

LISTA 04 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

- (1) Mostrar que dado $\varepsilon > 0$, existe um número natural $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$. O que você conclui, em termos de limites, do que acabou de demonstrar?

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, devemos garantir que a condição:

$$\left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| = \frac{1}{n^2} < \varepsilon$$

é satisfeita, ou seja, que vale:

$$\frac{1}{n^2} < \varepsilon \iff \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n$$

Basta tomarmos, portanto, $n_0(\varepsilon) = \left\lceil \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \right\rceil$, e teremos:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} < n \Rightarrow \frac{1}{n^2} = \left| \frac{1}{n^2} - 0 \right| < \varepsilon$$

Concluimos, portanto, que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

*jeancb@ime.usp.br

(2) Usando o fato de que $(\forall n \in \mathbb{N})(|\sin(n)| \leq 1)$, argumentar que:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(n)}{n} = 0$$

Solução: Dado $\varepsilon > 0$, devemos encontrar $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Busquemos, pois, uma condição suficiente, em termos de n maior do que algum número, para que tenhamos:

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

Temos:

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| = \left| \frac{\sin(n)}{n} \right| = \frac{|\sin(n)|}{n} \stackrel{|\sin(n)| \leq 1}{\leq} \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Assim, uma condição suficiente para que:

$$\left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon$$

é exigir que:

$$\frac{1}{n} < \varepsilon,$$

pois:

$$\left(\left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} \right) \& \left(\frac{1}{n} < \varepsilon \right) \Rightarrow \left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| < \varepsilon.$$

Basta, portanto, tomarmos $n_0(\varepsilon) = \lceil 1/\varepsilon \rceil$, e valerão as seguintes implicações:

$$n \geq \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil \Rightarrow n \geq \frac{1}{\varepsilon} \Rightarrow \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{\sin(n)}{n} - 0 \right| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$$

- (3) Mostrar que se $a \in \mathbb{R}$ for tal que $0 < a < 1$, então $a^n \rightarrow 0$. **Dica:** use que $0 < |a^n - 0| = a^n$ e aplique o logaritmo na base a , que é uma função decrecente.

Solução: Devemos demonstrar que, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existe algum $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$$

Note $|a^n - 0| = |a^n| = a^n$, de modo que sempre teremos $0 < a^n$, de modo que se garantirmos que $a^n < \varepsilon$, a condição estará satisfeita.

Aplicando o logaritmo na base a nos dois membros da inequação:

$$a^n < \varepsilon$$

temos:

$$\begin{array}{c} 0 < a < 1 \\ \uparrow \\ \log_a(\varepsilon) < \log_a(a^n) = n \cdot \log_a(a) = n \cdot 1 = n \end{array}$$

Ou seja, basta que valha $\log_a(\varepsilon) < n$. Tomamos, portanto, $n_0(\varepsilon) = \lceil \log_a(\varepsilon) \rceil$, e teremos:

$$\lceil \log_a(\varepsilon) \rceil < n \Rightarrow \log_a(\varepsilon) < n \Rightarrow a^n < \varepsilon \Rightarrow |a^n - 0| < \varepsilon$$

- (4) Argumentar, usando a **Proposição 17** da AGENDA 04, que a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ diverge.

Solução: Observamos que existem duas subsequências constantes: $(-1, -1, -1, \dots)$ e $(1, 1, 1, \dots)$, que convergem para -1 e para 1 , respectivamente. Se a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergisse, pela **Proposição 17**, então todas as suas subsequências convergiriam para o mesmo valor. Como existem duas subsequências convergindo para valores distintos, segue que a sequência $((-1)^n)_{n \in \mathbb{N}}$ *diverge*.

(5) Exibir três subsequências da sequência:

$$(1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, 1, 2, 3, \dots)$$

Solução: Podemos tomar, por exemplo: $(1, 1, 1, \dots)$, $(2, 2, 2, \dots)$, $(3, 3, 3, \dots)$, $(1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \dots)$ e assim por diante.

