Lista 02 de MAT 0111

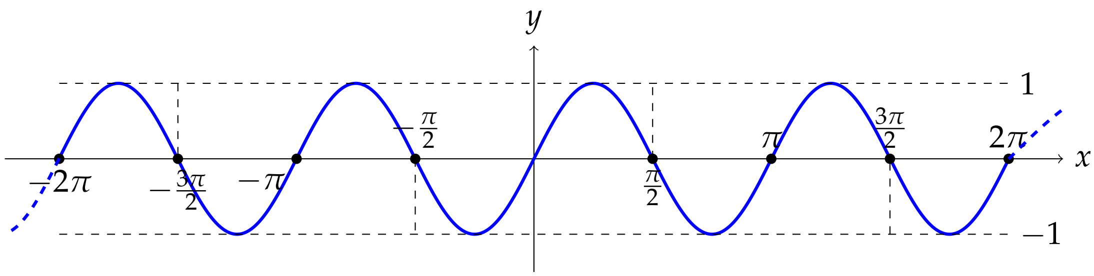
Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Esboçar os gráficos das seguintes funções:

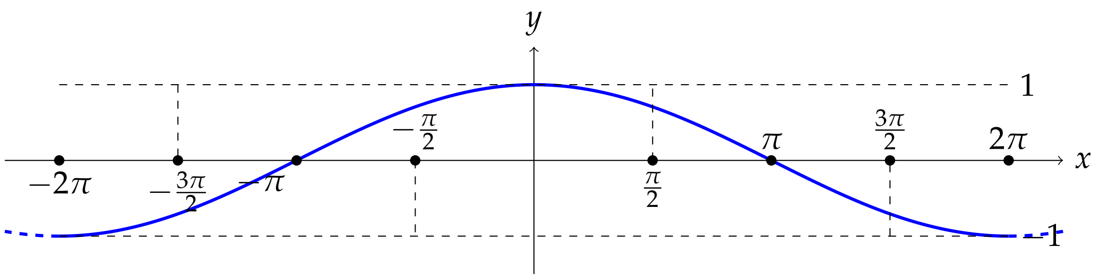
(a) $f(x) = \sin(2x)$

Solução:



(b) $y = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

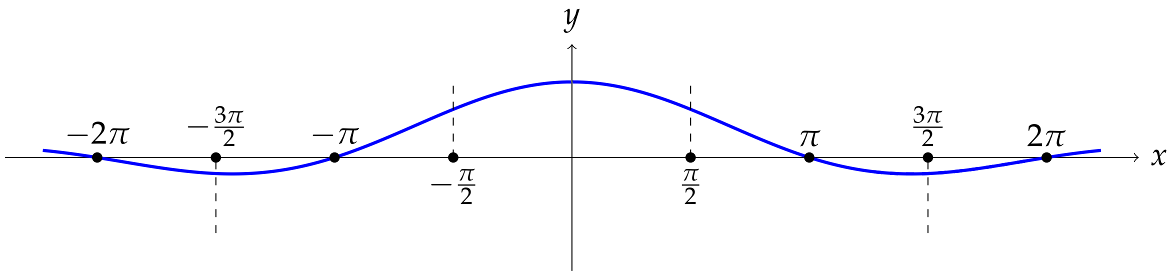
Solução:



(c) $g(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \sin(x)$

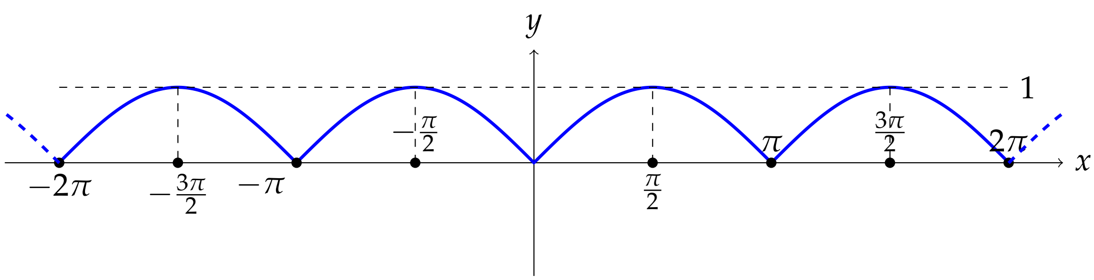
Solução:

*jeancb@ime.usp.br

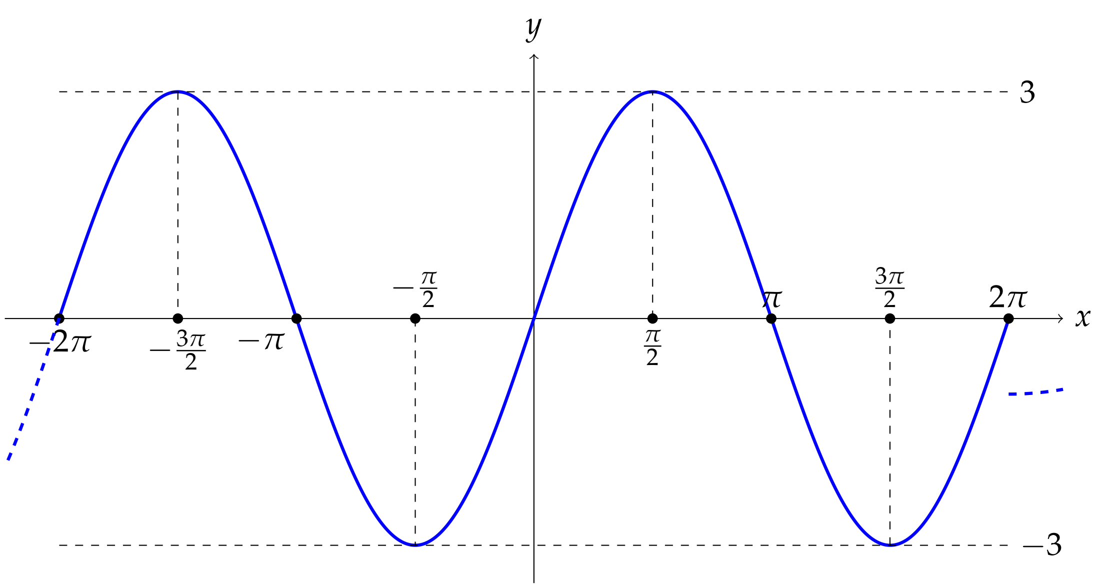


(d) $f(x) = |\sin(x)|$

Solução:

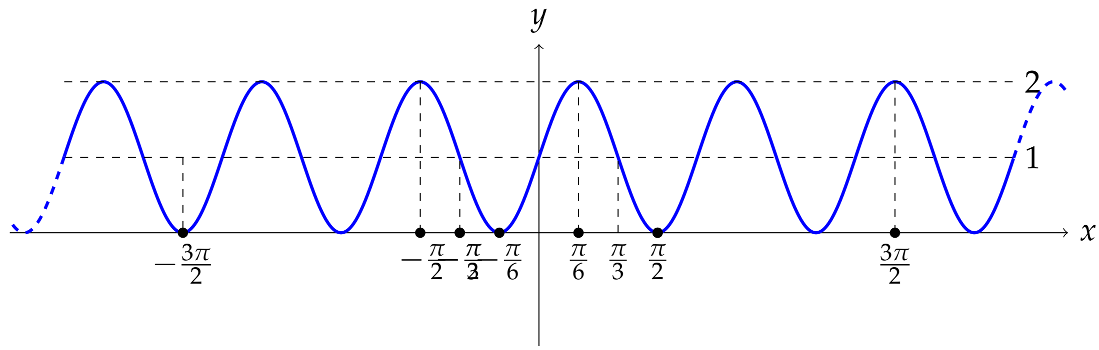


(e) $h(x) = 3 \cdot \sin(x)$



(f) $f(x) = \sin(3x) + 1$

Solução:



(2) Determinar a amplitude e o período das seguintes funções:

(a) $y = 5 \cdot \sin(2t)$;

Solução: A amplitude é 5 e o período é $2\pi/2 = \pi$.

(b) $y = -5 \cdot \sin\left(\frac{t}{2}\right)$;

Solução: A amplitude é 5 e o período é $2\pi/(1/2) = 4\pi$.

(c) $y = 1 + 2 \cdot \sin(t)$.

