Gabarito da Lista 06 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Suponha que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ seja definida para todos os valores reais de x, exceto em $x = x_0$. Pode-se afirmar algo a respeito da existência de $\lim_{x\to x_0} f(x)$? Justifique.

Solução: Nada se pode afirmar sobre a existência ou inexistência do limite neste caso. Há casos em que o limite existe e há casos em que o limite não existe. A função:

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin\left(\dfrac{1}{x}\right) \end{array}$$

está definida em todos os valores reais, exceto em $x_0 = 0$, mas o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Por outro lado, se considerarmos:

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

tem-se, evidentemente, que $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$. Desta forma, há casos e casos, e nada se pode afirmar quando se assume apenas que uma função $f : \mathbb{R}\setminus\{x_0\} \to \mathbb{R}$.

(2) Suponha que uma função $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esteja definida para todos os valores de x em $[-1, 1]$. Pode-se afirmar algo sobre a existência de $\lim_{x\to 0} f(x)$? Justifique.

Solução: Nada se pode afirmar sobre a existência ou inexistência do limite neste caso. Há casos em que o limite existe e há casos em que o limite não existe. A função:

*jeancb@ime.usp.br

$$\begin{array}{rcl} f: [-1,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \sin\left(\dfrac{1}{x}\right), \text{ se } x \neq 0 \\ 1, \text{ em caso contrário} \end{cases} \end{array}$$

está definida em todos os valores do intervalo $[-1,1]$, mas o limite $\lim_{x\to 0} f(x)$ não existe. Por outro lado, se considerarmos $g : [-1,1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua qualquer, teremos $\lim_{x\to 0} g(x) = g(0)$, de modo que o limite existe. Desta forma, há casos e casos, e nada se pode afirmar quando se assume apenas que uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ esteja definida em todos os pontos de $[-1,1]$.

(3) Se $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$, f deve ser definida em $x = 1$? Em caso afirmativo, $f(1)$ deve ser igual a 5? Podemos concluir *alguma coisa* sobre os valores de f em $x = 1$? Explique.

Solução: Quando tratamos de limites, a única coisa que se exige do ponto para o qual a variável da função tende é que este seja um ponto de acumulação de seu domínio. Assim, não é necessário que f esteja definida em $x_0 = 1$ para termos $\lim_{x\to 1} f(x) = 5$. Nada se conclui sobre o valor de f em $x_0 = 1$ - isto se 1 pertencer ao domínio de f, o que não se garante.

(4) Cada um dos ítens a seguir dá uma função $f(x)$ e os números L, x_0 e $\varepsilon > 0$. Em cada caso, encontre um intervalo aberto em torno de x_0 no qual a desigualdade $|f(x) - L| < \varepsilon$ valha. Dê, então, um valor para $\delta > 0$ para que todo x satisfazendo $x \in \operatorname{dom}(f)$ e $0 < |x - x_0| < \delta$ seja tal que valha $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(a) $f(x) = x + 1, L = 5, x_0 = 4, \varepsilon = 0.01$;

Solução: Para garantir que $|(x+1) - 5| < 0.01$, basta que tenhamos $0 < |x - 4| < 0.01$. De fato, $0 < |x-4| < 0.01 \Rightarrow |x-4| < 0.01 \iff |(x+1)-5| < 0.01$. Tomemos, assim, $\delta = 0.01$.

(b) $f(x) = 2x - 2, L = -6, x_0 = -2, \varepsilon = 0.02$;

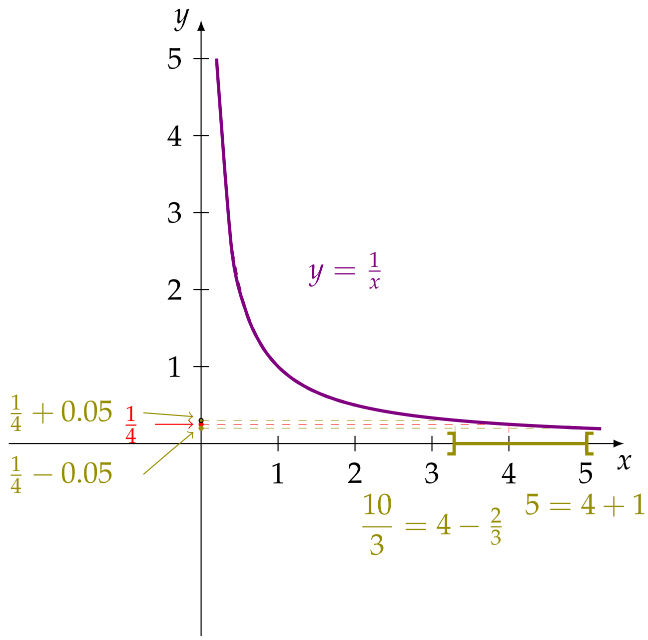
Solução: Para garantir que $|(2x-2) - (-6)| < 0.02$, basta que tenhamos $0 < |x - (-2)| < 0.01$. De fato, $0 < |x - (-2)| < 0.01 \Rightarrow |x+2| < 0.01 \iff 2 \cdot |x+2| < 2 \cdot 0.01 \iff |2x+4| < 0.02 \iff |(2x-2) - (-6)| < 0.02$. Tomemos, assim, $\delta = 0.01$.

