$ *tal que:*

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow \|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| < \frac{1}{2} \Rightarrow \|\alpha(t) - \alpha(t_0)\| \leq \frac{1}{2}$$

Note que $B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right] \cap X$ *consiste de um intervalo fechado no eixo* y *juntamente com "segmentos" da curva* $y = \sin\left(\frac{\pi}{x}\right)$ *– cada um dos quais homeomorfo a um intervalo fechado.*

Além disso, quaisquer dois destes conjuntos são disjuntos um do outro em $B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right] \cap X$. *Segue disto que* $B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right] \cap Y$ *é uma componente conexa de* $B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right] \cap X$. *Uma vez que* $\alpha(t_0) \in B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right] \cap Y$ *e* $\alpha[]t_0 - \delta, t_0 + \delta[]$ *é um conexo (imagem de conexo por uma função contínua) que contém* $\alpha(t_0)$, *deve-se ter, pela maximalidade da componente conexa que contém* $\alpha(t_0)$, $\alpha[]t_0 - \delta, t_0 + \delta[] \subset B\left[\alpha(t_0), \frac{1}{2}\right]$. *Assim, como para todo* $t_0 \in \alpha^{\dashv}[Y]$ *existe* $\delta > 0$ *tal que* $]t_0 - \delta, t_0 + \delta[\subset \alpha^{\dashv}[Y]$, *segue que* $\alpha^{\dashv}[Y]$ *é também aberto em* $[0,1]$. *Como* $\alpha^{\dashv}[Y]$ *é um aberto fechado não-vazio do espaço conexo* $[0,1]$, *segue que* $\alpha^{\dashv}[Y] = [0,1]$, *de modo que toda a imagem de* $[0,1]$ *por* α *está, na verdade, contida em* Y. *Assim, nenhum caminho que contenha um ponto de* Y *pode conter um ponto de* Z.

Exercícios sobre Conjuntos Conexos

8.1 Mostrar que $(\mathbb{R}^*, d)$,em que d é a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$, é desconexo.

8.2 Mostrar que $[0,1] \cup [2,3]$ é desconexo;

8.3 Mostrar que se $f : [a,b] \to [c,d]$ é uma função contínua e estritamente crescente tal que $f(a) = c$ e $f(b) = d$, então f é um homeomorfismo.

8.4 Mostrar que uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$ é contínua se, e somente se, f é constante;

8.5 Mostrar que $\mathbb{S}^1 \setminus \{(0,1)\}$ é conexo;

8.6 Sejam (M, d) um espaço métrico, $A, B \subset M$ partes conexas de M tais que $\mathrm{Cl.}\,(A) \cap B \neq \varnothing$. Mostrar que $A \cup B$ é conexo.

8.7 Mostrar que $\mathbb{S}^1$ *não* é homeomorfa a nenhum subconjunto de $\mathbb{R}$; **Dica:** use a conexidade e o **Teorema 338**.

8.8 Mostrar que o cilindro $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1\}$ é conexo.

8.9 Mostrar que $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ é conexo por caminhos;

8.10 Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e $f : M \twoheadrightarrow N$ uma sobrejeção contínua. Mostrar que se M é conexo por caminhos então N é conexo por caminhos.

3.24 Completude

3.24.1 Sequências de Cauchy

Vejamos uma propriedade importante das sequências convergentes. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência convergente em um espaço métrico (M, d) e $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$, então dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como, porém:

$$d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_n)$$

então:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) \leq d(x_m, \bar{x}) + d(\bar{x}, x_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim, obtivemos uma condição sobre os termos da sequência na qual não intervém o limite, $\bar{x}$ dessa sequência. Intuitivamente, essa condição significa que as distâncias entre os termos da sequência se tornam arbitrariamente pequenas, para índices convenientemente grandes.

Definição 3.308 (sequência de Cauchy). *Seja (M, d) um espaço métrico. Uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ é uma* ***sequência de Cauchy*** *se, para todo $\varepsilon > 0$ existir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:*

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Sumarizamos, abaixo, o resultado que demonstramos na introdução deste tópico:

Proposição 3.309. *Toda sequência convergente de um espaço métrico é uma sequência de Cauchy.*

É important(íssimo) observar que a recíproca da proposição acima é falsa. Considere, em $(\mathbb{Q}, d)$,em que $d(x, y) = |x - y|$, a sequência construída recursivamente como segue:

$$\begin{aligned} x: \quad \mathbb{N} &\to \mathbb{Q} \\ n &\mapsto \begin{cases} 2, & \text{se } n = 1 \\ \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right), & \text{se } n > 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$, $x_n + \dfrac{2}{x_n} \neq 0$, sendo x_n racional e como:

$$x_{n+1}^2 = \frac{1}{4} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right)^2 = \overbrace{\frac{1}{4} \cdot \left(x_n - \frac{2}{x_n}\right)^2}^{>0} + 2$$

segue que $(\forall n \in \mathbb{N})(x_n^2 > 2)$. Assim, para todo $n \geq 1$, tem-se:

$$\frac{2}{x_n} < \frac{x_n^2}{x_n}$$

e portanto:

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) < \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{x_n^2}{x_n}\right) = x_n$$

Segue daí que $(\forall n \in \mathbb{N})(x_{n+1} < x_n)$, de modo que:

$$x_1 > x_2 > x_3 > \cdots > x_n > \cdots > 1,$$

e por ser uma sequência de números reais estritamente decrescente e limitada inferiormente, converge (em $\mathbb{R}$) para o ínfimo de seus valores, que denominaremos por $\bar{x}$. Assim,

$$\bar{x} = \lim_{n \to \infty} x_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}}\right)$$

Chegamos à equação:

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \cdot \left(\bar{x} + \frac{2}{\bar{x}}\right)$$

cuja solução é $\bar{x} \in \mathbb{R}_+$ tal que $\bar{x}^2 = 2$, portanto $\bar{x} \notin \mathbb{Q}$, ou seja, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ não converge em $\mathbb{Q}$.

Proposição 3.310. *Seja $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy num espaço vetorial normado $\mathcal{V} = (V, +, \cdot, \|\cdot\|)$. Então existe uma bola aberta de centro no vetor nulo que contém todos os termos da sequência.*

Demonstração. Sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, dado $\varepsilon = 1$ existe um índice $n_0(1) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(1) \Rightarrow d_{\|\cdot\|}(x_m, x_n) = \|x_m - x_n\| < 1.$$

Em particular, para todo $m \geq n_0(1)$ tem-se:

$$\|x_m - x_{n_0(1)}\| < 1.$$

Mas:

$$\|x_m\| = \|x_m - x_{n_0(1)} + x_{n_0(1)}\| \leq \|x_m - x_{n_0(1)}\| + \|x_{n_0(1)}\| < 1 + \|x_{n_0(1)}\|$$

e portanto, para todo $m \geq n_0(1)$ tem-se:

$$\|x_m\| < 1 + \|x_{n_0(1)}\|$$

Seja $\lambda = \max\{\|x_1\|, \cdots, \|x_{n_0(1)-1}\|, 1 + \|x_{n_0(1)}\|\}$. Tem-se, assim:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(d_{\|\cdot\|}(x_n, 0) = \|x_n - 0\| = \|x_n\| < \lambda)$$

o que prova que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(x_n \in B(0, \lambda)).$$

□

Atenção: $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ limitada $\not\Rightarrow$ $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de Cauchy. De fato, a sequência $(1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots)$, embora limitada, não é de Cauchy porque, tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, para qualquer que seja $n_0 \in \mathbb{N}$ sempre existem índices $m, n \geq n_0$ tais que $d(x_m, x_n) = 1 > \varepsilon$.

Exemplo 3.311. *A sequência dada por:*

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n},$$

por não ser limitada, não é uma sequência de Cauchy.

Proposição 3.312. *Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em um espaço métrico (M, d). Se existe uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, digamos $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, que converge para um ponto $\bar{x} \in M$, então $x_n \to \bar{x}$.*

Demonstração. Como a subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ converge para $\bar{x}$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$k \geq k_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_{n_k}, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por outro lado, sendo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, existe um índice $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Seja $N_0(\varepsilon) = \max\{n_{k_0(\varepsilon)}, n_0(\varepsilon)\}$. Fixando $m_k > N_0(\varepsilon)$, segue que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(n \geq N_0(\varepsilon)) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) \leq d(x_n, x_{m_k}) + d(x_{m_k}, \bar{x}) < \varepsilon$$

Desta forma, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $N_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq N_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

e portanto $x_n \to \bar{x}$. □

O resultado acima é particularmente útil em sua forma contrapositiva:

Corolário 3.313. *Se uma sequência de pontos em um espaço métrico contém duas subsequências que convergem para pontos diferentes desse espaço, então a sequência não é de Cauchy.*

Proposição 3.314. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e seja $f : M \to N$ uma função uniformemente contínua. Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_M), então $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (N, d_N).*

Demonstração. Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $f : M \to N$ é uniformemente contínua, para este $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$(\forall x \in M)(\forall y \in M)(d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \varepsilon)$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, dado este $\delta > 0$, existirá algum $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\delta) \Rightarrow d_M(x_m, x_n) < \delta.$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, tomando $n_0(\delta(\varepsilon)) \in \mathbb{N}$ construído acima, teremos:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow d_M(x_m, x_n) < \delta)$$

e como:

$$d_M(x_m, x_n) < \delta \Rightarrow d_N(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon$$

segue que:

$$(\forall m \in \mathbb{N})(\forall n \in \mathbb{N})(m, n \geq n_0(\delta(\varepsilon)) \Rightarrow d_N(f(x_m), f(x_n)) < \varepsilon)$$

de modo que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. □

Atenção: uma função apenas contínua pode não transformar uma sequência de Cauchy do domínio em uma sequência de Cauchy do contradomínio. Considere a função contínua:

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \frac{1}{x} \end{array}$$

que transforma a sequência de Cauchy $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ na sequência $(1, 2, 3, 4, \cdots, n, \cdots)$, que não é de Cauchy (a distância entre seus termos é sempre maior ou igual 1).

