

# GABARITO DA LISTA 01 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

*“Eu vejo, eu esqueço. Eu escrevo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”*

**Observação:** Nesta lista assume-se, além dos conhecimentos obtidos nas aulas da semana 01, apenas o conhecimento obtido no ensino básico das funções seno, cosseno, logaritmo, polinomial e exponencial. Assume-se, também, que o aluno saiba resolver inequações.

(1) Sejam  $A = \{a, b, c\}$  e  $B = \{1, 5, 7, 41\}$ . Construa:

(a) Uma relação  $\mathcal{R}_1$  de  $A$  em  $B$  que seja total mas não seja unívoca;

**Solução:** uma das possíveis soluções é:  $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (a, 5), (b, 7), (c, 41)\}$ , ou  $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 5), (b, 7), (c, 41)\}$ , ou  $\mathcal{R}_1 = \{(a, 1), (b, 5), (c, 7), (c, 41)\}$ , ou ainda qualquer conjunto de pares ordenados em que todo elemento de  $A$  figure, no mínimo uma vez como primeira coordenada (a fim de a relação ser total) e pelo menos um elemento de  $A$  figure mais de uma vez como primeira coordenada (para a relação não ser unívoca).

(b) Uma relação  $\mathcal{R}_2$  de  $B$  em  $A$  que seja total mas não seja unívoca;

**Solução:** uma das possíveis soluções é:  $\mathcal{R}_2 = \{(1, a), (1, b), (5, a), (7, a), (41, b)\}$ , ou  $\mathcal{R}_2 = \{(1, a), (5, b), (7, a), (7, c), (41, b)\}$ , ou  $\mathcal{R}_2 = \{(1, c), (5, b), (7, b), (41, a), (41, b)\}$ , ou ainda qualquer conjunto de pares ordenados em que todo elemento de  $B$  figure, no mínimo uma vez como primeira coordenada (a fim de a relação ser total) e pelo menos um elemento de  $B$  figure mais de uma vez como primeira coordenada (para a relação não ser unívoca).

(c) Uma relação  $\mathcal{R}_3$  de  $A$  em  $B$  que seja unívoca mas não seja total;

**Solução:** uma das possíveis soluções é:  $\mathcal{R}_3 = \{(1, a), (c, 7)\}$ , ou  $\mathcal{R}_3 = \{(a, 5), (c, 1)\}$ , ou  $\mathcal{R}_3 = \{(b, 1)\}$ , ou ainda qualquer conjunto de pares ordenados em que pelo menos um elemento de  $A$  não figure como primeira coordenada (a fim de a relação não ser total) e todo elemento de  $A$  corresponda a no máximo um elemento de  $B$  (para a relação ser unívoca).

---

\*jeancb@ime.usp.br

(d) Uma relação  $\mathcal{R}_4$  de  $A$  em  $A$  que seja unívoca e total.

**Solução:** uma das possíveis soluções é:  $\mathcal{R}_4 = \{(a, a), (b, b), (c, c)\}$ , ou  $\mathcal{R}_4 = \{(a, b), (b, c), (c, a)\}$ , ou  $\mathcal{R}_4 = \{(a, c), (b, a), (c, a)\}$ , ou ainda qualquer conjunto de pares ordenados em que todo elemento de  $A$  apareça uma única vez como primeira coordenada, cada um deles correspondendo a um único elemento de  $A$ .

(2) Considere os conjuntos:

$$A = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\} \text{ e } B = \{0, 1, 4, 9, 16, 25, 36\}.$$

Descreva explicitamente as relações:

(i)  $\mathcal{R}$  de  $A$  em  $B$  dada por:  $\{(a, b) | b = a^2\}$ .

**Solução:**

$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (-5, 25), (5, 25), (-4, 16), (4, 16), (-3, 9), (3, 9), (-2, 4), (2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$$

(ii)  $\mathcal{S}$  de  $B$  em  $A$  dada por  $\{(b, a) | b = a^2\}$ .

**Solução:**

$$\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4), (25, 5), (25, -5)\}$$

Decida se  $\mathcal{R}$  ou  $\mathcal{S}$  é função e justifique sua resposta.

