Lista 09 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Calcular os seguintes limites:

(a) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{5x^3-6x+1}{6x^3+2}$;

Solução: Tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{5x^3-6x+1}{6x^3+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3 \cdot \left(5-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^3 \cdot \left(6+\frac{2}{x^3}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3} \cdot \left(5-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3} \cdot \left(6+\frac{2}{x^3}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(5-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3}\right)}{\left(6+\frac{2}{x^3}\right)}$$

Observe que:

$$\lim_{x\to\infty} 5-\frac{6}{x^2}+\frac{1}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 5 - 6\cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 5-0+0=5$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} 6+\frac{2}{x^3} = \lim_{x\to\infty} 6 + 2\cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 6+2\cdot 0 = 6 \neq 0$$

de modo que podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites. Assim:

*jeancb@ime.usp.br

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{5 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}}{6 + \frac{2}{x^3}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\left(5 - \frac{6}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)}{\lim_{x\to\infty}\left(6 + \frac{2}{x^3}\right)} = \frac{\lim_{x\to\infty} 5 - 6\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim_{x\to\infty} 6 + 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3}} =$$

$$= \frac{5 - 6\cdot 0 + 0}{6 + 2\cdot 0} = \frac{5}{6}$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{5x^3 - 6x + 1}{6x^3 + 2} = \frac{5}{6}.$$

(b) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+1}{x^2-2}$

Solução: Tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x^2-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2\cdot\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(1 - \frac{2}{x^2}\right)} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}}.$$

Note que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x^2} = 0 + 0 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{2}{x^2} = \lim_{x\to\infty} 1 - 2\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} = 1 - 0 = 1 \neq 0$$

Sendo assim, podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{\lim_{x\to\infty} 1 - \frac{2}{x^2}} = \frac{0}{1} = 0.$$

(c) $\lim_{x\to\infty}(x^3 - 2x + 3)$

Solução: Podemos escrever:

$$x^3 - 2x + 3 = x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right)$$

Uma vez que:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 = \infty$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - 2\cdot \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2} + 3\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^3} = 1 - 2\cdot 0 + 3\cdot 0 = 1,$$

segue que:

$$\lim_{x\to\infty} x^3 - 2x + 3 = \lim_{x\to\infty} x^3 \cdot \left(1 - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}\right) = \infty$$

(d) $\lim_{x\to-\infty}\dfrac{2+x}{3+x^2}$.

Solução: Podemos escrever:

$$\frac{2+x}{3+x^2} = \frac{x^2\cdot\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}{x^2\cdot\left(\frac{3}{x^2}+1\right)} = \frac{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{3}{x^2}+1\right)} = \frac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+1}$$

Assim,

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2+x}{3+x^2} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+1}$$

Temos $\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x} = 0$ e $\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}+1 = 0+1 = 1$, de modo que:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}{\frac{3}{x^2}+1} = \frac{\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{x^2}+\frac{1}{x}}{\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{x^2}+1} = \frac{0}{1} = 0$$

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x}+1}{x+3}$

Solução: Tem-se:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}\cdot\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\sqrt{x}\cdot\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)}$$

Sabe-se que $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} = \infty$, de modo que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3}{\sqrt{x}} = 0$$

Portanto, uma vez que:

$$\lim_{x\to\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 1+0 = 1$$

e

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{x} + \frac{3}{\sqrt{x}} = \infty$$

segue-se que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}+1}{x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}{\left(\sqrt{x}+\frac{3}{\sqrt{x}}\right)} = 0$$

(f) $\lim_{x\to 3_+} \dfrac{5}{3-x}$

Solução: Neste caso convém efetuarmos a mudança de variável $u = 3-x$. Para determinar o comportamento de u conforme x tende a 3, devemos calcular:

$$\lim_{x\to 3} u = \lim_{x\to 3} (3-x) = 3-3 = 0.$$

Resta verificar se u tende a zero pela direita e/ou pela esquerda. Para tanto, observamos que fazer x tender a 3 pela direita equivale a tomar valores de x cada vez mais próximos de 3 *e maiores do que* 3. Assim,

$$x > 3 \Rightarrow u = 3 - x < 0,$$

ou seja, u tende a zero pela esquerda (por valores *menores* do que 0). Desta forma, tem-se:

$$\lim_{x \to 3_+} \frac{5}{3-x} = \lim_{u \to 0_-} \frac{5}{u} = 5 \cdot \lim_{u \to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty$$