O fato do atributo "ser sequência de Cauchy" *não* ser preservado por funções contínuas nos diz que "ser sequência de Cauchy" não é um invariante topológico. Esta propriedade se mantém apenas sob homeomorfismos uniformes.

Corolário 3.315. *Sejam M um conjunto e $d_1, d_2 : M \times M \to \mathbb{R}_+$ duas métricas **uniformemente** equivalentes. Então as sequências de Cauchy de (M, d_1) são as mesmas que as de (M, d_2).*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (M, d_1). Como, por definição, $\mathrm{id}_M^{1\to 2} : (M, d_1) \to (M, d_2)$ é uniformemente contínua, segue que $(\mathrm{id}_M^{1\to 2}(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_2).

Reciprocamente, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em (M, d_2). Como, por definição, $\mathrm{id}_M^{2\to 1} : (M, d_2) \to (M, d_1)$ é uniformemente contínua, segue que $(\mathrm{id}_M^{2\to 1}(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_1). □

Observe que a recíproca da **Proposição 3.314** é falsa.

De fato, a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$$

transforma sequências de Cauchy em sequências de Cauchy: de fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é <u>limitada</u>, de modo que existe $K > 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < K)$$

Mas $f \restriction_{]-K,K[} :]-K,K[\to \mathbb{R}$ é lipschitziana, e portanto uniformemente contínua em $]-K,K[$. Segue, portanto, que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} = (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$. Não obstante, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ não é uniformemente contínua.

Proposição 3.316. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e considere $(M \times N, d)$,em que d é qualquer uma das métricas equivalentes de que se pode munir o produto $M \times N$. Uma sequência de pares $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \in (M \times N)^{\mathbb{N}}$ é de Cauchy se, e somente se, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in N^{\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy.*

Demonstração. Vamos fazer esta demonstração para o caso em que d é a métrica da soma. Como as outras métricas lhe são uniformemente equivalentes, seguirá a validade do resultado para qualquer uma das três métricas usuais do produto.

($\Rightarrow$) Seja $\varepsilon > 0$. Como $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d((x_m, y_m), (x_n, y_n)) = d_M(x_m, x_n) + d_N(y_m, y_n) < \varepsilon$$

ou seja,

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_M(x_m, x_n) < \varepsilon$$

e

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_N(y_m, y_n) < \varepsilon$$

de modo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são ambas sequências de Cauchy.

($\Leftarrow$) Seja $\varepsilon > 0$ dado. Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d_M(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Como $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow d_N(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Considerando $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, teremos:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d((x_m, y_m), (x_n, y_n)) = d_M(x_m, x_n) + d_N(y_m, y_n) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

e portanto $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(M \times N, d)$. $\square$

A generalização do resultado acima para um produto $M = M_1 \times \cdots \times M_n$ ($n \geq 1$) pode ser feita por indução.

3.24.2 Espaços Métricos Completos

Vimos na seção anterior que existem sequências de Cauchy em $\mathbb{Q}$ que não convergem neste espaço. É o caso da sequência definida por $x_1 = 2$ e, para $n > 1$, $x_{n+1} = \frac{1}{2} \cdot \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right)$, que converge para $\sqrt{2}$, que não é um número racional, embora todos os termos de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sejam racionais.

Veremos, a seguir, que no espaço métrico $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x,y) = |y - x|$, este tipo de coisa não ocorre.

Proposição 3.317. *Toda sequência de Cauchy, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$, em $\mathbb{R}$ converge para algum ponto $\bar{x} \in \mathbb{R}$.*

Demonstração. Pela **Proposição 3.310**, sendo $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy, existe $K > 0$ tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(|x_n| < K)$$

Assim, para cada $m \in \mathbb{N}$, a $m-$ésima cauda da sequência:

$$X_m = \{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$$

é um conjunto limitado, em particular limitado inferiormente. Desta forma, para todo $m \in \mathbb{N}$, existe $y_m = \inf X_m = \inf\{x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, \cdots\}$.

Naturalmente:

$$y_1 \leq y_2 \leq y_3 \leq \cdots \leq y_n \leq \cdots \leq K$$

Como $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência monótona, não-decrescente e limitada superiormente, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge para $\bar{x} = \sup\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \liminf x_n \in \mathbb{R}$[6].

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer dado.

Como $y_n \to \bar{x}$, dado $\varepsilon/3 > 0$ existe $n_1(\varepsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon/3) \Rightarrow |y_n - \bar{x}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é, por hipótese, uma sequência de Cauchy, dado $\frac{\varepsilon}{3} > 0$ existe $n_2(\varepsilon/3) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_2(\varepsilon/3) \Rightarrow |x_m - x_n| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

[6] consequência do axioma do supremo.

Seja $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon/3), n_2(\varepsilon/3)\}$. Tendo em conta que:

$$y_{n_0(\varepsilon)} = \inf\{x_{n_0(\varepsilon)}, x_{n_0(\varepsilon)+1}, \cdots\}$$

dado $\varepsilon/3 > 0$ existe $\ell \geq n_0(\varepsilon)$ tal que:

$$y_{n_0(\varepsilon)} \leq x_\ell < y_{n_0(\varepsilon)} + \frac{\varepsilon}{3}$$

e portanto:

$$|x_\ell - y_{n_0(\varepsilon)}| < \frac{\varepsilon}{3}$$

Assim, para todo $n > n_0(\varepsilon)$ temos:

$$|x_n - \bar{x}| \leq |x_n - x_\ell| + |x_\ell - y_{n_0(\varepsilon)}| + |y_{n_0(\varepsilon)} - \bar{x}| < \varepsilon$$

e portanto $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$. □

Definição 3.318 (espaço métrico completo). *Um espaço métrico (M, d) é **completo** se toda sequência de Cauchy deste espaço convergir para algum ponto de M.*

Assim, podemos dizer, já usando a terminologia da definição acima, que o espaço $(\mathbb{Q}, d)$ não é completo, enquanto que $(\mathbb{R}, d)$ é completo.

Proposição 3.319. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos e considere $(M \times N, d)$,em que d é qualquer uma das métricas equivalentes de que se pode munir o produto $M \times N$. O espaço $(M \times N, d)$ é completo se, e somente se, (M, d_M) e (N, d_N) forem completos.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em (M, d_M), então para cada $y_0 \in N$, $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$. Com efeito, dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d((x_m, y_0), (x_n, y_0)) = d_M(x_m, x_n) + d_N(y_0, y_0) = d_M(x_m, x_n) < \varepsilon$$

Portanto, $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e $(M \times N, d)$ é, por hipótese, completo, segue que $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para algum ponto $(\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$. Afirmamos que $\bar{y} = y_0$.

Mas, de fato, como $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, \bar{y})$, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d((x_n, y_0), (\bar{x}, \bar{y})) = d_M(x_n, \bar{x}) + d_N(y_0, \bar{y}) < \varepsilon$$

e, em particular,

$$d_N(y_0, \bar{y}) < \varepsilon$$

Como tem-se:

$$(\forall \varepsilon > 0)(d_N(y_0, \bar{y}) < \varepsilon)$$

segue que $d_N(y_0, \bar{y}) = 0$, e como d_N é métrica, segue que $y_0 = \bar{y}$. Assim, $((x_n, y_0))_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $(\bar{x}, y_0) \in M \times N$. Segue daí que, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d((x_n, y_0), (\bar{x}, y_0)) = d_M(x_n, \bar{x}) < \varepsilon$$

Assim,

$$x_n \to \bar{x},$$

ou seja, a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $\bar{x} \in M$.

A prova de que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge se faz de modo análogo, e deixamos como exercício.

$(\Leftarrow)$ Se $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $M \times N$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em M e em N, respectivamente. Como (M, d_M) e (N, d_N) são ambos completos, existem $\bar{x} \in M$ e $\bar{y} \in N$ tais que $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$.

Seja $\varepsilon > 0$ qualquer. Como $x_n \to \bar{x}$, para o número $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow d_M(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$.

Como $y_n \to \bar{y}$, para o número $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ existe $n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) \Rightarrow d_N(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Considerando $n_0(\varepsilon) = \max\left\{n_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right), n_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)\right\}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d((x_n, y_n), (\bar{x}, \bar{y})) = d_M(x_n, \bar{x}) + d_N(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Segue, assim, que $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}} \to (\bar{x}, \bar{y}) \in M \times N$.