**Solução:**

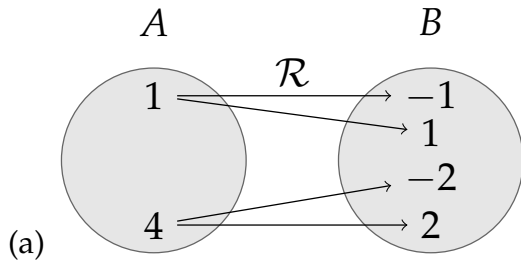
$$\mathcal{R} = \{(0, 0), (-5, 25), (5, 25), (-4, 16), (4, 16), (-3, 9), (3, 9), (-2, 4), (2, 4), (-1, 1), (1, 1)\}$$

é função, uma vez que é unívoca (cada elemento de  $A$  aparece no máximo uma vez como primeira coordenada) e total (todo elemento de  $A$  aparece associado a, no mínimo um elemento de  $B$ ). Todavia,

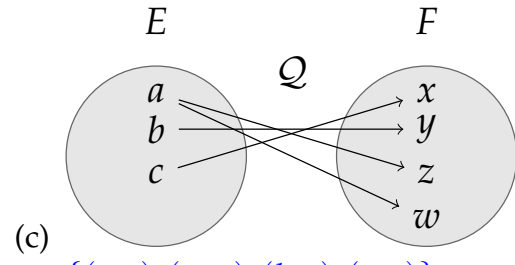
$$\mathcal{S} = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (4, 2), (4, -2), (9, 3), (9, -3), (16, 4), (16, -4), (25, 5), (25, -5)\}$$

não é função por não ser uma relação unívoca: por exemplo, temos dois pares ordenados distintos com as primeiras coordenadas iguais,  $(4, 2), (4, -2)$ .

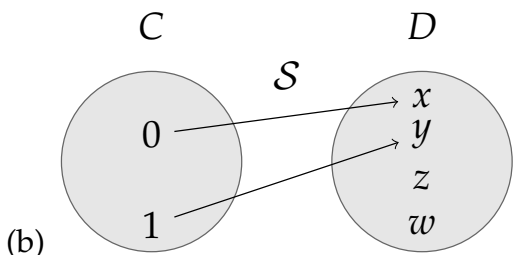
(3) Escreva o conjunto de pares ordenados que cada diagrama representa, explicita o domínio, o contradomínio e conjunto imagem de cada relação e, em seguida, classifique as relações quanto a cada um dos seguintes atributos: univocidade, totalidade, injetividade, sobrejetividade e bijetividade.



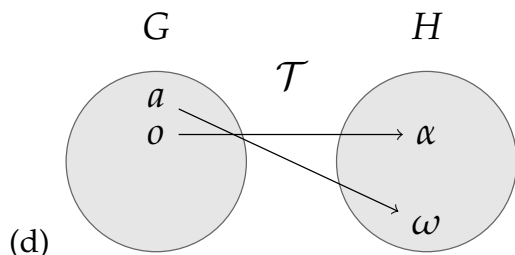
$\mathcal{R} = \{(1, -1), (1, 1), (4, -2), (4, 2)\}$ .  
Não-unívoca, total, não injetora, sobrejetora.



$\mathcal{Q} = \{(a, z), (a, w), (b, y), (c, x)\}$ .  
Não-unívoca, total, sobrejetora e injetora;

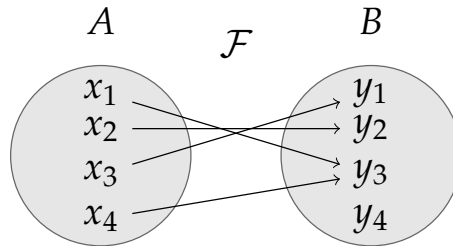


$\mathcal{S} = \{(0, x), (1, y)\}$ . Unívoca, total, injetora e não-sobrejetora.



$\mathcal{T} = \{(a, \omega), (o, \alpha)\}$ . Unívoca, total, injetora e sobrejetora.

(4) Considere o diagrama a seguir:



(a) Escreva o conjunto de pares ordenados que o diagrama representa;

**Solução:**

$$\mathcal{F} = \{(x_1, y_3), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_4, y_3)\}.$$

(b) Determine se o diagrama representa uma função. Em caso positivo, responda se é injetora e/ou sobrejetora, e em caso negativo, justifique;

**Solução:** Como no diagrama todo elemento de  $A$  figura exatamente uma vez como primeiro elemento de um par ordenado de  $\mathcal{F}$ , segue que  $\mathcal{F}$  é função. A função, no entanto, não é injetora, uma vez que embora  $x_1 \neq x_4$ , tem-se  $(x_1, y_3), (x_4, y_3) \in \mathcal{F}$ .

e não é sobrejetora porque existe um elemento do contradomínio (a saber,  $y_4$ ) que não é oriundo de nenhum elemento de  $\mathcal{F}$ .