Solução: A amplitude é 2 e o período é $2\pi/1 = 2\pi$.

(d) $y = 4 \cdot \sin\left(\frac{3}{2} \cdot t\right)$

Solução: A amplitude é 4 e o período é $2\pi/(3/2) = 3\pi$.

(e) $y = 5 + \cos(3x)$;

Solução: A amplitude é 5 e o período é $2\pi/3 = \frac{2\pi}{3}$.

(3) Qual é a diferença entre $\sin(x^2), \sin^2(x)$ e $\sin(\sin(x))$? Expresse cada um dos três como composição.

Solução: Vamos nomear as três funções: $h(x) = \sin(x^2), \ell(x) = \sin^2(x)$ e $m(x) = \sin(\sin(x))$. Considerando as funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = \sin(x)$, a função $h(x) = \sin(x^2)$ se escreve como a composta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 & \mapsto & \sin(x^2) \end{array}$$

Por sua vez, a função ℓ se escreve como a composta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) & \mapsto & \sin^2(x) \end{array}$$

Finalmente, a função m se escreve como a composta:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) & \mapsto & \sin(\sin(x)) \end{array}$$

trata-se, portanto, de três funções distintas, por serem composições distintas.

(4) Em uma tomada, a voltagem V, em volts, é dada em função do tempo (em segundos) pela fórmula:

$$V(t) = V_0 \cdot \sin(120 \cdot \pi \cdot t)$$

(a) O que V_0 representa em termos de voltagem?

Solução: V_0 representa a amplitude da voltagem.

(b) Qual o período dessa função;

Solução: O período desta função é:

$$\frac{2\cancel{\pi}}{120\cancel{\pi}} = \frac{1}{60}$$

(5) Mostre que, para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x/2) \neq 0$ valem:

(a) $\sin(x) = \dfrac{2\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Solução: Para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(x/2) \neq 0$ podemos escrever:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) \overset{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\neq 0}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\sin(x)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\sin(x)\cdot\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1}{2}\sin(x)$$

$$2 \cdot \frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sin(x)$$

(b) $\cos(x) = \dfrac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$

Solução: Notamos, primeiramente, que:

$$\cos(x) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

Para x tal que $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \neq 0$, podemos dividir os dois membros da igualdade acima para obter:

$$\frac{\cos(x)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\sec^2\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \cos(x) = 1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$\therefore \cos(x) = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\sec^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

(6) Mostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\sin(\theta) \neq 0$, tem-se:

$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$$

Solução: Dividindo os dois membros da identidade trigonométrica fundamental:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

por $\sin^2(\theta)$ – o que pode ser feito para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\sin(\theta) \neq 0$ – obtemos:

$$\frac{\sin^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{\sin^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)} = \csc^2(\theta)$$

$$\cot^2(\theta) + 1 = \csc^2(\theta)$$

(7) Mostrar que para todo $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\theta) \neq 0$, tem-se:

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

Solução: Dividindo os dois membros da identidade trigonométrica fundamental:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1$$

por $\cos^2(\theta)$ – o que pode ser feito para qualquer $\theta \in \mathbb{R}$ tal que $\cos(\theta) \neq 0$ – obtemos:

$$\frac{\sin^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} + \frac{\cos^2(\theta)}{\cos^2(\theta)} = \frac{1}{\cos^2(\theta)} = \sec^2(\theta)$$

$$\tan^2(\theta) + 1 = \sec^2(\theta)$$

(8) Determinar o domínio e a imagem de cada uma das funções compostas:

(a) $y = \arctan(\tan(x))$;

Solução: $\text{dom}\,(y) = \text{dom}\,(\tan) = \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ e $\text{im}\,(y) = \text{im}\,(\arctan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(b) $y = \tan(\arctan(x))$;

Solução: $\text{dom}\,(y) = \text{dom}\,(\arctan) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $\text{im}\,(y) = \text{im}\,(\tan) = \mathbb{R}$.

(c) $y = \arcsin(\sin(x))$;

Solução: $\text{dom}\,(y) = \text{dom}\,(\sin) = \mathbb{R}$ e $\text{im}\,(y) = \text{im}\,(\arcsin) = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(d) $y = \sin(\arcsin(x))$.

