Lista 07 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Calcular os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to -1} \dfrac{x^3+1}{x^2-1}$;

(b) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2+9}$

(c) $\lim_{x\to p} \dfrac{x^3-p^3}{x-p}$

(d) $\lim_{x\to 1} \dfrac{x^3-1}{x^4+3x-4}$.

(e) $\lim_{x\to 2} \dfrac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}$

(f) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x^3+x^2}{3x^3+x^4+x}$

(g) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x^3-5x^2+8x-4}{x^4-5x-6}$

(i) $\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{x}$

(j) $\lim_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x+3}$

(k) $\lim_{x\to \frac{1}{2}} \dfrac{4x^2-1}{2x-1}$

(ℓ) $\lim_{x\to 3} \dfrac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3}$

(m) $\lim_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

Solução:

(a) Neste caso, $\lim_{x\to -1} x^3+1 = (-1)^3+1 = -1+1 = 0$ e $\lim_{x\to -1} x^2-1 = (-1)^2-1 = 1-1 = 0$ (limite do denominador igual a zero), de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+1}{x^2-1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x-1)\cdot(x+1)}{(x-1)\cdot(x+1)} =$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{(x^2-x-1)\cdot\cancel{(x+1)}}{(x-1)\cdot\cancel{(x+1)}} \overset{\text{“O” Teorema}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to -1} \frac{x^2-x-1}{x-1}$$

---

*jeancb@ime.usp.br

Observamos, agora, que $\lim_{x\to -1} x^2 - x - 1 \overset{\substack{\text{continuidade}\\ \uparrow}}{=} (-1)^2 - (-1) - 1 = 1 - (-1) - 1 = 1 + 1 - 1 = 1$ e que $\lim_{x\to -1} x - 1 \overset{\substack{\text{continuidade}\\ \uparrow}}{=} (-1) - 1 = -2 \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^2 - x - 1}{x - 1} = \frac{(-1)^2 - (-1) - 1}{(-1) - 1} = = \frac{1 + 1 - 1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

(b) Neste caso, $\lim_{x\to 3} x^2 - 9 = 0$ e $\lim_{x\to 3} x^2 + 9 = 18 \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x^2 + 9} = \frac{3^2 - 9}{3^2 + 9} = \frac{9 - 9}{9 + 9} = \frac{0}{18} = 0$$

(c) Neste caso, $\lim_{x\to p} x^3 - p^3 = p^3 - p^3 = 0$ (limite de função polinomial) e $\lim_{x\to p} x - p = p - p = 0$, de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to p} \frac{x^3 - p^3}{x - p} = \lim_{x\to p} \frac{(x^2 + px + p^2)\cdot(x - p)}{(x - p)} =$$

$$\lim_{x\to p} \frac{(x^2 + px + p^2)\cdot\cancel{(x - p)}}{\cancel{(x - p)}} \overset{\substack{\textbf{“O” Teorema}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to p} x^2 + px + p^2 \overset{\substack{\text{continuidade}\\ \uparrow}}{=} p^2 + p\cdot p + p^2 = 3p^2$$

(d) Neste caso, $\lim_{x\to 1} x^3 - 1 = 1^3 - 1 = 0$ (limite de função polinomial) e $\lim_{x\to 1} x^4 + 3x - 4 = 1^4 + 3\cdot 1 - 4 = 4 - 4 = 0$, de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 - 1}{x^4 + 3x - 4} = \lim_{x\to 1} \frac{(x^2 + x + 1)\cdot(x - 1)}{(x^3 + x^2 + x + 4)(x - 1)} =$$

$$\lim_{x\to p} \frac{(x^2 + x + 1)\cdot\cancel{(x - 1)}}{(x^3 + x^2 + x + 4)\cdot\cancel{(x - 1)}} \overset{\substack{\textbf{“O” Teorema}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 1} \frac{x^2 + x + 1}{x^3 + x^2 + x + 4}$$

Observamos que $\lim_{x\to 1}(x^2 + x + 1) = 1^2 + 1 + 1 = 3$ e que $\lim_{x\to 1}(x^3 + x^2 + x + 4) = 1^3 + 1^2 + 1 + 4 = 7 \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+x+1}{x^3+x^2+x+4}=\frac{1^2+1+1}{1^3+1^2+1+4}=\frac{3}{7}.$$

(e) Neste caso, $\lim_{x\to2}\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=0$ (limite de recíproca de função polinomial) e $\lim_{x\to2}x-2=2-2=0$, de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to2}\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{2}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{\frac{2-x}{2\cdot x}}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{-\frac{(x-2)}{2\cdot x}}{x-2}=\lim_{x\to2}=\frac{-\frac{(x-2)}{2\cdot x}}{\frac{(x-2)}{1}}=$$

$$=\lim_{x\to2}-\frac{(x-2)}{2\cdot x}\cdot\frac{1}{(x-2)}=\lim_{x\to2}-\frac{\cancel{(x-2)}}{2\cdot x}\cdot\frac{1}{\cancel{(x-2)}}\overset{\text{"O"Teorema}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to2}-\frac{1}{2\cdot x}$$

Observamos que $\lim_{x\to2}1=1$ e que $\lim_{x\to2}2\cdot x=2\cdot2=4\neq0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to2}-\frac{1}{2\cdot x}=-\frac{1}{2\cdot2}=-\frac{1}{4}.$$