(c) Determinar a pré-imagem, pela relação  $\mathcal{F}$ , dos seguintes conjuntos:

$$(c_1) \{y_1, y_3\}$$

$$(c_2) \{y_4\}$$

$$(c_3) \{y_2, y_3, y_4\}$$

$$(c_4) \{y_2\}$$

$$(c_5) \{y_1, y_2\}$$

$$(c_6) B$$

**Solução:**  $\mathcal{F}^{-1}[\{y_1, y_3\}] = \{x_1, x_3, x_4\}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[\{y_4\}] = \emptyset$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[\{y_2, y_3, y_4\}] = \{x_1, x_2, x_4\}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[\{y_2\}] = \{x_2\}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}[\{y_1, y_2\}] = \{x_2, x_3\}$  e  $\mathcal{F}^{-1}[B] = A$ .

(5) Determinar o domínio e o contradomínio de cada uma das funções a seguir:

$$(a) q(x) = \frac{x^2 + 2}{(x+1)^3(x-2)};$$

$$(c) \ell(x) = \log(x+1)$$

$$(e) n(x) = \frac{1}{e^x}$$

$$(b) r(x) = \sqrt{x^2 - 4} + \frac{1}{x}$$

$$(d) m(x) = \log(\sin(x))$$

$$(f) p(x) = \frac{\sin(x)}{\log(x)}$$

**Solução:**  $\text{dom}(q) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x \neq -1) \& (x \neq 2)\}$ ,  $\text{dom}(\ell) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x\}$ ,  $\text{dom}(n) = \mathbb{R}$ ,  $\text{dom}(r) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -2) \vee (2 < x)\}$

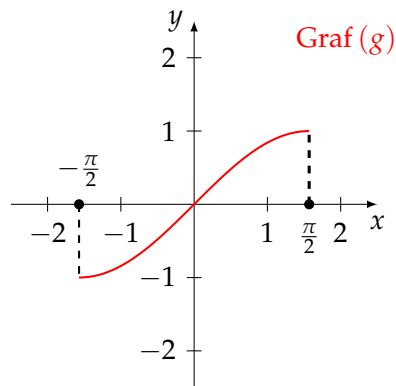
$$\text{dom}(m) = \left( \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{Z}^* \\ n \text{ ímpar}}} ]n \cdot \pi, (n+1) \cdot \pi[ \right) \cup \left( \bigcup_{\substack{n \in \{0\} \cup \mathbb{N} \\ n \text{ par}}} ]n \cdot \pi, (n+1) \cdot \pi[ \right)$$

e  $\text{dom}(p) = \{x \in \mathbb{R} \mid (0 < x < 1) \vee (1 < x)\}$ . O contradomínio de todas as funções é  $\mathbb{R}$ .

(6) Em cada caso abaixo, explicitar domínio, contradomínio, conjunto-imagem e classificar, usando os critérios gráficos, as seguintes funções quanto à sua injetividade, sobrejetividade e/ou bijetividade:

(i)

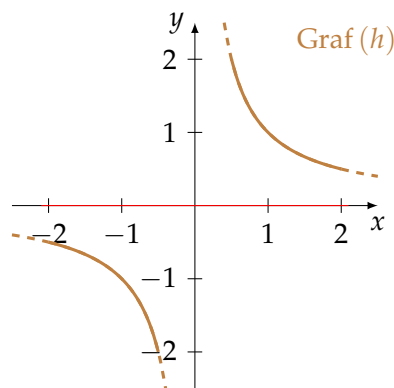
$$g: \begin{array}{ccc} [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] & \rightarrow & [-1, 1] \\ \theta & \mapsto & \sin(\theta) \end{array}$$



**Solução:** bijetora: toda reta horizontal de equação  $y = y_0$ , com  $y_0 \in \text{cod}(g) = [-1, 1]$  intercepta o gráfico de  $g$  em exatamente em um ponto.

(ii)

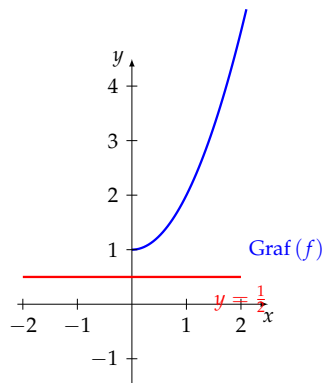
$$\begin{aligned} h: \mathbb{R} \setminus \{0\} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \frac{1}{x} \end{aligned}$$



**Solução:** injetora mas não sobrejetora: toda reta vertical de equação  $x = x_0$ , com  $x_0 \in \text{dom}(h) = \mathbb{R} \setminus \{0\}$  intercepta o gráfico de  $h$  em exatamente em um ponto. No entanto, a reta horizontal de equação  $y = y_0$  não intercepta o gráfico de  $h$  em nenhum ponto, o que significa que, embora 0 esteja no contradomínio, 0 não está na imagem de  $h$ .