Solução: $\text{dom}\,(y) = \text{dom}\,(\arcsin) = [-1, 1]$ e $\text{im}\,(y) = \text{im}\,(\sin) = [-1, 1]$.

(9) Nas tabelas abaixo, extraídas de https://www.timeanddate.com/moon/brazil/sao-paulo?month=1&year=2021, você encontrará a "fração visível" da face da Lua voltada para a cidade de São Paulo ao longo do mês de janeiro de 2021, em pontos percentuais, conforme indicado:

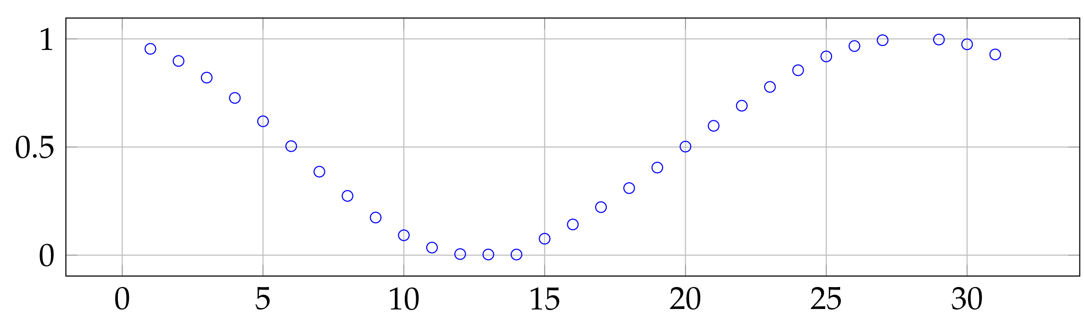
Dia do ano:	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Fração iluminada:	95.4%	89.8%	82.1%	72.7%	61.9%	50.4%	38.6%	27.4%	17.4%

Dia do ano:	10	11	12	13	14	15	16	17	18
Fração iluminada:	9.2%	3.5%	0.5%	0.3%	2.8%	7.6%	14.2%	22.2%	31%

Dia do ano:	19	20	21	22	23	24	25	26	27
Fração iluminada:	40.5%	50.2%	59.8%	69.1%	77.8%	85.5%	91.9%	96.7%	99.4%

Dia do ano:	29	30	31
Fração iluminada:	99.7%	97.5%	92.8%

Os dados destas tabelas estão representados abaixo, no que chamamos de "gráfico de dispersão":



Sabemos que este é um fenômeno periódico, de modo que pode ser ajustado de forma muito boa por uma função senoidal.

Na tabela abaixo, consideraremos cinco dias do mês de janeiro, com as frações visíveis arredondadas:

Dia do ano	1	6	13	20	29
Fração visível	1	0.5	0	0.5	1

Encontre a função senoidal (ou seja, os parâmetros $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ para a função da forma $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot x + c) + d$) que melhor se ajuste aos dados da tabela:

Solução: Observamos, primeiramente, que o fenômeno completa um ciclo em 29 dias, de modo que:

$$b = \frac{2\pi}{29}$$

A amplitude do fenômeno é $\dfrac{\text{fração máxima} + \text{fração mínima}}{2} = \dfrac{1+0}{2} = 0.5$, de modo que $a = 0.5$

A função, portanto, tem o aspecto:

$$f(x) = 0.5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{29} \cdot x + c\right) + d$$

A média da fração visível, neste caso, é 0.5, de modo que $d = 0.5$.

A função, portanto, tem o aspecto:

$$f(x) = 0.5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{29} \cdot x + c\right) + 0.5$$

Falta somente determinarmos c, a constante de fase. Para isto, usamos os dados tabelados: por exemplo, podemos usar que $f(29) = 1$, ou seja, que:

$$1 = f(29) = 0.5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{29} \cdot 29 + c\right) + 0.5 = 0.5 \cdot \sin(2\pi + c) + 0.5,$$