(6) Com o auxílio de uma calculadora (ou algum software), determinar um valor de $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$ as desigualdades abaixo sejam válidas e calcular a diferença em n_0 :

$$(a) \left| \sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1 \right| < 10^{-3};$$

Solução: Temos:

$$\begin{aligned} \left| \sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1 \right| < 10^{-3} &\iff -10^{-3} < \sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1 < 10^{-3} \iff \\ &\iff 1 - 10^{-3} < \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1 + 10^{-3} \iff 0.999 < \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < 1.001 \end{aligned}$$

Aplicando o logaritmo na base $1/2$ nos membros da desigualdade anterior, obtemos:

$$\log_{\frac{1}{2}}(1.001) < \log_{\frac{1}{2}} \sqrt[n]{\frac{1}{2}} < \log_{\frac{1}{2}}(0.999)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(1.001) < \frac{1}{n} < \log_{\frac{1}{2}}(0.999)$$

Como $1 < 1.001$, sabemos que $\log_{\frac{1}{2}}(1.001) < 0$, e como $(\forall n \in \mathbb{N})(1/n > 0)$, basta garantirmos que:

$$\frac{1}{\log_{\frac{1}{2}}(0.999)} < n$$

$$\frac{1}{0.0014434168696687} \approx 692.800549179 < n$$

Tomamos, portanto, $n_0(10^{-3}) = \lceil 692.800549179 \rceil = 693$, de modo que:

$$n \geq 693 \Rightarrow \left| \sqrt[n]{\frac{1}{2}} - 1 \right| < 10^{-3}$$

Note que $\sqrt[693]{\frac{1}{2}} = 0.99900028766$. Assim, temos $|\sqrt[693]{1/2} - 1| = |0.99900028766 - 1| = 0.00099971233 < 10^{-3}$

(b) $|3^{\frac{1}{n}} - 1| < 10^{-6}$

Solução: Queremos uma condição suficiente para que:

$$|3^{\frac{1}{n}} - 1| < 10^{-6}$$

ou seja,

$$-10^{-6} < 3^{\frac{1}{n}} - 1 < 10^{-6}$$

$$1 - 10^{-6} < 3^{\frac{1}{n}} < 1 + 10^{-6}$$

Tomando o logaritmo na base 3 nos membros da desigualdade acima, temos:

$$\log_3(1 - 10^{-6}) < \log_3\left(3^{\frac{1}{n}}\right) < \log_3(1 + 10^{-6})$$

$$\log_3(1 - 10^{-6}) < \frac{1}{n} \log_3(3) < \log_3(1 + 10^{-6})$$

$$-9.102 \cdot 10^{-7} \approx \log_3(1 - 10^{-6}) < \frac{1}{n} < \log_3(1 + 10^{-6}) \approx 9.102 \cdot 10^{-7}$$

Como para todo $n \in \mathbb{N}$ temos $1/n > 0$, basta garantirmos que:

$$\frac{1}{n} < \approx 9.102 \cdot 10^{-7}$$

$$\frac{1}{9.102 \cdot 10^{-7}} < \approx n$$

$$\begin{aligned} \text{Tomamos, portanto, } n_0(10^{-6}) &= \left\lceil \frac{1}{9.102 \cdot 10^{-7}} \right\rceil = \left\lceil 1098659.63525 \right\rceil = \\ &= \lceil 1098659.63525 \rceil = 1098660 \end{aligned}$$

Temos, por exemplo, $3^{\frac{1}{1098660}} \approx 1.00000099996$, que satisfaz $|3^{\frac{1}{1098660}} - 1| = |1.00000099996 - 1| = 0.00000099996 < 10^{-6}$.

$$(c) \left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < 10^{-9}$$

Solução: Precisamos encontrar uma condição suficiente para que:

$$\left| \frac{1}{n!} - 0 \right| < 10^{-9}$$

ou seja, para que:

$$\frac{1}{n!} < 10^{-9} \iff 10^9 < n!$$

Verificamos que $13! = 6227020800 \sim 10^9$, de modo que:

$$n \geq 13 \Rightarrow 10^9 < n! \Rightarrow \frac{1}{n!} < 10^{-9}$$

Basta, portanto, tomarmos $n_0(10^{-9}) = 13$.

$$(d) \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < 0.001.$$

Solução: Queremos encontrar uma condição suficiente para que:

$$\left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < 0.001$$

ou seja, para que:

$$-0.001 < \left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.001$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, temos $\left(\frac{1}{2}\right)^n > 0$, de modo que basta garantir que:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0.001$$

Aplicando o logaritmo na base $1/2$ nos dois membros da desigualdade acima, temos:

$$n = \log_{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n > \log_{\frac{1}{2}}(0.001) \approx 9.9657842846621$$

Tomamos, portanto, $n_0(10^{-3}) = \lceil 9.9657842846621 \rceil = 10$, e teremos:

$$n \geq 10 \Rightarrow \left| \frac{1}{2^n} - 0 \right| < 10^{-3}$$

Neste caso, temos:

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = 0.0009765625$$

de modo que:

$$\left| \frac{1}{2^{10}} - 0 \right| = \left| 0.0009765625 - 0 \right| = 0.0009765625 < 10^{-3}$$