(iii)

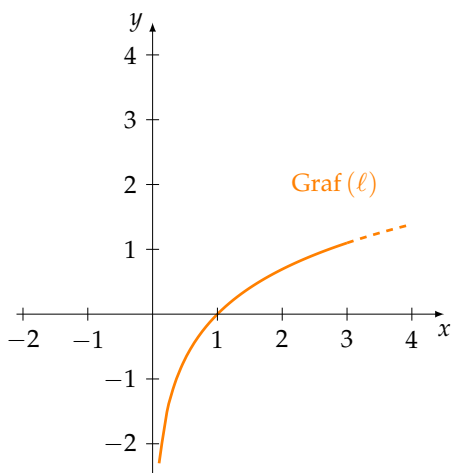
$$\begin{aligned} f: [0, \infty[ &\rightarrow \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 + 1 \end{aligned}$$



**Solução:** injetora, pois toda reta vertical de equação  $x = x_0$ , com  $x_0 \in \text{dom}(f) = [0, \infty[$  intercepta o gráfico de  $f$  em exatamente em um ponto. Não é sobrejetora pois, por exemplo, ainda que  $\frac{1}{2} \in \mathbb{R}_+$ , a reta horizontal de equação  $y = \frac{1}{2}$  não intercepta o gráfico de  $f$  em nenhum ponto.

(iv)

$$\begin{aligned} \ell : ]0, \infty[ &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto \log(x) \end{aligned}$$



**Solução:** bijetora: toda reta horizontal de equação  $y = y_0$ , com  $y_0 \in \text{cod}(\ell) = \mathbb{R}$  intercepta o gráfico de  $\ell$  em exatamente em um ponto.

(7) Determinar, quando possível, as composições  $g \circ f$  e  $f \circ g$  nos seguintes casos:

(a)

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} & g : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto x + 1 & x &\mapsto x^2 + x + 1 \end{aligned}$$

**Solução:** Como  $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ , existe  $g \circ f$ , e como  $\text{cod}(g) = \text{dom}(f)$ , também existe  $f \circ g$ . Quanto às leis, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 + x + 1) = (x^2 + x + 1) + 1 = x^2 + x + 2$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x + 1) = (x + 1)^2 + (x + 1) + 1 = x^2 + 3x + 3$$

(b)

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x + 1 \end{array}$$

**Solução:** Como  $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ , existe  $g \circ f$ , e como  $\text{cod}(g) = \text{dom}(f)$ , também existe  $f \circ g$ . Quanto às leis, temos:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(2x + 1) = 2(2x + 1) + 1 = 4x + 3$$

(c)

$$\begin{array}{ccc} f: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} x + 3, & \text{se } x \leq 3 \\ x - 4, & \text{se } x > 3 \end{cases} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} g: \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x - 7 \end{array}$$

**Solução:** Como  $\text{cod}(f) = \text{dom}(g)$ , existe  $g \circ f$ , e como  $\text{cod}(g) = \text{dom}(f)$ , também existe  $f \circ g$ . Quanto às leis, temos:

$$\begin{aligned} (f \circ g)(x) &= f(g(x)) = \begin{cases} g(x) + 3, & \text{se } g(x) \leq 3 \\ g(x) - 4, & \text{se } g(x) > 3 \end{cases} = \begin{cases} (2x - 7) + 3, & \text{se } 2x - 7 \leq 3 \\ (2x - 7) - 4, & \text{se } 2x - 7 > 3 \end{cases} = \\ &= \begin{cases} 2x - 4, & \text{se } x \leq 5 \\ 2x - 11, & \text{se } x > 5 \end{cases} \end{aligned}$$

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \begin{cases} g(x + 3), & \text{se } x \leq 3 \\ g(x - 4), & \text{se } x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 2(x + 3) - 7, & \text{se } x \leq 3 \\ 2(x - 4) - 7, & \text{se } x > 3 \end{cases} =$$

$$= \begin{cases} 2x - 1, & \text{se } x \leq 3 \\ 2x - 15, & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

(8) Considere a função:

$$F(x) = e^{\sin(\log(x^2-1))}$$

O domínio de  $F$  deve ser o maior subconjunto  $\text{dom}(F)$  de  $\mathbb{R}$  tal que, dado  $x \in (F)$  seja possível calcularmos  $e^{\sin(\log(x^2-1))}$ . Sabe-se que o domínio da função logarítmica é o conjunto de todos os números reais positivos, de modo que para calcularmos  $\log(x^2 - 1)$  devemos garantir que  $x^2 - 1 > 0$ , ou seja, que  $x < -1$  ou que  $x > 1$ . Não há restrições para o cálculo do seno e da função exponencial, de modo que:

$$\text{dom}(F) = \{x \in \mathbb{R} \mid (x < -1) \vee (1 < x)\} = ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[$$