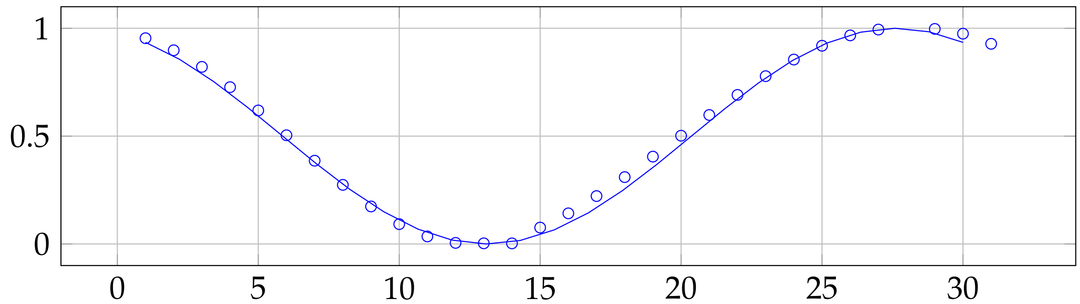
o que ocorre se, e somente se $\sin(2\pi + c) = 1$, ou seja, se, e somente se, $\sin(c) = 1$. Basta tomarmos, portanto, $c = \pi/2$. Assim, a função f tem o aspecto:

$$f(x) = 0.5 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{29} \cdot x + \frac{\pi}{2}\right) + 0.5 = 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{29} \cdot x\right) + 0.5$$

Assim, a função que melhor se ajusta aos dados da tabela, e que nos diz a fração visível da face da Lua voltada para a cidade de São Paulo ao longo dos dias é:

$$\begin{array}{rcl} f: [0,365] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 0.5 \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{29} \cdot x\right) + 0.5 \end{array}$$

Compare a distribuição dos pontos com o gráfico da função encontrada acima:



Veja mais no applet https://www.geogebra.org/m/wkctpb2n.

(10) Qual é o período da função cotangente? Justifique.

Solução: Observando o gráfico da função tangente, podemos apresentar, como palpite, o período como sendo π, uma vez que o gráfico se repete a cada π unidades. Para verificar que π é o período, primeiro mostramos que:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(\cot))(\cot(x+\pi) = \cot(x))$$

De fato, tem-se:

$$\cot(x+\pi) = \frac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \frac{\cos(x)\cos(\pi) - \sin(\pi)\cdot\sin(x)}{\sin(x)\cdot\cos(\pi) + \sin(\pi)\cdot\cos(x)} = \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = \cot(x)$$

Resta, agora, argumentar que não há nenhum número positivo menor do que π com esta propriedade. De fato, se existisse um número $p \in \mathbb{R}_+$, $0 < p < \pi$ com $(\forall x \in \operatorname{dom}(\tan))(\tan(x+p) = \tan(x))$, teríamos:

$$(\forall x \in \operatorname{dom}(\cot))\left(\frac{\cos(x+p)}{\sin(x+p)} = \frac{\cos(x)}{\sin(x)}\right)$$

e portanto:

$$\frac{\cos(x)\cdot\cos(p)-\sin(p)\cdot\sin(x)}{\sin(x)\cdot\cos(p)+\sin(p)\cdot\cos(x)}=\frac{\cos(x)}{\sin(x)}$$

$$\cancel{\cos(x)\cdot\cos(p)\cdot\sin(x)}-\sin(p)\cdot\sin^2(x)=\cancel{\cos(x)\cdot\cos(p)\cdot\sin(x)}+\cos^2(x)\cdot\sin(p)$$

$$\sin(p)\cdot(\cos^2(x)+\sin^2(x))=0$$

$$\sin(p)=0$$

Pela **Proposição 13** das Notas de Aula da Semana 03, $\sin(p)=0 \iff p=k\cdot\pi$ para algum $k\in\mathbb{Z}$.

Teríamos, assim, $0<k\cdot\pi<\pi$, ou seja, um número inteiro k maior que 0 e menor que 1, um absurdo.