(c) $f(x) = \sqrt{x+1}, L = 1, x_0 = 0, \varepsilon = 0.1$;

Solução: Para garantir que $|\sqrt{x+1} - 1| < 0.1$, basta que tenhamos $0.9 < \sqrt{x+1} < 1.1$, ou seja, $0.81 < x + 1 < 1.21$, ou equivalentemente $-0.19 < x < 0.21$. Uma condição suficiente para isto é que $|x| < 0.19$. Assim, tomemos $\delta = 0.19$.

(d) $f(x) = \frac{1}{x}, L = \frac{1}{4}, x_0 = 4, \varepsilon = 0.05.$

Solução: Para garantir que $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| < 0.05$, basta tomarmos $\delta = 1$ (veja o gráfico esboçado abaixo: nele marcamos, no eixo das ordenadas, os valores pelos quais queremos delimitar a distância de $L = \frac{1}{4}$, que neste caso são os pontos $\frac{1}{4} - 0.05$ e $\frac{1}{4} + 0.05$. Traçamos uma reta horizontal por cada um destes pontos, a fim de obter pontos no gráfico da função. Finalmente, projetamos estes pontos no eixo das abscissas para encontrar valores que delimitem a distância de $x_0 = 4$, que neste caso são os pontos $10/3$ e 4).



Obtivemos, graficamente, nosso "palpite": se x for tal que $\frac{10}{3} < x < 5$, teremos $\left|\frac{1}{x} - \frac{1}{4}\right| < 0.05$. Tomamos, portanto, $\delta = \frac{2}{3}$. Agora devemos mostrar que, de fato, que: $0 < |x - 4| < \dfrac{2}{3} \Rightarrow \left|\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{4}\right| < 0.05$. Com efeito,

$$0 < |x-4| < \frac{2}{3} \iff -\frac{2}{3} < x - 4 < \frac{2}{3} \iff \frac{10}{3} < x < \frac{14}{3} \iff$$

$$\iff \frac{3}{14} < \frac{1}{x} < \frac{3}{10} \iff \frac{1}{4} - \frac{1}{28} < \frac{1}{x} < \frac{1}{4} + \frac{1}{20}$$

Como $\dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{20} < \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{28}$, tem-se, para todo x tal que $0 < |x - 4| < \frac{2}{3}$:

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{20}<\frac{1}{4}-\frac{1}{28}<\frac{1}{x}<\frac{1}{4}+\frac{1}{20} \iff -\frac{1}{20}<\frac{1}{x}-\frac{1}{4}<\frac{1}{20} \iff \left|\frac{1}{x}-\frac{1}{4}\right|<0.05$$

(5) Antes de fabricar cilindros para uma área de seção transversal de 9cm^2 para um certo motor, você precisa saber qual desvio pode aceitar em relação ao diâmetro do cilindro ideal, que é de $x_0 = 3.385\text{cm}$, e ter ainda a área diferindo de, no máximo, 0.01cm^2 dos 9cm^2 necessários. Para descobrir isso, você faz $A = \pi\left(\frac{x}{2}\right)^2$ e procura o intervalo no qual tem que manter x para fazer $|A-9| \leq 0.01$. Qual intervalo você encontra?

Solução: Devemos encontrar $\delta > 0$ tal que valha:

$$0 < |x - 3.385| < \delta \Rightarrow \left|\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01$$

ou seja, queremos uma condição suficiente para que $\left|\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01$. Assim,

$$\left|\pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9\right| < 0.01 \iff -0.01 < \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 - 9 < 0.01 \iff 8.99 < \pi \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^2 < 9.01$$

$$\iff \frac{8.99}{\pi} < \left(\frac{x}{2}\right)^2 < \frac{9.01}{\pi} \iff \frac{8.99}{\pi} < \frac{x^2}{4} < \frac{9.01}{\pi} \iff \frac{35.96}{\pi} < x^2 < \frac{36.04}{\pi}$$

$$\iff 11.44642351 < x^2 < 11.4718883$$

Para que isto ocorra, é <u>suficiente</u> que:

$$\iff \sqrt{11.44642351} < x < \sqrt{11.4718883} \iff 3.383256347 < x < 3.387017611$$

O intervalo será, portanto, $]3.383256347, 3.387017611[$.