(f) Neste caso, $\lim_{x\to0}x^3+x^2=0^3+0^2=0$ (limite de função polinomial) e $\lim_{x\to0}3x^3+x^4+x=3\cdot0^3+0^4+0=0$, de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^3+x^2}{3x^3+x^4+x}=\lim_{x\to0}\frac{x\cdot(x^2+x)}{x\cdot(3x^2+x^3+1)}=\lim_{\cancel{x}\to0}\frac{\cancel{x}\cdot(x^2+x)}{\cancel{x}\cdot(3x^2+x^3+1)}\overset{\text{"O"Teorema}}{\overset{\uparrow}{=}}\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{3x^2+x^3+1}$$

Observamos que $\lim_{x\to0}x^2+x=0^2+0=0$ e que $\lim_{x\to0}3x^2+x^3+1=3\cdot0^2+0^3+1=1\neq0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to0}\frac{x^2+x}{3x^2+x^3+1}=\frac{0^2+0}{3\cdot0^2+0^3+1}=\frac{0}{1}=0.$$

(g) Notamos que $\lim_{x\to2}(x^3-5x^2+8x-4)=2^3-5\cdot2^2+8\cdot2-4=0$ e que $\lim_{x\to2}(x^4-5x-6)=2^4-5\cdot2-6=16-10-6=0$ (limite do denominador igual a zero), de modo que não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to 2} \frac{x^3 - 5x^2 + 8x - 4}{x^4 - 5x - 6} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cdot(x-2)^2}{(x+1)\cdot(x-2)\cdot(x^2+x+3)} =$$

$$= \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cdot(x-2)^{\cancel{2}}}{(x+1)\cdot\cancel{(x-2)}\cdot(x^2+x+3)} \overset{\substack{\text{“O”Teorema} \\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x^2+x+3)}$$

Observamos, agora, que $\lim_{x\to 2}(x-1)\cdot(x-2) = (2-1)\cdot(2-2) = 0$ (contanto que o limite de cada fator exista, o limite do produto é o produto dos limites) e que $\lim_{x\to 2}(x+1)\cdot(x^2+x+3) = (2+1)\cdot(2^2+2+3) = 3\cdot 9 = 27 \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 2} \frac{(x-1)\cdot(x-2)}{(x+1)\cdot(x^2+x+3)} = \frac{(2-1)\cdot(2-2)}{(2+1)\cdot(2^2+2+3)} = \frac{0}{27} = 0.$$

(i) A função $x \mapsto \sqrt[3]{x}$ é contínua em todo o seu domínio ($\mathbb{R}$), de modo que, para calcular este limite, basta calcular a função no ponto $x = -3$. Assim:

$$\lim_{x\to -3} \sqrt[3]{x} = \sqrt[3]{-3}.$$

Neste caso, observamos que $\lim_{x\to 3}(x^2-9) = 3^2 - 9 = 9 - 9 = 0$ e que $\lim_{x\to 3}(x+3) = 3 + 3 = 6 \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 3} \frac{x^2-9}{x+3} = \frac{3^2-9}{3+3} = \frac{0}{6} = 0.$$

(k) Neste caso, observamos que $\lim_{x\to\frac{1}{2}} 4x^2 - 1 = 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = 4\cdot\frac{1}{4} - 1 = 1 - 1 = 0$ e que $\lim_{x\to\frac{1}{2}}(2x-1) = 2\cdot\frac{1}{2} - 1 = 1 - 1 = 0$. Neste caso, não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{4x^2-1}{2x-1} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{(2x-1)\cdot(2x+1)}{(2x-1)} = \lim_{x\to\frac{1}{2}} \frac{\cancel{(2x-1)}\cdot(2x+1)}{\cancel{(2x-1)}} \overset{\substack{\text{“O”Teorema} \\ \uparrow}}{=}$$

$$= \lim_{x\to\frac{1}{2}} 2x + 1 = 2\cdot\frac{1}{2} + 1 = 1 + 1 = 2.$$

(ℓ) Neste caso, observamos que $\lim_{x\to 3}(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}) = \sqrt[3]{3}-\sqrt[3]{3} = 0$ e que $\lim_{x\to 3}(x-3) = 3-3 = 0$. Neste caso, não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{x-3} = \lim_{x\to 3}\frac{\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3}}{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3})\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3\cdot x}+\sqrt[3]{3^2})} =$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3})}}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{3})}\cdot(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3\cdot x}+\sqrt[3]{3^2})} \overset{\substack{\text{“O”Teorema}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3\cdot x}+\sqrt[3]{3^2}}$$

Notamos que $\lim_{x\to 3} 1 = 1$ e que $\lim_{x\to 3}\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3\cdot x}+\sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{3^2}+\sqrt[3]{3\cdot 3}+\sqrt[3]{3^2} = 3\cdot\sqrt[3]{3^2} \neq 0$. Desta forma, como os limites do numerador e do denominador ambos existem e o limite do denominador não é zero, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 3}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{3\cdot x}+\sqrt[3]{3^2}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{3}}$$

(m) Neste caso, temos $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}-1) = \sqrt{1}-1 = 0$ e $\lim_{x\to 1}(x-1) = 1-1 = 0$. Neste caso, não podemos avaliar o limite diretamente por substituição. Fazemos, portanto, uma fatoração:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{(\sqrt{x}-1)\cdot(\sqrt{x}+1)} = \lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(\sqrt{x}-1)}}{\cancel{(\sqrt{x}-1)}\cdot(\sqrt{x}+1)} \overset{\substack{\text{“O”Teorema}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1}$$

Como $\lim_{x\to 1} 1 = 1$ e $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x}+1) = \sqrt{1}+1 = 2 \neq 0$,podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1}+1} = \frac{1}{2}$$