Como $((x_n, y_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy qualquer em $(M \times N, d)$, segue que toda sequência de Cauchy do produto converge. Logo $(M \times N, d)$ é completo. □

O resultado acima pode ser facilmente generalizado para qualquer produto finito de espaços métricos. Em particular, temos o seguinte:

Corolário 3.320. *Para todo $n \in \mathbb{N}$, $(\mathbb{R}^n, d)$,em que $d \in \{d_E, d_S, d_M\}$, é completo.*

Teorema 3.321. *Todo espaço métrico (M, d) compacto é completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em um espaço métrico compacto (M,d). Da compacidade de (M,d) segue que existe uma subsequência $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para algum ponto $\bar{x}\in M$.

Pela **Proposição 3.312**, segue que $x_n \to \bar{x}$, de modo que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $\bar{x}\in M$. Logo, (M,d) é completo. □

Atenção: (M,d) completo $\not\Rightarrow$ (M,d) compacto. O espaço $(\mathbb{R},d)$, $d(x,y)=|y-x|$, conforme já vimos, é completo mas não é compacto.

Atenção: (M,d) conexo $\not\Rightarrow$ (M,d) completo. Considere, por exemplo, o intervalo $]0,1]$ é conexo, mas não é completo, uma vez que a sequência $\left(\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}} \in]0,1]^{\mathbb{N}}$, apesar de ser de Cauchy, não converge.

Atenção: (M,d) completo $\not\Rightarrow$ (M,d) conexo. De fato, seja M um conjunto qualquer com mais de dois pontos e $d_{0-1}: M\times M \to \mathbb{R}_+$ a métrica zero-um. Apesar de (M,d_{0-1}) ser completo, M é desconexo (pois dado qualquer $x_0\in M$, $M=\{x_0\}\cup M\setminus\{x_0\}$ é uma cisão não-trivial de M).

Proposição 3.322. *Seja (M,d) um espaço métrico completo. Se $F\subset M$ for fechado, então $(F,d\restriction_{F\times F})$ é completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in F^{\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy. Como $F\subset M$, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in M^{\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Cauchy em M. Sendo (M,d) completo, existe $\bar{x}\in M$ tal que $x_n\to\bar{x}$. Mas isto implica que $\bar{x}\in \operatorname{Cl.}(F)$, e como F é fechado, $\bar{x}\in\operatorname{Cl.}(F)\subset F$. Segue, portanto, que F é completo. □

Proposição 3.323. *Seja (M,d) um espaço métrico. Dado $F\subset M$, se $(F,d\restriction_{F\times F})$ é completo então F é fechado.*

Demonstração. Mostraremos que $\operatorname{Cl.}(F)\subset F$.

Dado $x_0\in\operatorname{Cl.}(F)$, tem-se que para todo $\varepsilon>0$, $B(x_0,\varepsilon)\cap F\neq\varnothing$. Deste modo, dado $\varepsilon=1$, podemos escolher um único $x_1\in B(x_0,1)\cap F$, dado $\varepsilon=\frac{1}{2}$, podemos escolher um único $x_2\in B(x_0,1/2)\cap F$ e, sucessivamente, dado $\varepsilon=1/n$ podemos escolher um único $x_n\in B(x_0,1/n)\cap F$. Assim, se $x_0\in\operatorname{Cl.}(F)$, podemos construir uma sequência de elementos de F, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n\to x_0$. Uma vez que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, e posto que F é, por hipótese, completo, existe um elemento $\bar{x}\in F$ tal que $x_n\to\bar{x}$. Da unicidade do limite de uma sequência convergente, segue que $x_0=\bar{x}\in F$.

Como a demonstração acima vale para qualquer $x_0 \in \text{Cl.}(F)$, segue que $\text{Cl.}(F) \subset F$, e $F \subset X$ é fechado. $\square$

Corolário 3.324. *Seja (M, d) um espaço métrico completo. Tem-se que $F \subset M$ é fechado se, e somente se, $(F, d \restriction_{F \times F})$ é completo.*

Uma interessante caracterização de completude é dada a seguir:

Teorema 3.325. *Seja (M, d) um espaço métrico. Tem-se que (M, d) é completo se, e somente se, para qualquer cadeia infinita enumerável de subconjuntos limitados, fechados e não-vazios:*

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$$

com $\lim_{n\to\infty} \text{diam.}(F_n) = 0$ existir um único $\bar{x} \in M$ tal que:

$$\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

Demonstração. ($\Leftarrow$) [Estratégia da prova: contrapositiva] A fim de mostrar que a propriedade acima implica a completude, mostraremos que se (M, d) não é completo, ou seja, que se existe uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que não converge para nenhum ponto de M, então existe uma cadeia enumerável de subconjuntos limitados e fechados, $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tais que $\text{diam}(F_n) = 0$ e:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n = \varnothing.$$

De fato, se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, então para cada $n \in \mathbb{N}$, a $n-$ésima cauda de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $X_n = \{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$, é um conjunto limitado, e além disto, $\lim_{n\to\infty} \text{diam}(X_n) = 0$. De fato, para qualquer $n \in \mathbb{N}$, $X_n \supseteq X_{n+1}$, tem-se:

$$\text{diam}(X_{n+1}) = \sup\{d(x_i, x_j) \mid i, j \geq n+1\} \leq \sup\{d(x_i, y_i) \mid i, j \geq n\} = \text{diam}(X_n)$$

$$(\forall n \in \mathbb{N})(\text{diam}(X_{n+1}) \leq \text{diam}(X_n)). \tag{3.13}$$

Dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Por definição de supremo, segue que:

$$\text{diam}(X_{n_0(\varepsilon/2)}) = \sup\{d(x_m, x_n) \mid m, n \geq n_0(\varepsilon)\} \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Segue de (3.13) que se $n \geq n_0(\varepsilon/2)$, vale:

$$\text{diam}\,(X_n) \leq \text{diam}\,(X_{n_0(\varepsilon)}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

ou seja, tem-se:

$$\lim_{n\to\infty} \text{diam}\,(X_n) = 0.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *não* converge, para todo $n \in \mathbb{N}$, X_n *não* tem nenhum ponto de acumulação (logo cada X_n é discreto). Disto segue que X_n é fechado e não vazio para todo $n \in \mathbb{N}$.

Note, finalmente, que $(X_{n n\in\mathbb{N}}$, é uma cadeia de fechados limitados não-vazios de M tal que:

$$X_1 \supseteq X_2 \supseteq X_3 \supseteq \cdots \supseteq X_n \supseteq X_{n+1} \supseteq \cdots$$

e:

$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n = \varnothing$$

Justificativa: [contraposição] De fato, se existisse $\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} X_n$, então $\bar{x} \in X_n$ para todo n, e como $\lim_{n\to\infty} \text{diam}\,(X_n) = 0$, dado $\varepsilon = 1/k > 0$ poderíamos escolher algum $x_{n_k} \in X_n$ tal que $d(\bar{x}, x_{n_k}) < \frac{1}{k}$ – ou seja, poderíamos construir uma subsequência de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ que converge para $\bar{x}$. Disto seguiria, pela **Proposição 3.312**, que $x_n \to \bar{x}$.

Assim, se para *qualquer* cadeia infinita enumerável de subconjuntos limitados, fechados e não-vazios de M:

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$$

com $\lim_{n\to\infty} \text{diam.}\,(F_n) = 0$ existir um único $\bar{x} \in M$ tal que:

$$\bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$$

então (M, d) é completo.

$(\Rightarrow)$ Suponha, agora, que (M, d) seja completo, e seja $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma cadeia infinita enumerável de subconjuntos limitados, fechados e não-vazios de M:

$$F_1 \supseteq F_2 \supseteq F_3 \supseteq \cdots \supseteq F_n \supseteq F_{n+1} \supseteq \cdots$$

com $\lim_{n\to\infty} \text{diam.}\,(F_n) = 0$. Escolha, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in F_n$. Uma vez que $\lim_{n\to\infty} \text{diam}\,(F_n) = 0$, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy: de fato, dado $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \text{diam}\,(F_n) < \varepsilon$$

Desta forma, dados $m, n \geq n_0(\varepsilon)$ tem-se $x_m, x_n \in F_{n_0(\varepsilon)}$ e, portanto:

$$d(x_m, x_n) \leq \text{diam}\,(F_{n_0(\varepsilon)}) < \varepsilon.$$

Como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em um espaço métrico completo, segue que existe um único $\bar{x} \in M$ tal que $x_n \to \bar{x}$. Note que como cada F_n é fechado, $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ é fechado em M, de modo que $x_n \to \bar{x} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$.

Finalmente, provaremos [por absurdo] a unicidade do elemento de $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$: se existissem $\bar{x}, \bar{y} \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} F_n$ com $\bar{x} \neq \bar{y}$, então $d(\bar{x}, \bar{y}) > 0$, e como $\text{diam}\,(F_n) \to 0$, dado $\varepsilon = \dfrac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2} > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$\text{diam}\,(F_{n_0(\varepsilon)}) < \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2}$$

Uma vez que $\bar{x}, \bar{y} \in F_{n_0(\varepsilon)}$, teríamos:

$$d(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{d(\bar{x}, \bar{y})}{2}$$

o que é um absurdo.

□

3.24.3 Extensão de Funções Contínuas

Em muitos ramos da Matemática, é comum encontrar problemas do seguinte tipo: "seja M um conjunto e $X \subset M$. Dada uma função $f : X \to N$, é possível estender f a uma função $\widetilde{f} : M \to N$, ou seja, tal que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\widetilde{f}"] & N \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

comuta, mantendo as propriedades relevantes de f?".