(g) $\lim_{x \to 0_+} \dfrac{3}{x^2 - x}$

Solução: Fazemos a mudança de variável:

$$u = x^2 - x$$

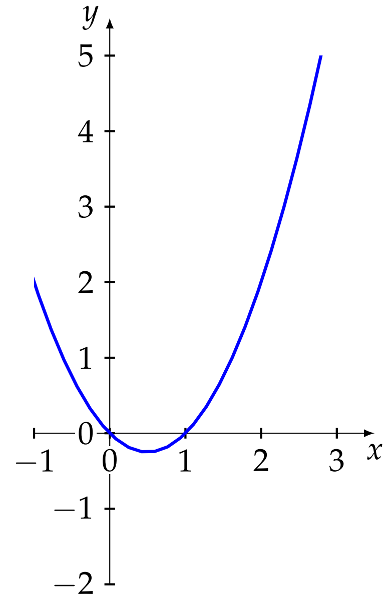
e verificamos o comportamento de u conforme x tende a 0 calculando:

$$\lim_{x \to 0} u = \lim_{x \to 0} x^2 - x = 0^2 - 0 = 0$$

Para verificar se $u = x^2 - x$ está se aproximando de 0 pela direita ou pela esquerda, estudamos o sinal de $x^2 - x$:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{3}{x^2 - x} = \lim_{x \to 0_+} \frac{3}{x \cdot (x-1)}$$

Observamos, no gráfico de $u(x) = x^2 - x$ abaixo:



que para valores de x à direita (maiores) de 0, tem-se $x^2 - x < 0$. Desta forma, ao fazermos $x \to 0_+$, obtemos $u \to 0_-$. Assim,

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{3}{x^2 - x} = \lim_{u \to 0_-} \frac{3}{u} = 3 \cdot \lim_{u \to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty$$

(h) $\lim_{x \to 1_-} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$

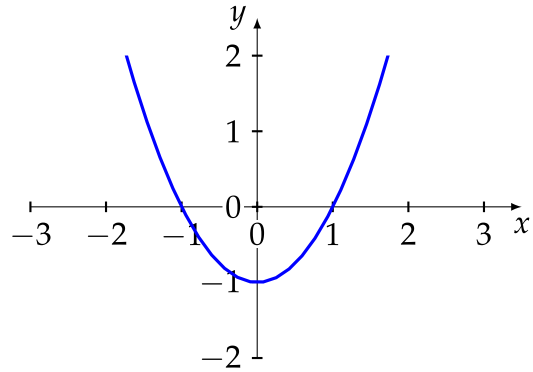
Solução: Notemos, primeiramente, que:

$$\lim_{x \to 1_-} (2x+3) = 2 \cdot 1 + 3 = 5$$

de modo que o limite ficará determinado ao calcularmos:

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{1}{x^2 - 1}$$

Esboçando o gráfico de $y = x^2 - 1$, concluímos que para valores de x *menores* que 1 (e maiores que -1), temos:



$$x^2 - 1 < 0$$

Desta forma, conforme x tende a 1 por valores *menores* do que 1, $x^2 - x$ tende a zero por valores *menores* que zero (à esquerda). Assim,

$$x \to 1_- \Rightarrow y \to 0_-$$

de modo que:

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{1}{x^2 - 1} = \lim_{y \to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty$$

Temos, portanto:

$$\lim_{x \to 1_-} \frac{2x + 3}{x^2 - 1} = -\infty$$

(i) $\lim_{x \to \infty}(x - \sqrt{x + 3})$

Solução: Fazemos a mudança de variável:

$$u = x + 3$$

e notamos que:

$$\lim_{x \to \infty} u = \lim_{x \to \infty} x + 3 = \infty$$

Assim, o limite fica:

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x+3} = \lim_{u\to\infty} (u-3) - \sqrt{u} = \lim_{u\to\infty} (u - \sqrt{u}) - 3$$

Calculamos:

$$\lim_{u\to\infty} (u - \sqrt{u}) = \lim_{u\to\infty} \sqrt{u} \cdot (\sqrt{u} - 1)$$

Uma vez que:

$$\lim_{u\to\infty} \sqrt{u} = \infty$$

e

$$\lim_{u\to\infty} (\sqrt{u} - 1) = \infty$$

segue que:

$$\lim_{u\to\infty} (u - \sqrt{u}) = \infty$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty} x - \sqrt{x+3} = \lim_{u\to\infty} (u - \sqrt{u}) - 3 = \infty$$