Podemos “decompor”  $F$  como a seguinte composição:

$$\begin{array}{ccccccc} ]-\infty, -1[ \cup ]1, \infty[ & \xrightarrow{m} & [2, \infty[ & \xrightarrow{h} & [\log(2), \infty[ & \xrightarrow{g} & [-1, 1] & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 & \mapsto & \log(x^2 + 1) & \mapsto & \sin(\log(x^2 + 1)) & \mapsto & e^{\sin(\log(x^2 + 1))} \end{array}$$

ou seja,

$$F = f \circ g \circ h \circ m,$$

onde  $f(w) = e^w$ ,  $g(z) = \sin(z)$ ,  $h(y) = \log(y)$  e  $m(x) = x^2 + 1$ . Nos itens a seguir, encontre o domínio de  $F$  e “decomponha” de modo análogo ao efetuado acima:

$$(a) F(x) = \sin\left(\frac{2}{x-3}\right)$$

$$(b) F(x) = \sin(2 \cdot \log(x-1))$$

$$(c) F(x) = \frac{1}{\log(x^3-2)}$$

$$(d) F(x) = \frac{3}{2 \sin(4x) \cos(4x)}$$

$$(e) F(x) = e^{\sin(\log(2x))}$$

$$(f) F(x) = \log\left(\frac{1}{x^2-2}\right)$$

- **Solução:** (a)  $f(w) = \sin(w)$ ,  $w \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $g(z) = \frac{2}{z}$ ,  $z \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ,  $h(x) = x-3$ ,  $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} \setminus \{3\} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x-3 & \mapsto & \frac{2}{x-3} & \mapsto & \sin\left(\frac{2}{x-3}\right) \end{array}$$

- **Solução:** (b)  $f(w) = \sin(w), w \in \mathbb{R}, g(z) = 2z, z \in \mathbb{R}, h(x) = \log(x), x \in \mathbb{R}_+^*, m(x) = x - 1, x \in ]1, \infty[$

$$\begin{array}{ccccccc} ]1, \infty[ & \xrightarrow{m} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x - 1 & \mapsto & \log(x - 1) & \mapsto & 2 \cdot \log(x - 1) & \mapsto & \sin(2 \cdot \log(x - 1)) \end{array}$$

- **Solução:** (c)  $h(z) = z^3 - 3, z \in ]\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}[ \cup ]\sqrt[3]{3}, \infty[, g(y) = \log(y), y \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f(x) = 1/x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ccccccc} ]\sqrt[3]{2}, \sqrt[3]{3}[ \cup ]\sqrt[3]{3}, \infty[ & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 - 2 & \mapsto & \log(x^3 - 2) & \mapsto & \frac{1}{\log(x^3 - 2)} \end{array}$$

- **Solução:** (d)  $h(z) = 4z, z \in \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \frac{\pi}{8} \mid n \in \mathbb{Z}\}, g(y) = 2 \cdot \sin(y) \cdot \cos(y), y \in \mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}, f(x) = 3/2x, x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \frac{\pi}{8} \mid n \in \mathbb{Z}\} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \setminus \{n \cdot \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \setminus \{0\} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 4x & \mapsto & 2 \cdot (\sin(4x) \cdot \cos(4x)) & \mapsto & \frac{3}{2 \cdot (\sin(4x) \cdot \cos(4x))} \end{array}$$

- **Solução:** (e)  $f(w) = e^w, w \in \mathbb{R}, g(z) = \sin(z), z \in \mathbb{R}, h(y) = \log(y), x \in \mathbb{R}_+^*, m(x) = 2x, x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{m} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x & \mapsto & \log(2x) & \mapsto & \sin(\log(2x)) & \mapsto & e^{\sin(\log(2x))} \end{array}$$

- **Solução:** (f)  $f(w) = e^w, w \in \mathbb{R}, g(z) = \sin(z), z \in \mathbb{R}, h(y) = \log(y), x \in \mathbb{R}_+^*, m(x) = 2x, x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\begin{array}{ccccccc} ]-\infty, -\sqrt{2}[ \cup ]\sqrt{2}, \infty[ & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2 & \mapsto & \frac{1}{x^2 - 2} & \mapsto & \log\left(\frac{1}{x^2 - 2}\right) \end{array}$$