Na Topologia, somos interessados em estender funções contínuas obtendo novas funções contínuas. Tratar este problema em toda sua generalidade é excessivamente complicado, não somente neste curso, mas em geral. No entanto, diversas teorias tratam do problema em situações particulares, e tanto a solução positiva como a demonstração da impossibilidade da solução em caso particular podem ser de grande utilidade.

Vejamos um exemplo: seja $X = \{0,1\} \subset [0,1] \subset \mathbb{R}$ (todos com a métrica induzida pela métrica usual de $\mathbb{R}$) e seja $\{a,b\}$ com $a \neq b$. Considerando a função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \{0,1\} & \to & \{a,b\} \\ & 0 & \mapsto & a \\ & 1 & \mapsto & b \end{array}$$

constatamos que f *não* pode ser estendida a uma função contínua $\widetilde{f}: [0,1] \to \{a,b\}$, pois $[0,1]$ é conexo e sua imagem por $\widetilde{f}$ deveria ser conexa.

Vamos concentrar nossa atenção no caso em que X é denso em um espaço métrico (M, d_M). Em geral, o problema não tem solução, como no caso em que $X =]0,1]$, $M = [0,1]$ e $f(x) = 1/x$. Uma vez que $\lim_{x \to 0_+} f(x) = \infty$, nenhum valor real para $\widetilde{f}(0)$ poderá fornecer uma extensão contínua de f.

De imediato, vemos que para pontos $x_0 \in X' \setminus X$ (que são necessariamente pontos de acumulação de X), devemos ter $\widetilde{f}(x_0) = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

Lema 3.326. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos quaisquer, e $f, g : M \to N$ duas funções contínuas. O conjunto:*

$$\operatorname{Coin}(f,g) = \{x \in M \mid f(x) = g(x)\}$$

é fechado em M.

Demonstração. Com efeito, uma vez que f e g são ambas funções contínuas, pela **Proposição 3.189** a função:

$$\begin{array}{rccc} h: & M & \to & N \times N \\ & x & \mapsto & (f(x), g(x)) \end{array}$$

é contínua. Como $\Delta_N = \{(y,y) \mid y \in N\} \subset N$ é fechado e h é contínua, segue que $h^{\dashv}[\Delta_N]$ é fechado em M. Como:

$$\operatorname{Coin}(f,g) = h^{\dashv}[\Delta_N],$$

segue que $\operatorname{Coin}(f,g)$ é fechado em M.

$\square$

Teorema 3.327. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos tais que (N, d_N) é completo, e seja $X \subset M$ denso. Se $f : X \to N$ é uma função uniformemente contínua, então existe uma única extensão contínua $\widetilde{f} : M \to N$. Ademais, $\widetilde{f}$ é uniformemente contínua.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\widetilde{f}"] & N \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Demonstração. Se $x \in X$, definimos obviamente $\widetilde{f}(x) = f(x)$. No entanto, se $x \in M \setminus X = \mathrm{Cl.}(X) \setminus X$, podemos construir uma sequência de pontos de X, digamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to x$. Sendo convergente, $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é de Cauchy, e como $f : X \to N$ é uniformemente contínua, segue que $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em N. Como (N, d_N) é completo, segue que existe um único $\bar{y} \in N$ tal que $f(x_n) \to \bar{y}$.

Observe que $\bar{y}$ *não* depende da escolha da sequência que converge para $\bar{x}$. De fato, se $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é *qualquer* outra sequência de elementos de X tal que $x'_n \to \bar{x}$, então $\lim_{n\to\infty} d_M(x_n, x'_n) = 0$. De fato, dado $\varepsilon > 0$, como $x_n \to \bar{x}$ existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d_M(x_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$ e como $x'_n \to \bar{x}$ existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow d_M(x'_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Assim, tomando $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$, tem-se:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_M(x_n, x'_n) \leq d_M(x_n, \bar{x}) + d_M(x'_n, \bar{x}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

ou seja, $\lim_{n\to\infty} d_M(x_n, x'_n) = 0$.

Como $\lim_{n\to\infty} d_M(x_n, x'_n) = 0$ e f é uniformemente contínua, segue que $\lim_{n\to\infty} d_N(f(x_n), f(x'_n)) = 0$.

Desta forma, dado qualquer $\varepsilon > 0$, existe $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_1(\varepsilon)$ implica $d_N(f(x_n), f(x'_n)) < \frac{\varepsilon}{2}$. Também, como $f(x_n) \to \bar{y}$, existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_2(\varepsilon)$ implica $d_N(f(x_n), \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$. Desta forma, dado $\varepsilon > 0$, basta tomarmos $n_0(\varepsilon) = \max\{n_1(\varepsilon), n_2(\varepsilon)\}$ para obter:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d_N(f(x'_n), \bar{y}) \leq d_N(f(x'_n), f(x_n)) + d_N(f(x_n), \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

de modo que $f(x'_n) \to \bar{y}$.

Definimos, portanto, $\widetilde{f}$ como segue:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & M & \to & N \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x), \text{ se } x \in X \\ \lim_{n\to\infty} f(x_n), \text{ se } x \in M \setminus X \text{ e } (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}} \text{ é tal que } x_n \to x \end{cases} \end{array}$$

Como, por hipótese, X é denso em M, a relação $\widetilde{f}$ é total, e portanto uma função.

Demonstremos, agora, que $\widetilde{f}$ é contínua.

Afirmação: dados $\bar{x} \in M$, $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$, existe $x_0 \in X$ tal que $d_M(\bar{x}, x_0) < \delta$ e $d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), f(x_0)) < \varepsilon$.

De fato, se $\bar{x} \in X$, basta tomar $x_0 = \bar{x}$. Se $\bar{x} \in \mathrm{Cl.}(X) \setminus X$, existe uma sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tal que $x_n \to \bar{x}$ e a sequência $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ converge, por definição, para $\widetilde{f}(\bar{x})$. Dado $\delta > 0$, como $x_n \to \bar{x}$, existe $n_0(\delta) \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0(\delta)$ então $d_N(x_n, \bar{x}) < \delta$. Como $f(x_n) \to \widetilde{f}(\bar{x})$, dado $\varepsilon > 0$ existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon)$ garante que $d_N(f(x_n), \widetilde{f}(\bar{x})) < \varepsilon$. Basta, portanto, tomar $x_0 = x_n \in X$ com $n \geq \max\{n_0(\delta), n_0(\varepsilon)\}$, e teremos:

$$d_M(\bar{x}, x_0) = d_M(\bar{x}, x_n) < \delta \text{ e } d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), f(x_0)) = d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), f(x_n)) < \varepsilon$$

Para mostrarmos, finalmente, que $\widetilde{f}$ é contínua, dado $\varepsilon > 0$, como $f : X \to N$ é uniformemente contínua existe $\delta > 0$ tal que para quaisquer $x, y \in X$, $d_M(x, y) < \delta \Rightarrow d_N(f(x), f(y)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Afirmamos que dados quaisquer $\bar{x}, \bar{y} \in M$ com $d_M(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\delta}{3}$, tem-se $d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), \widetilde{f}(\bar{y})) < \varepsilon$.

De fato, da afirmação acima aplicada a $\bar{x}, \frac{\delta}{3}, \frac{\varepsilon}{3}$ e a $\bar{y}, \frac{\delta}{3}, \frac{\varepsilon}{3}$, segue que existem $x_0, y_0 \in X$ tais que $d_M(\bar{x}, x_0) < \dfrac{\delta}{3}$ e $d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), f(x_0)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$, $d_M(\bar{y}, y_0) < \dfrac{\delta}{3}$ e $d_N(\widetilde{f}(\bar{y}), f(y_0)) < \dfrac{\varepsilon}{3}$. Resulta, assim, que:

$$d_M(\bar{x}, \bar{y}) < \frac{\delta}{3} \Rightarrow d_M(x_0, y_0) \leq d_M(x_0, \bar{x}) + d_M(\bar{x}, \bar{y}) + d_M(\bar{y}, y_0) < \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} + \frac{\delta}{3} = \delta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), \widetilde{f}(\bar{y})) \leq d_N(\widetilde{f}(\bar{x}), f(x_0)) + d_N(f(x_0), f(y_0)) + d_N(f(y_0), \widetilde{f}(\bar{y})) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Portanto, $\widetilde{f} : M \to N$ é uniformemente contínua.

$\widetilde{f}$ é a *única* função contínua que estende f para M: suponhamos que existisse $\widetilde{g} : M \to N$ contínua que também estendesse f. O conjunto $\mathrm{Coin}\,(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = \{\bar{x} \in M \mid \widetilde{f}(\bar{x}) = \widetilde{g}(\bar{x})\}$ é um fechado em M que contém X. Uma vez que X é denso em M e $\mathrm{Cl.}(X)$ é o *menor* fechado que contém X, segue que:

$$M = \mathrm{Cl.}(X) \subset \mathrm{Coin}\,(\widetilde{f}, \widetilde{g}) \subset M$$

ou seja, Coin $(\widetilde{f}, \widetilde{g}) = M$ e $\widetilde{f} = \widetilde{g}$.