(11) Deduzir a seguinte fórmula:

$$\tan(a+b)=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}$$

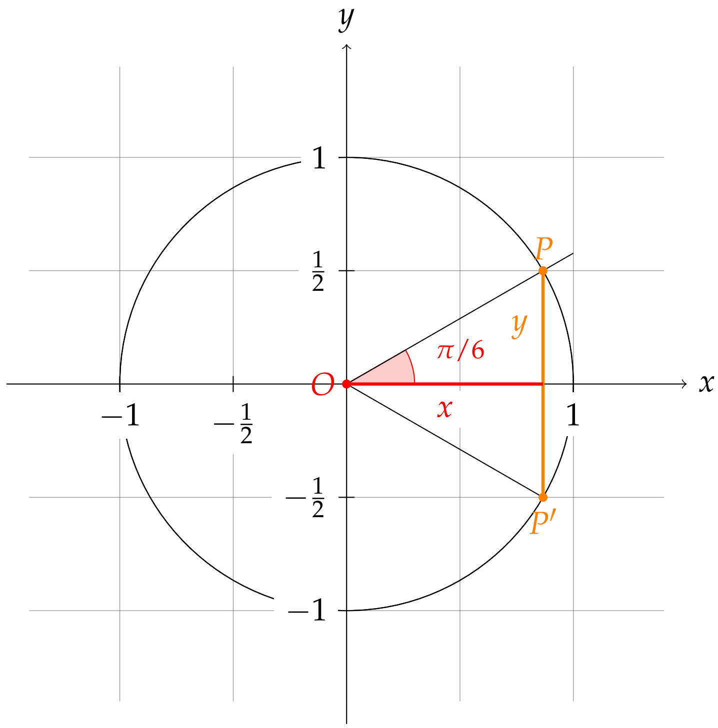
Solução: Sejam $a,b\in\operatorname{dom}(\tan)$ tais que $\tan(a)\cdot\tan(b)\neq 1$. Temos:

$$\tan(a+b)=\frac{\sin(a+b)}{\cos(a+b)}=\frac{\sin(a)\cdot\cos(b)+\sin(b)\cdot\cos(a)}{\cos(a)\cdot\cos(b)-\sin(a)\cdot\sin(b)}=$$

Dividindo o numerador e o denominador da fração acima por $\cos(a)\cdot\cos(b)$, tem-se:

$$=\frac{\dfrac{\sin(a)\cdot\cos(b)+\sin(b)\cdot\cos(a)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}{\dfrac{\cos(a)\cdot\cos(b)-\sin(a)\cdot\sin(b)}{\cos(a)\cdot\cos(b)}}=\frac{\tan(a)+\tan(b)}{1-\tan(a)\cdot\tan(b)}$$

(12) É fácil calcular os valores de $\sin(\theta)$ para certos valores de θ. Por exemplo, seja $\theta=\pi/6$. Marcando o ponto P na circunferência unitária unitária e a sua imagem P', por reflexão no eixo dos xx, obtemos um triângulo equilátero OPP', já que *todos* os seus ângulos têm $\pi/3$ radianos. Com base nestes dados e com os seus conhecimentos sobre triângulos, resolver as seguintes tarefas:



(a) Expresse o comprimento do segmento PP' em função de y;

Solução: Uma vez que o triângulo OPP' é equilátero, todos os seus lados têm a mesma medida, de 1 unidade. Desta forma, $PP' = OP = 1 = 2y$.

(b) Deduza, daí, o valor de $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ e de $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)$.

Solução: Segue do item anterior que $1 = 2y = 2\sin(\pi/6)$, e portanto $y = \sin(\pi/6) = 1/2$. Usando a identidade trigonométrica fundamental, segue que:

$$\cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

donde segue que $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2$.

(13) Usando a fórmula do seno e do cosseno do arco duplo, calcular $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$ e $\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Solução: Temos:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = \cos^2\left(\frac{\pi}{6}\right) - \sin^2\left(\frac{\pi}{6}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

donde:

$$\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

Temos, também:

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\cdot\left(\frac{\pi}{6}\right) = 2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(14) Estabelecer as seguintes igualdades e determinar os conjuntos onde são válidas:

(a) $\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \dfrac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$

Solução: Para todo x tal que $\cos(x) \neq -1$, ou seja, para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\cdot\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ podemos escrever:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Multiplicando ambos os membros da equação dada acima por $2\cos\left(\frac{x}{2}\right)$, obtemos:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} \tag{1}$$

Levando em consideração que:

$$\sin(x) = \sin\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = 2\cdot\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right) \tag{2}$$

e somando os termos extremos correspondentes das duas igualdades:

$$\begin{cases}\cos(x) = \cos\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\\ 1 = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) + \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)\end{cases}$$

obtemos:

$$1 + \cos(x) = 2\cos^2\left(\frac{x}{2}\right) \tag{3}$$

Substituindo (2) e (3) em (1), obtemos:

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{x}{2}\right)}{2\cdot\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin(x)}{1+\cos(x)}$$

(b) $\cot(x+y) = \dfrac{\cot(x)\cdot\cot(y)-1}{\cot(x)+\cot(y)}$

Solução: Para quaisquer $x, y \in \mathbb{R}$ tais que $\sin(x+y) \neq 0$, temos:

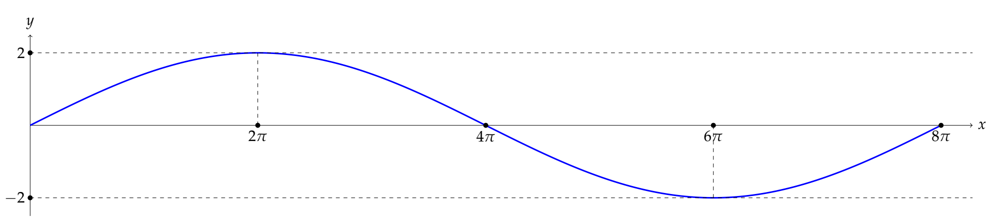
$$\cot(x+y) = \frac{\cos(x+y)}{\sin(x+y)} = \frac{\cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)}{\sin(x)\cdot\cos(y)+\sin(y)\cdot\cos(x)}$$

Dividindo ambos os membros da fração acima por $\sin(x)\cdot\sin(y)$, segue:

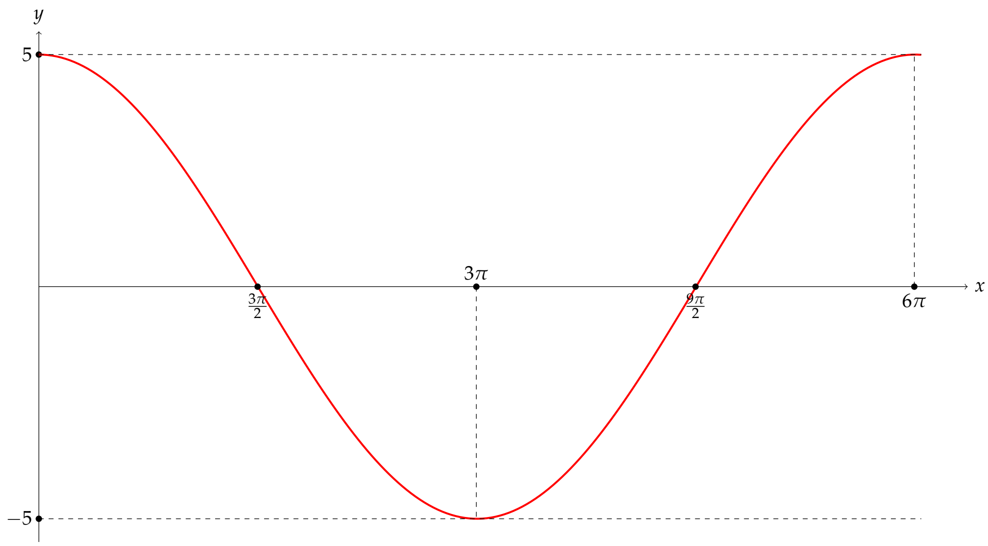
$$\frac{\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(y)-\sin(x)\cdot\sin(y)}{\sin(x)\cdot\sin(y)}}{\dfrac{\sin(x)\cdot\cos(y)+\sin(y)\cdot\cos(x)}{\sin(x)\cdot\sin(y)}} = \frac{\dfrac{\cos(x)\cdot\cos(y)}{\sin(x)\cdot\sin(y)} - \dfrac{\cancel{\sin(x)\cdot\sin(y)}}{\cancel{\sin(x)\cdot\sin(y)}}}{\dfrac{\cancel{\sin(x)}\cdot\cos(y)}{\cancel{\sin(x)}\cdot\sin(y)} + \dfrac{\cancel{\sin(y)}\cdot\cos(x)}{\sin(x)\cdot\cancel{\sin(y)}}} =$$

$$= \frac{\cot(x)\cdot\cot(y)-1}{\cot(y)+\cot(x)}$$

(15) Encontrar, nos exercícios a seguir, uma fórmula possível para o gráfico:

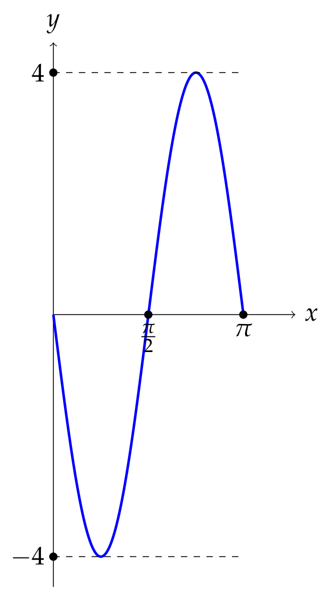
(a) 

Solução: $y = 2\sin\left(\dfrac{x}{4}\right)$



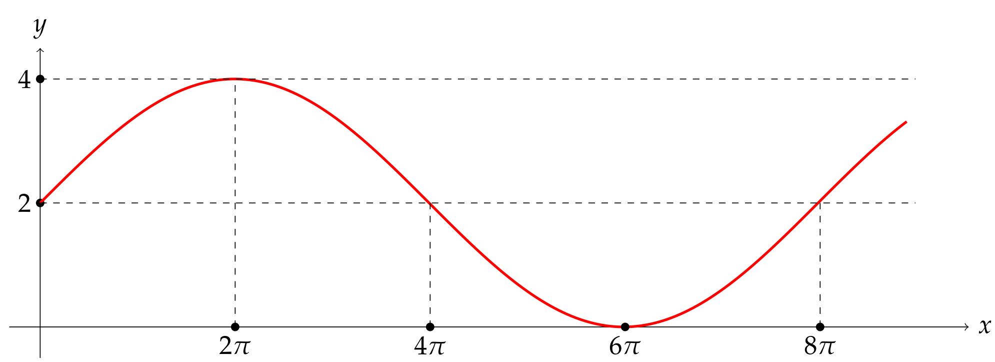
(b)

Solução: $y = 5 \cdot \cos\left(\dfrac{x}{3}\right)$



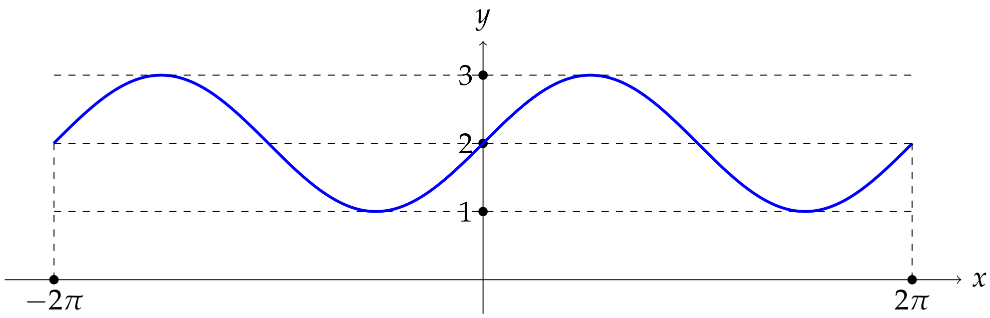
(c)

Solução: $y = -4 \cdot \sin(2x)$.



(d)

Solução: $y = 2 + 2 \cdot \sin\left(\frac{x}{4}\right)$

(e) 

Solução: $y = 2 + \sin(x)$

(16) É bom saber que, quando x é medido em radianos, e para valores pequenos de x, $\sin(x) \approx x$. Mais adiante veremos por que esta aproximação é verdadeira. O erro de aproximação é menor que $\frac{1}{500}$ se $|x| < 0.1$. Acesse o applet https://www.geogebra.org/m/emwsfafc, e procure visualizar os comportamentos de $\sin(x) = y$ e de $y = x$ perto da origem. Clique na tela e utilize o "scroll" do mouse para dar "zoom" na imagem nas proximidades da origem. O que acontece conforme x se aproxima da origem?

Solução: Nota-se que quanto mais próximo x estiver de 0, mais próximos serão os valores de $\sin(x)$ e de x.