

GABARITO DA LISTA 10 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

- (1) Sejam $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funções contínuas com $f(3) = 7$ e $\lim_{x \rightarrow 3} [2f(x) - g(x)] = 4$. Calcular $g(3)$.

Solução: Sendo f contínua em $x_0 = 3$, temos $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = f(3) = 7$. Assim:

$$\lim_{x \rightarrow 3} [2 \cdot f(x) - g(x)] = 2 \cdot \lim_{x \rightarrow 3} f(x) - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 2 \cdot 7 - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$$

$$14 - \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4$$

$$-\lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 4 - 14 = -10$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 3} g(x) = 10$$

- (2) Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que:

$$\left(\forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\right) (x^2 \cdot \cos(x) \leq f(x) \leq x \cdot \sin(x))$$

Mostrar que f é contínua em $x_0 = 0$.

Solução: Para verificar a continuidade de f em $x_0 = 0$, devemos constatar que:

*jeancb@ime.usp.br

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = f(0)$$

Como para todo x entre $-\pi/2$ e $\pi/2$ tem-se $x^2 \cdot \cos(x) \leq f(x) \leq x \cdot \sin(x)$, e em particular para $x = 0$, vale: $0 = 0^2 \cdot \cos(0) \leq f(0) \leq 0 \cdot \sin(0) = 0$. Logo $f(0) = 0$.

Temos, também:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(x) = 0^2 \cdot \cos(0) = 0 \cdot 1 = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(x) = 0 \cdot \sin(0) = 0$$

Pelo **Teorema do Confronto**, segue que:

$$0 = \lim_{x \rightarrow 0} x^2 \cdot \cos(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(x) = 0$$

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$$

e a função f é contínua em 0.

- (3) Argumentar que a função $f(x) = x^3 + x - 1$ tem pelo menos uma raiz no intervalo $[0, 1]$.

Solução: Observamos que $f(0) = 0^3 + 0 - 1 = -1 < 0$ e que $f(1) = 1^3 + 1 - 1 = 2 - 1 = 1 > 0$. Como a função f , por ser polinomial, é contínua, segue do **Teorema do Valor Intermediário** que existe $c \in]0, 1[$ tal que $f(c) = c^3 + c - 1 = 0$, ou seja, existe c que é raiz de f .

- (4) Provar que a equação $x^3 - 4x + 2 = 0$ admite três raízes reais distintas.

Solução: Seja $f(x) = x^3 - 4x + 2$. Observe que esta função é contínua, por ser polinomial. Temos $f(-3) = (-3)^3 - 4 \cdot (-3) + 2 = -27 + 12 + 2 = -27 + 14 = -13 < 0$ e $f(-1) = (-1)^3 - 4 \cdot (-1) + 2 = -1 + 4 + 2 = 5 > 0$, de modo que, pelo **Teorema do Valor Intermediário**, a função tem uma raiz em $[-3, -1]$. Também temos $f(0) = 0^3 - 4 \cdot 0 + 2 = 2 > 0$ e $f(1) = 1^3 - 4 \cdot 1 + 2 = -1 < 0$, de modo que pelo **Teorema do Valor Intermediário**, f admite uma uma raiz em $[0, 1]$. Finalmente, $f(2) = 2^3 - 4 \cdot 2 + 2 = 8 - 8 + 2 = 2 > 0$, pelo **Teorema do Valor Intermediário** f admite uma raiz em $[1, 2]$.

(5) A equação $\cos(x) = x$ admite solução? Justifique.

Solução: Consideremos a função dada por $\phi(x) = \cos(x) - x$, que é contínua por ser a diferença de duas funções contínuas (a saber, as funções cosseno e a identidade). A existência de uma solução para a equação $\cos(x) = x$ equivale à existência de um ponto $\bar{x}$ tal que $\phi(\bar{x}) = 0$. Observando que $\phi(0) = \cos(0) - 0 = 1 - 0 = 1 > 0$ e que $\phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} < 0$, segue do **Teorema do Valor Intermediário** que existe pelo menos um ponto $\bar{x} \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tal que $\phi(\bar{x}) = 0$, ou seja, tal que $\cos(\bar{x}) = \bar{x}$.

(6) Pode-se demonstrar que existe $\delta > 0$ tal que, para qualquer $x \in]-\delta, \delta[$ tem-se:

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \cdot \sin(x)}{2 - 2 \cdot \cos(x)} < 1$$

O que se pode dizer a respeito do limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{2 - 2 \cdot \cos(x)}?$$

Justifique.

Solução: Uma vez que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 - \frac{x^2}{6} = 1 - \frac{0^2}{6} = 1,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} 1 = 1$$

e:

$$(\forall x \in]-\delta, \delta[) \left(1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x \cdot \sin(x)}{2 - 2 \cdot \cos(x)} < 1 \right)$$

segue do **Teorema do Confronto** que:

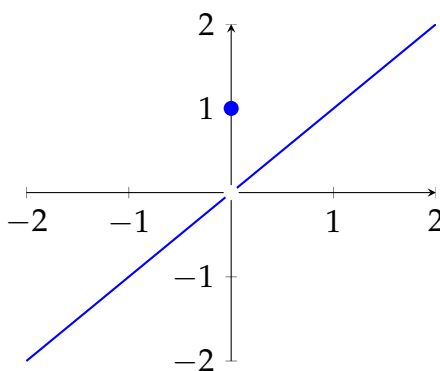
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \cdot \sin(x)}{2 - 2 \cdot \cos(x)} = 1.$$

(7) Considere a função dada por:

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} x, & \text{se } x \neq 0 \\ 1, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Esboce o gráfico desta função. Observe que $f(-1) = -1 < 0$ e que $f(1) = 1 > 0$ – e no entanto, não existe nenhum $\bar{x} \in]-1, 1[$ tal que $f(\bar{x}) = 0$. Isto é uma contradição com o **Teorema do Valor Intermediário**? Justifique.

Solução: O gráfico da função é:



Observamos que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \neq 1 = f(0),$$

de modo que a função f é *descontínua* em $x_0 = 0$. O **Teorema do Valor Intermediário**, por sua vez, só se aplica a funções contínuas em *todo* o intervalo – o que não é o caso. Não há, portanto, nenhuma contradição.