□

Corolário 3.328. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos quaisquer, $X \subset M$ denso, $Y \subset N$ denso e $f : X \to Y$ um homeomorfismo uniforme. Se (M, d_M) e (N, d_N) forem completos, existe um único homeomorfismo uniforme $\widetilde{f} : M \to N$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\widetilde{f}"] & N \\ X \arrow[u, hook, "\iota_M^X"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "\iota_Y^N"'] \end{tikzcd}$$

Demonstração. Considere a função $\iota_Y^N \circ f : X \to N$, que por ser composição de funções uniformemente contínuas (ι_Y^N é imersão isométrica e f é uniformemente contínua, por hipótese), é uniformemente contínua. Como X é denso em M e N é completo, pelo **Teorema 3.327** existe uma única função uniformemente contínua $\widetilde{f} : M \to N$ tal que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\widetilde{f}"] & \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[r, "\iota_Y^N \circ f"'] & N \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, tal que $\widetilde{f} \circ \iota_X^M = \iota_Y^N \circ f$.

Seja $f^{-1} : Y \to X$ o inverso de $f : X \to Y$, que também é uma função uniformemente contínua, e considere $\iota_X^M \circ f^{-1} : Y \to M$, que é uniformemente contínua por ser composição de funções uniformemente contínuas (ι_Y^N é uniformemente contínua por ser uma imersão isométrica e $f^{-1} : Y \to X$ é uniformemente contínua por hipótese).

Como Y é denso em N e N é completo, segue do **Teorema 3.327** que existe uma única função uniformemente contínua $\widetilde{g} : N \to M$ tal que:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\widetilde{g}"] & \\ Y \arrow[u, hook, "\iota_Y^N"] \arrow[r, "\iota_X^M \circ f^{-1}"'] & M \end{tikzcd}$$

comuta, ou seja, tal que $\widetilde{g} \circ \iota_Y^N = \iota_X^M \circ f^{-1}$.

Note que $\mathrm{id}_M : M \to M$ é uma função uniformemente contínua tal que:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\mathrm{id}_M"] & \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[r, hook, "\iota_X^M"'] & M \end{tikzcd}$$

comuta. Observe, também, que para todo $x \in X$ temos:

$$(\widetilde{g} \circ \widetilde{f}) \circ \iota_X^M(x) = \widetilde{g} \circ (\widetilde{f} \circ \iota_X^M(x)) = \widetilde{g} \circ (\iota_Y^N \circ f)(x) = (\widetilde{g} \circ \iota_Y^N) \circ f(x) = \iota_X^M \circ f^{-1} \circ f(x) = \\ = \iota_X^M(x) = x$$

ou seja, $\widetilde{g} \circ \widetilde{f} : M \to M$ é uma função uniformemente contínua tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[dr, "\widetilde{g}\circ\widetilde{f}"] & \\ X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[r, hook, "\iota_X^M"'] & M \end{tikzcd}$$

comuta. Como existe apenas uma função uniformemente contínua que faz o diagrama comutar, segue que:

$$\widetilde{g} \circ \widetilde{f} = \mathrm{id}_M.$$

Note que $\mathrm{id}_N : N \to N$ é uma função uniformemente contínua tal que:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\mathrm{id}_N"] & \\ Y \arrow[u, hook, "\iota_Y^N"] \arrow[r, hook, "\iota_Y^N"'] & N \end{tikzcd}$$

comuta. Observe, também, que para todo $y \in Y$ temos:

$$(\widetilde{f} \circ \widetilde{g}) \circ \iota_Y^N(y) = \widetilde{f} \circ (\widetilde{g} \circ \iota_Y^N(y)) = \widetilde{f} \circ (\iota_X^M \circ f^{-1})(y) = (\widetilde{f} \circ \iota_X^M) \circ f^{-1}(y) = f \circ f^{-1}(y) = \\ = \iota_Y^N(y) = y$$

ou seja, $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} : N \to N$ é uma função uniformemente contínua tal que o diagrama:

$$\begin{tikzcd} N \arrow[dr, "\widetilde{f}\circ\widetilde{g}"] & \\ Y \arrow[u, hook, "\iota_Y^N"] \arrow[r, hook, "\iota_Y^N"'] & N \end{tikzcd}$$

comuta. Como existe apenas uma função uniformemente contínua que faz o diagrama comutar, segue que:

$$\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = \mathrm{id}_N.$$

Desta forma, $\widetilde{f} : M \to N$ é um homeomorfismo uniforme tal que $\widetilde{f} \circ \iota_X^M = \iota_Y^N \circ f$, como queríamos. $\square$

Corolário 3.329. *Sejam (M, d_M) e (N, d_N) espaços métricos quaisquer, $X \subset M$ denso, $Y \subset N$ denso e $f : X \to Y$ uma isometria. Se (M, d_M) e (N, d_N) forem completos, existe uma única isometria $\widehat{f} : M \to N$ tal que o seguinte diagrama comuta:*

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\widehat{f}"] & N \\
X \arrow[u, hook, "\iota_X^M"] \arrow[r, "f"] & Y \arrow[u, hook, "\iota_Y^N"']
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Note que, por ser isometria, $f : X \to Y$ é um homeomorfismo uniforme. Pelo **Corolário 3.328**, existe um único homeomorfismo uniforme $\widehat{f} : M \to N$ ta que $\iota_Y^N \circ \widehat{f} = f \circ \iota_X^M$. Basta mostrarmos que $\widehat{f}$ é uma isometria.

De fato, dados quaisquer $\bar{x}, \bar{y} \in M$, existem sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in X^{\mathbb{N}}$ tais que $x_n \to \bar{x}$ e $y_n \to \bar{y}$. Assim,

$$d_N(\widehat{f}(\bar{x}), \widehat{f}(\bar{y})) = d_N(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) \overset{d_N \text{ contínua}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{n\to\infty} d_N(f(x_n), f(y_n)) \overset{f \text{ isometria}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{n\to\infty} d_M(x_n, y_n) \overset{d_M \text{ contínua}}{\overset{\uparrow}{=}} d_M(\bar{x}, \bar{y})$$

$\square$

Observe que se não exigirmos que (N, d_N) seja completo, não podemos garantir uma extensão (sequer) contínua para $f : X \to N$, com X denso em M. Com efeito, a função $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}} : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ é uniformemente contínua, mas não admite nenhuma extensão contínua $\widetilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{Q}$, uma vez que as únicas funções contínuas de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{Q}$ são constantes.

Para encerrar esta seção, apresentamos um exemplo que põe em evidência o fato de que completude não é uma propriedade topológica.

Exemplo 3.330. *Sejam (M, d) um espaço métrico completo e $U \subset M$ um aberto. Mostraremos que U, embora seja* aberto, *é homeomorfo a um espaço métrico completo.*

Seja:

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & d(x, M \setminus U) \end{array}$$

Defina:

$$\begin{array}{rccc} \varphi: & U & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \dfrac{1}{d(x, M \setminus U)} \end{array}$$

Note que φ é uma função contínua, e que, para qualquer $x_0 \in \mathrm{Fr.}\,(U)$ tem-se:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{d(x, M \setminus U)} = \infty$$

O gráfico de φ, $\mathrm{Graf}\,(\varphi) = \{(x, \varphi(x)) \in M \times \mathbb{R} \mid x \in U\}$ é um subconjunto fechado de $M \times \mathbb{R}$, uma vez que $\mathrm{Graf}\,(\varphi) = \{(x, t) \in M \times \mathbb{R} \mid t \cdot f(x) = 1\} = \psi^{\dashv}[\{1\}]$,em que:

$$\begin{array}{rccc} \psi: & M \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (x, t) & \mapsto & t \cdot f(x) \end{array}$$

é uma função contínua (uma vez que o produto da projeção $\pi(x, t) = t$ (que é contínua) por f (que também é contínua) é contínua. Por ser um subconjunto fechado de um (produto de) espaço(s) métrico(s) completo(s), $M \times \mathbb{R}$, $\mathrm{Graf}\,(\varphi)$ é um espaço métrico completo – munido, é claro, da métrica induzida. É um fato de simples verificação que:

$$\begin{array}{rccc} \pi_U: & \mathrm{Graf}\,(\varphi) & \to & U \\ & (x, t) & \mapsto & x \end{array}$$

é um homeomorfismo.

3.25 O Completamento de Um Espaço Métrico

O espaço $(\mathbb{Q}, d)$, $d(x, y) = |y - x|$, não é completo, conforme já demonstramos. A construção de $\mathbb{R}$, a partir de $\mathbb{Q}$, representa o que se chama um "completamento de $\mathbb{Q}$". Intuitivamente, isso pode ser interpretado do seguinte modo: $\mathbb{R}$ é a "ampliação" de $\mathbb{Q}$ obtida acrescentando-se a este corpo os limites das sequências de Cauchy de números racionais que a ele ainda não pertençam. Além disto, vale a relação $\mathrm{Cl.}\,(\mathbb{Q}) = \mathbb{R}$.

Veremos, a seguir, que dado um espaço métrico é sempre possível "completá-lo", nos moldes acima.

Definição 3.331 (completamento). *Seja $\mathcal{M} = (M, d)$ um espaço métrico. Um* ***completamento*** *de $\mathcal{M}$ é um par $((\widehat{M}, \widehat{d}), f : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d}))$,em que $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é um espaço métrico completo, $f : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d})$ é uma imersão isométrica tal que* $\mathrm{Cl.}\,(f[M]) = \widehat{M}$.