(j) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1}$

Solução: Fazemos a mudança de variável: $u = x+3$, e observando que $\lim_{x\to\infty} u = \lim_{x\to\infty} x+3 = \infty$, segue que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim_{u\to\infty} \frac{(u-3)+\sqrt{u}}{2u-7}$$

Colocando u em evidência no numerador e no denominador, obtemos:

$$\lim_{u\to\infty} \frac{(u-3)+\sqrt{u}}{2u-7} = \lim_{u\to\infty} \frac{\cancel{u}\cdot\left(1-\frac{3}{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}\right)}{\cancel{u}\cdot\left(2-\frac{7}{u}\right)} = \lim_{u\to\infty} \frac{1-\frac{3}{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}}{2-\frac{7}{u}}$$

Temos:

$$\lim_{u\to\infty} 1 - \frac{3}{u} + \frac{1}{\sqrt{u}} = \lim_{u\to\infty} 1 - 3\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} + \lim_{u\to\infty}\frac{1}{\sqrt{u}} = 1 - 3\cdot 0 + 0 = 1$$

$$\lim_{u\to\infty} 2 - \frac{7}{u} = \lim_{u\to\infty} 2 - 7\cdot \lim_{u\to\infty}\frac{1}{u} = 2 - 7\cdot 0 = 2 \neq 0$$

e portanto:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\sqrt{x+3}}{2x-1} = \lim_{u\to\infty}\frac{1-\frac{3}{u}+\frac{1}{\sqrt{u}}}{2-\frac{7}{u}} = \frac{1}{2}$$

(k) $\lim_{x\to 2}\dfrac{x}{(x-2)^2}$

Solução: Note que:

$$\frac{x}{(x-2)^2} = x\cdot\frac{1}{(x-2)^2}$$

e como:

$$\lim_{x\to 2} x = 2,$$

o limite ficará determinado ao calcularmos:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2}$$

Para isto, fazemos uma mudança de variável: $u = x-2$, observando que $\lim_{x\to 2} u = \lim_{x\to 2} x-2 = 0$:

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^2} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u^2} = \infty$$

(ℓ) $\lim_{x\to 2_+}\dfrac{x+3}{x+2}$

Solução: Nesta caso temos uma função racional cujo denominador não se anula em 2 – e que, portanto, é contínua em 2. Assim,

$$\lim_{x\to 2_+} \frac{x+3}{x+2} = \frac{2+3}{2+2} = \frac{5}{4}$$

(m) $\lim_{x\to 1_+} \dfrac{2-x}{(1-x)^3}$

Solução: Fazemos a mudança de variável $u = 1-x$, e notamos que $x \to 1_+ \Rightarrow u \to 0_+$ (pois para valores de x *maiores* que 1 tem-se $1-x < 0$). Assim, devemos calcular o limite:

$$\lim_{x\to 1_+} \frac{2-x}{(1-x)^3} = \lim_{u\to 0_-} \frac{1+u}{u^3} = -\infty$$

(2) Sabe-se que $\lim_{x\to\infty} \left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$. Mostre, usando uma mudança de variável, que:

$$\lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}} = e.$$

$$\lim_{x\to\infty} u = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

e substituindo $\frac{1}{x}$ por u na expressão $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$, segue que:

$$e = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{u\to 0}(1+u)^{\frac{1}{u}}$$

(3) Considere a função:

$$\begin{aligned} f:\mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ -1, & \text{se } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \end{aligned}$$

O limite:

$$\lim_{x\to 0} x \cdot f(x)$$

existe? Por quê?

$$(\forall x \in \mathbb{R})(|f(x)| = 1 \leq 1),$$

e da função $x \mapsto x$ ser infinitésima em 0, ou seja,

$$\lim_{x \to 0} x = 0.$$

Assim, como $x \cdot f(x)$ é o produto de uma função limitada por uma infinitésima, de modo que o limite existe e é igual a 0.

(4) Calcular:

(a) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x$

Solução: e^2

(b) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^{x+2}$

Solução: e

(c) $\lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{2x}\right)^x$

Solução: $\sqrt{e}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x$

Solução: Temos:

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{x+2}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{(x+1)+1}{x+1}\right)^x = \lim_{x\to\infty} \left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^x =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)^{x+1}}{\left(1 + \frac{1}{x+1}\right)} = e$$