Lema 3.332. *Seja (M, d) um espaço métrico. Se existe um subconjunto não-vazio, $X \subset M$ tal que* $\mathrm{Cl.}\,(X) = M$ *e toda sequência de Cauchy de pontos de X converge em M, então M é completo.*

Demonstração. Seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em M. Dado $\varepsilon > 0$, existe um $n_1(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_1(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{3}$$

Passo 1: construir, a partir de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, uma sequência de Cauchy de elementos de X.

Como X é denso em M, para qualquer $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in X$ tal que $d(x_n, y_n) < \dfrac{1}{n}$. Assim, tomando $n_0(\varepsilon) = \max\left\{\left\lceil\dfrac{3}{\varepsilon}\right\rceil, n_1(\varepsilon)\right\}$ teremos:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(y_m, y_n) \leq d(y_m, x_m) + d(x_m, x_n) + d(x_n, y_n) < \frac{1}{m} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{1}{n} <$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

o que mostra que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em X. Como, por hipótese, sequências de Cauchy de elementos de X convergem para algum elemento de M, existe $\bar{y} \in M$ tal que $y_n \to \bar{y}$.

Passo 2: mostrar que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para o mesmo elemento de M para o qual $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.

Mostraremos, agora, que $x_n \to \bar{y}$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $y_n \to \bar{y}$ existe $n_2(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_2(\varepsilon) \Rightarrow d(y_n, \bar{y}) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Tomando $n_0(\varepsilon) = \max\left\{n_2(\varepsilon), \left\lceil\dfrac{2}{\varepsilon}\right\rceil\right\}$, teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_n, \bar{y}) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, \bar{y}) < \frac{1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Assim, $x_n \to \bar{y}$. $\square$

Teorema 3.333. *Todo espaço métrico (M, d) admite um completamento.*

Demonstração. **Passo 1:** construiremos o espaço métrico $(\widehat{M}, \widehat{d})$.

Seja:

$$S = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in M^{\mathbb{N}} \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ é sequência de Cauchy de elementos de } M\}$$

e defina a relação:

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \iff \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$$

Observe que $\sim$ é uma relação de equivalência, pois:

$\sim$ é reflexiva, uma vez que para qualquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$, tem-se $\lim_{n\to\infty} d(x_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} 0 = 0$;

$\sim$ é simétrica, uma vez que para quaisquer $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in S$ tais que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tem-se $\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$, e da propriedade simétrica de d segue que:

$$\lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0,$$

de modo que $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

$\sim$ é transitiva, uma vez que dadas $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em S tais que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, tem-se, da Desigualdade Triangular, que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n))$$

de modo que pelo **Corolário 3.153**:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) = 0 + 0 = 0$$

donde $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (z_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definimos $\widehat{M} = \dfrac{S}{\sim}$.

Passo 2: construir uma função $f : M \to \widehat{M}$.

Vamos, agora, definir uma relação $f : M \to \widehat{M}$ como segue: dado qualquer $x \in M$, seja $(x)_{n\in\mathbb{N}} = (x, x, x, \cdots, x, \cdots)$ a sequência constante igual a x, que certamente é de Cauchy. Associamos a x, portanto, a classe de equivalência de $(x)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{rccc} f: & M & \to & \widehat{M} \\ & x & \mapsto & [(x)_{n\in\mathbb{N}}] \end{array}$$

Passo 3: Definir em $\widehat{M}$ uma métrica de tal forma que $f:(M,d)\to(\widehat{M},\widehat{d})$ seja uma imersão isométrica.

Dados $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]\in\widehat{M}$, tomemos um representante de cada classe, digamos $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e consideremos:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)$$

Afirmação 1: A relação $\widehat{d}=\{(([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]),\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n))\in(\widehat{M}\times\widehat{M})\times\mathbb{R}_+ \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S\}\subset(\widehat{M}\times\widehat{M})\times\mathbb{R}_+$ é <u>total</u>.

De fato, dado qualquer par $([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}])\in\widehat{M}\times\widehat{M}$, quaisquer representantes $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ das classes $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ são sequências de Cauchy, $\{x_n \mid n\in\mathbb{N}\}\cup\{y_n \mid n\in\mathbb{N}\}\subset M$ é um conjunto limitado. Também, como para todo $n\in\mathbb{N}$, $d(x_n,y_n)\geq 0$, do **Corolário 3.153** segue que $\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)\geq 0$.

Afirmação 2: A relação $\widehat{d}=\{(([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]),\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n))\in(\widehat{M}\times\widehat{M})\times\mathbb{R}_+ \mid (x_n)_{n\in\mathbb{N}},(y_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S\}\subset(\widehat{M}\times\widehat{M})\times\mathbb{R}_+$ é <u>unívoca</u>.

Sejam $(x_n)_{n\in\mathbb{N}},(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}},(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}\in S$ tais que $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}]=[(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]=[(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}]$. Mostremos que:

$$([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y_n)_{n\in\mathbb{N}}])=([(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}],[(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}])$$

implica:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)=\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n).$$

De fato, pela Desigualdade Triangular, tem-se que:

$$d(x'_n,y'_n)\leq d(x'_n,x_n)+d(x_n,y_n)+d(y_n,y'_n)$$

donde segue que:

$$\lim_{n\to\infty} d(x'_n,y'_n)\leq \overbrace{\lim_{n\to\infty} d(x'_n,x_n)}^{=0}+\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n)+\overbrace{\lim_{n\to\infty} d(y_n,y'_n)}^{=0}=\lim_{n\to\infty} d(x_n,y_n).$$

Também, pela Desigualdade Triangular, tem-se que:

$$d(x_n,y_n)\leq d(x_n,x'_n)+d(x'_n,y'_n)+d(y'_n,y_n)$$

donde segue que:

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \leq \overbrace{\lim_{n\to\infty} d(x_n, x'_n)}^{=0} + \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n) + \overbrace{\lim_{n\to\infty} d(y'_n, y_n)}^{=0} = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n).$$

Logo,

$$\lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n)$$

Logo,

$$(([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]), \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n)) = (([(x'_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y'_n)_{n\in\mathbb{N}}]), \lim_{n\to\infty} d(x'_n, y'_n))$$

Segue, portanto, que $\widehat{d}$ é uma relação unívoca.

Sendo unívoca e total, segue que:

$$\begin{array}{cccc} \widehat{d}: & \widehat{M} \times \widehat{M} & \to & \mathbb{R}_+ \\ & ([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) & \mapsto & \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \end{array}$$

é uma função.

Tem-se, além disto, que valem:

(M1) Sejam $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{M}$ tais que $\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = 0$. Então, por definição de $\sim$, segue que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, e portanto $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] = [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$.

(M2) Como $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ satisfaz **(M2)**, segue que dados quaisquer $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{M}$, tem-se $\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) = \lim_{n\to\infty} d(y_n, x_n) = \widehat{d}([(y_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}])$.

(M3) Dados $[(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ e $[(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ em $\widehat{M}$, como $d : M \times M \to \mathbb{R}_+$ satisfaz **(M3)**, tem-se, para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$d(x_n, z_n) \leq d(x_n, y_n) + d(y_n, z_n)$$

de modo que pelo **Corolário 3.153**, vale:

$$\widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}]) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, z_n) \leq \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) + \lim_{n\to\infty} d(y_n, z_n) \overset{\text{def.}}{=}$$

$$= \widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(y_n)_{n\in\mathbb{N}}]) + \widehat{d}([(y_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(z_n)_{n\in\mathbb{N}}])$$

Assim, $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é um espaço métrico.

Mostremos, agora, que $f : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d})$ é uma imersão isométrica.

Sejam $x, y \in M$ quaisquer. Tem-se:

$$\widehat{d}(f(x), f(y)) = \widehat{d}((x)_{n\in\mathbb{N}}, (y)_{n\in\mathbb{N}}) = \lim_{n\to\infty} d(x, y) = d(x, y).$$

Passo 3: Mostrar que Cl. $(f[M]) = \widehat{M}$.
Denotaremos, nesta etapa e na próxima, os elementos de $\widehat{M}$ por letras gregas minúsculas.

Dado $\alpha = [(x_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \widehat{M}$, seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \alpha$. Dado $\varepsilon > 0$, como $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy de elementos de M, existe $n_1(\varepsilon/2) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_1(\varepsilon/2) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Assim, tomando $x_{n_1(\varepsilon/2)} \in M$, temos $f(x_{n_1(\varepsilon/2)}) = [(x_{n_1(\varepsilon/2)})_{n\in\mathbb{N}}]$, e portanto:

$$\widehat{d}(\alpha, [(x_{n_1(\varepsilon/2)})_{n\in\mathbb{N}}]) = \widehat{d}([(x_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(x_{n_1(\varepsilon/2)})_{n\in\mathbb{N}}]) = \lim_{n\to\infty} d(x_n, x_{n_1(\varepsilon/2)}) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

e portanto $f([(x_{n_1(\varepsilon/2)})]) \in B_{\widehat{M}}(\alpha, \varepsilon) \cap f[M]$.

Passo 4: Mostrar, usando o **Lema 3.332**, que $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é completo.

Seja $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $f[M] \subset \widehat{M}$, de modo que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $x_k \in M$ tal que $f(x_k) = \beta_k = [(x_k)_{n\in\mathbb{N}}]$. Temos, para quaisquer $m, n \in \mathbb{N}$:

$$\widehat{d}([(x_m)_{k\in\mathbb{N}}], [(x_n)_{k\in\mathbb{N}}]) = \widehat{d}(\beta_m, \beta_n) = \widehat{d}(f(x_m), f(x_n)) \overset{\overset{f \text{ imersão isométrica}}{\uparrow}}{=} d(x_m, x_n)$$

Desta forma, segue que como $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\widehat{M}, \widehat{d})$, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em M. Mostraremos que $\lambda = [(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]$ é o limite da sequência $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Dado $\varepsilon > 0$, como $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow d(x_m, x_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

Deste modo, para todo $n \geq n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, tem-se:

$$\widehat{d}(\beta_n, \lambda) = \widehat{d}([(x_n)_{k\in\mathbb{N}}], [(x_k)_{k\in\mathbb{N}}]) \overset{\text{def.}}{=} \lim_{k\to\infty} d(x_n, x_k) \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

Assim, para todo $\varepsilon > 0$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \widehat{d}(\beta_n, \lambda) < \varepsilon$$

ou seja, $\beta_n \to \lambda \in \widehat{M}$.

Pelo **Lema 3.332**, segue que $(\widehat{M}, \widehat{d})$ é um espaço métrico completo. $\square$

Teorema 3.334. *Sejam* (M, d) *um espaço métrico e* $((\widehat{M}, \widehat{d}), f : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d}))$ *e* $((\widetilde{M}, \widetilde{d}), g : (M, d) \to (\widetilde{M}, \widetilde{d}))$ *dois completamentos de* (M, d)*. Então existe uma única isometria* $\varphi : (\widehat{M}, \widehat{d}) \to (\widetilde{M}, \widetilde{d})$ *tal que* $\varphi \circ f = g$

$$\begin{tikzcd}
 & (M,d) \arrow[dl, "f"'] \arrow[dr, "g"] & \\
(\widehat{M}, \widehat{d}) \arrow[rr, dashed, "\varphi"'] & & (\widetilde{M}, \widetilde{d})
\end{tikzcd}$$

Demonstração. Para cada $y \in f[M]$, como f é injetora, existe <u>um único</u> $x \in M$ tal que $y = f(x)$. Em virtude disto,

$$\begin{array}{rccc} \varphi_0 : & f[M] & \to & \widetilde{M} \\ & y = f(x) & \mapsto & g(x) \end{array}$$

é uma função.

Note que φ_0 é uma imersão isométrica: dados quaisquer $y_1, y_2 \in f[M]$, tem-se que existem únicos $x_1, x_2 \in M$ tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$, de modo que:

$$\widetilde{d}(\varphi_0(y_1), \varphi_0(y_2)) = \widetilde{d}(g(x_1), g(x_2)) \overset{\substack{g \text{ imersão isométrica} \\ \uparrow}}{=} d(x_1, x_2) = \widehat{d}(f(x_1), f(x_2)) = \widehat{d}(y_1, y_2).$$

Uma vez que $f[M]$ é denso em $\widehat{M}$, $\widetilde{M}$ é completo e $\varphi_0 : f[M] \to \widetilde{M}$ é uma função uniformemente contínua (por ser uma imersão isométrica), segue do **Corolário 3.328** que existe uma única função uniformemente contínua $\varphi : \widehat{M} \to \widetilde{M}$ que estende φ_0, ou seja, tal que $\varphi \circ \iota_{f[M]}^{\widehat{M}} = \varphi_0$.

Para cada $y \in g[M]$, como g é injetora, existe <u>um único</u> $x \in M$ tal que $y = g(x)$. Em virtude disto,

$$\begin{array}{rccc} \phi_0 : & g[M] & \to & \widehat{M} \\ & y = g(x) & \mapsto & f(x) \end{array}$$

é uma função.

Note que ϕ_0 é uma imersão isométrica: dados quaisquer $y_1, y_2 \in g[M]$, tem-se que existem únicos $x_1, x_2 \in M$ tais que $y_1 = g(x_1)$ e $y_2 = g(x_2)$, de modo que:

$$\widehat{d}(\phi_0(y_1), \phi_0(y_2)) = \widehat{d}(f(x_1), f(x_2)) \overset{\substack{f \text{ imersão isométrica} \\ \uparrow}}{=} d(x_1, x_2) = \widetilde{d}(g(x_1), g(x_2)) = \widetilde{d}(y_1, y_2).$$

Uma vez que $g[M]$ é denso em $\widetilde{M}$, $\widehat{M}$ é completo e $\phi_0 : g[M] \to \widehat{M}$ é uma função uniformemente contínua (por ser uma imersão isométrica), segue do **Corolário 3.328** que existe uma única função uniformemente contínua $\phi : \widetilde{M} \to \widehat{M}$ que estende ϕ_0, ou seja, tal que $\phi \circ \iota_{g[M]}^{\widetilde{M}} = \phi_0$.

Observe que como $\varphi_0 \circ \phi_0 : g[M] \to g[M]$ é $\mathrm{id}_{g[M]} : g[M] \to g[M]$, sendo $g[M]$ denso em $\widetilde{M}$ podemos concluir que $\varphi \circ \phi = \mathrm{id}_{\widetilde{M}} : \widetilde{M} \to \widetilde{M}$.

Como $\phi_0 \circ \varphi_0 : f[M] \to f[M]$ é $\mathrm{id}_{f[M]} : f[M] \to f[M]$, sendo $f[M]$ denso em $\widehat{M}$ podemos concluir que $\phi \circ \varphi = \mathrm{id}_{\widehat{M}} : \widehat{M} \to \widehat{M}$.

Dados $\bar{x}, \bar{y} \in \widehat{M}$, como $f[M]$ é denso em $\widehat{M}$, existem sequências $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em M tais que $f(x_n) \to \bar{x}$ e $f(y_n) \to \bar{y}$.

$$\widetilde{d}(\varphi(\bar{x}), \varphi(\bar{y})) = \widetilde{d}(\varphi(\lim_{n\to\infty} f(x_n)), \varphi(\lim_{n\to\infty} f(y_n))) \overset{\substack{\varphi \text{ contínua} \\ \uparrow}}{=} \widetilde{d}(\lim_{n\to\infty} \varphi(f(x_n)), \lim_{n\to\infty} \varphi(f(y_n))) =$$

$$\overset{\substack{\varphi\restriction_{f[M]}=\varphi_0 \\ \uparrow}}{=} \widetilde{d}(\lim_{n\to\infty} \varphi_0(f(x_n)), \lim_{n\to\infty} \varphi_0(f(y_n))) \overset{\substack{\widetilde{d} \text{ contínua} \\ \uparrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(\varphi_0(f(x_n)), \varphi_0(f(y_n))) \overset{\substack{\varphi_0 \circ f = g \\ \uparrow}}{=}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \widetilde{d}(g(x_n), g(y_n)) \overset{\substack{g \text{ imersão isométrica} \\ \uparrow}}{=} \lim_{n\to\infty} d(x_n, y_n) \overset{\substack{f \text{ imersão isométrica} \\ \uparrow}}{=} \lim_{n\to\infty} \widehat{d}(f(x_n), f(y_n)) \overset{\substack{\widehat{d} \text{ contínua} \\ \uparrow}}{=}$$

$$= \widehat{d}(\lim_{n\to\infty} f(x_n), \lim_{n\to\infty} f(y_n)) = \widehat{d}(\bar{x}, \bar{y}).$$

Segue, assim, que φ é uma isometria.

Finalmente, note que, por construção, vale:

$$(\forall x \in M)(\varphi_0 \circ f(x) = g(x)),$$

e como $\varphi \restriction_{f[M]} = \varphi_0$, tem-se:

$$(\forall x \in M)(\varphi \circ f(x) = g(x)).$$

□

Dois espaços homeomorfos podem ter completamentos não-homeomorfos. Assim, o intervalo $]0, 2\pi]$, cujo completamento é $[0, 2\pi]$, é homeomorfo a $\mathbb{S}^1 \setminus \{(1, 0)\}$, cujo completamento é $\mathbb{S}^1$. Entretanto, $\mathbb{S}^1$ e $[0, 2\pi]$ *não* são homeomorfos.

Entretanto, se dois espaços métricos (M, d_M) e (N, d_N) são uniformemente homeomorfos, seus respectivos completamentos $((\widehat{M}, \widehat{d_M}), f : (M, d) \to (\widehat{M}, \widehat{d_M}))$ e $((\widehat{N}, \widehat{d_N}), f : (N, d_N) \to (\widehat{N}, \widehat{d_N}))$ são uniformemente homeomorfos (**Corolário 3.329**).

Obtemos, assim, uma função uniformemente contínua:

$$g \circ \widetilde{h} : \widehat{M} \to \widehat{N}$$

que é um homeomorfismo uniforme.

Para concluir este curso, vamos estudar a função exponencial, $f(x) = a^x$,em que $a \in]1, \infty[$.

No Ensino Médio, geralmente ela é apresentada iniciando-se com a definição para expoentes inteiros positivos. Introduzem-se, posteriormente, os expoentes da forma $\frac{1}{n}$ e, finalmente, os expoentes da forma $\frac{m}{n}$, com $m \in \mathbb{Z}$ e $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Obtém-se, assim, uma função:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

cujas propriedades básicas já conhecemos.

Para o caso em que $a > 1$, g é uma função estritamente crescente, pois que $q = \frac{m}{n} > 0$, temos $a^q > 1$ e $a^{x+q} = a^x \cdot a^q > a^x$. A função g *não* é uniformemente contínua em toda a reta racional, mas será uniformemente contínua em qualquer semirreta $]-\infty, k] \cap \mathbb{Q}$. Para provar isto, vamos usar o seguinte:

Lema 3.335. *Seja $a > 1$ um número real dado. Então para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:*

$$(t \in \mathbb{Q}) \& (0 < t < \delta) \Rightarrow (a^t - 1 < \varepsilon)$$

Demonstração. Pela **Desigualdade de Bernoulli**, para todo número natural n tem-se:

$$(1 + \varepsilon)^n \geq 1 + n\varepsilon$$

Como $\mathbb{N}$ é ilimitado em $\mathbb{R}$, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{a-1}{\varepsilon} < n_0(\varepsilon)$, e para este $n_0(\varepsilon)$ tem-se:

$$1 + n_0(\varepsilon) \cdot \varepsilon > a,$$

e portanto:

$$(1+\varepsilon)^{n_0(\varepsilon)} \geq 1 + n_0(\varepsilon) \cdot \varepsilon > a$$

$$(1+\varepsilon)^{n_0(\varepsilon)} > a,$$

e elevando os dois membros desta desigualdade a $\frac{1}{n_0(\varepsilon)}$, obtemos:

$$1 + \varepsilon > a^{\frac{1}{n_0(\varepsilon)}},$$

e portanto:

$$a^{\frac{1}{n_0(\varepsilon)}} - 1 < \varepsilon$$

Basta tomarmos, portanto, $\delta = \dfrac{1}{n_0(\varepsilon)}$ e teremos que, se $t \in \mathbb{Q}$ for tal que $t < \dfrac{1}{n_0(\varepsilon)}$, vale:

$$0 < a^t < a^{\frac{1}{n_0(\varepsilon)}}$$

e portanto:

$$0 < a^t - 1 < a^{\frac{1}{n_0(\varepsilon)}} - 1 < \varepsilon$$

Assim,

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(0 < t < \delta \Rightarrow |a^t - 1| < \varepsilon)$$

$\square$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar $\delta = \dfrac{1}{n_0(\varepsilon)} \in \mathbb{Q}$ (onde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ é dado no lema anterior), que é tal que para $q \in \mathbb{Q}$ tal que $0 < q < \delta$ vale:

$$a^q - 1 < \varepsilon.$$

Dado este $\varepsilon > 0$ acima, queremos determinar $\delta > 0$ tal que para quaisquer números racionais $q, r \in \mathbb{Q}$ tais que $q, r \leq k$ e $|q - r| < \delta$ tenhamos $|a^q - a^r| < \varepsilon$.

Fazendo $q = r + s$, teremos:

$$a^{r+s} - a^r = a^r \cdot (a^s - 1) \overset{r \leq k}{\leq} a^k \cdot (a^s - 1).$$

Assim, dado $\varepsilon > 0$, basta escolhermos $\delta > 0$ de tal forma que $0 < s < \delta$ implique $a^s - 1 < \dfrac{\varepsilon}{a^k}$.

Segue, portanto, que $g \restriction_{]-\infty,k]\cap\mathbb{Q}} :]-\infty,k]\cap\mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ é uniformemente contínua.

Para cada número natural $n \in \mathbb{N}$, seja:

$$\begin{array}{rccc} g_n : &]-\infty,n]\cap\mathbb{Q} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & g(x) \end{array}$$

Como $]-\infty,n]\cap\mathbb{Q}$ é denso em $]-\infty,n]$ e g_n é uniformemente contínua, pelo **Teorema 3.327**, cada g_n pode ser estendida a uma única função uniformemente contínua $\widetilde{g_n} :]-\infty,n] \to \mathbb{R}$.

$$\begin{tikzcd}]-\infty,n] \arrow[r, "\widetilde{g_n}"] & \mathbb{R} \\ ]-\infty,n]\cap\mathbb{Q} \arrow[u, hook, "\iota^{]-\infty,n]}_{]-\infty,n]\cap\mathbb{Q}}"] \arrow[ur, "g_n"'] & \end{tikzcd}$$

Note que se $m < n$, tem-se:

$$(\forall x \in]-\infty,m]) \left(\widetilde{g_m}(x) = g(x) = a^x = \widetilde{g_n} \restriction_{]-\infty,m]} (x) \right)$$

Definimos, portanto:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f} : & \bigcup_{n\in\mathbb{N}}]-\infty,n] = \mathbb{R} & \mapsto & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \widetilde{g_n}(x), \text{ se } x \in]-\infty,n] \end{array}$$

Note que $\widetilde{f}$ é contínua, uma vez que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x_0 \in]-\infty,n]$ e $\widetilde{g} \restriction_{]-\infty,n]} = \widetilde{g_n}$, que é contínua em x_0 (não estamos afirmando que f é uniformemente contínua).

Desta forma, para todo $x \in \mathbb{R}$ definimos:

$$a^x = \widetilde{f}(x).$$

Exercícios sobre Completude

9.1 Verificar se as sequências abaixo, nos respectivos espaços métricos, são de Cauchy:

a. $x_n = \frac{1}{n+1}$ em $(\mathbb{Q}, d)$,em que $d(x,y) = |y - x|$;

b. $x_n = \frac{1}{n}$ em $(]0,1], d)$,em que d é a métrica induzida da métrica usual sobre $\mathbb{R}$;

c. $x_n = \frac{n-1}{n+1}$ em $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |y - x|$;

d. $x_n = \frac{(-1)^n}{n}$ em $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |y - x|$;

e. $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ em $(\mathbb{Q}, d)$,em que $d(x, y) = |y - x|$;

9.2 Seja $(V, +, \cdot, \|\cdot\|)$ um $\mathbb{R}-$espaço vetorial normado. Mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy, então $(x_n + y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy e, para qualquer que seja $\alpha \in \mathbb{R}$, $(\alpha \cdot x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

9.3 Mostrar que se $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ e $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ são sequências de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |y - x|$, então $(x_n \cdot y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $(\mathbb{R}, d)$.

9.4 Seja $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ uma série convergente de números reais positivos. Mostrar que se uma sequência de Cauchy $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em um espaço métrico (M, d) é tal que:

$$(\forall n \in \mathbb{N})(d(x_n, x_{n+1}) \leq a_n)$$

então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy.

9.5 Seja $(\mathbb{R}, d)$,em que $d(x, y) = |y - x|$. Pode-se afirmar que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$, com a métrica induzida, é completo? Por quê?

9.6 Mostrar que todo espaço métrico finito é completo.

9.7 Mostrar que todo espaço métrico cuja métrica é a métrica zero-um é completo.

9.8 Seja (M, d) um espaço métrico no qual toda bola fechada é compacta. Mostrar que (M, d) é completo. **Dica:** mostrar que o conjunto dos termos de uma sequência de Cauchy é limitado e, portanto, está contido em uma bola fechada.

9.9 Dar um exemplo de espaço métrico completo, (M, d) e de uma função contínua sobrejetora $f : (M, d) \to (N, d')$ de modo que (N, d') não seja completo. **Sugestão:** considerar sobre $\mathbb{Q}$ as métricas usual e a zero-um.

Referências Bibliográficas

[**Arm**] Armstrong, Margaret A., *Basic Topology*, Springer Verlag, 1997.

[**Avi**] Ávila, Geraldo, *Evolução dos Conceitos de Função e de Integral*, Revista Matemática Universitária, p. 14 - 46.

[**Dom**] Domingues, Hygino H., *Espaços Métricos e Introdução à Topologia*, ATUAL editora, São Paulo, 1982.

[**Hau**] Hausdorff, Felix, *Grundzüge der Mengenlehre*, Chelsea Publishing Company, New York, 1965.

[**Hil**] Hilton, Peter J., Griffiths, Hubert B.. *Matemática Clássica - uma interpretação contemporânea*, vol. 3, Editora Edgard Blücher Ltda, Editora da Universidade de São Paulo, 1976.

[**Fré**] Fréchet, Maurice, *Sur quelques points du Calcul Fonctionnel*, Rendic. Circ. Mat. Palermo 22, 1â74 1906.

[**Katz**] Katz, Victor J. *A History of Mathematics – an introduction*, Harper Collins College Publishers, New York, 1993.

[**Lib**] Libardi, Alice K.M., Vieira, João P. & Melo, Thiago. *Invariantes Topológicos*. São Paulo, Cultura Acadêmica, 2012.

[**Loi**] Loibel, Gilberto F., *Introdução à Topologia*, São Paulo, Editora Unesp, 2007.

[**Lim**] Lima, Elon L., *Espaços Métricos*. Rio de Janeiro, IMPA, 2007.

[**Mon**] Monteiro, Luiz H. J., *Elementos de Álgebra*, Ao Livro Técnico S.A., Rio de Janeiro/Guanabara, 1971.

[**Nev**] Neves, Wladimir, *Uma Introdução à Análise Real*. Rio de Janeiro, Editora UFRJ, 2014.

[**Spa**] Spanier, E.H., *Teoria dos Conjuntos e Espaços Métricos*. Sociedade Paranaense de Matemática, Curitiba, 1961.

[**Tas**] Tasković, Milan R., *Fréchet's Metric Spaces - 100th next*, Mathematica Moravica, Vol. 9 (2005), pp. 69-75.

[**CoW**] https://www.colegioweb.com.br/dietros-triedros-poliedros-e-angulos-poliedricos/triedros.html.