Resolução da Lista 10 de MAT0121

Gabriel Sallouti Allegrini

Questão 1

(a) Para obter a diferencial, precisamos das derivadas parciais no ponto $(1,1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(x^2+y^2) = 2x \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(x^2+y^2) = 2y \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = 2$$

Assim, podemos obter a diferencial substituindo esses valores em:

$$df(x_0,y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy$$

Logo, obtemos:

$$df(1,1) = 2\cdot dx + 2\cdot dy$$

(b) Para obter a diferencial, precisamos das derivadas parciais no ponto $(0,0)$:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(x\cdot\cos(y)) = \cos(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial x}(0,0) = 1$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(x\cdot\cos(y)) = -x\sin(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial g}{\partial y}(0,0) = 0$$

Assim, podemos obter a diferencial substituindo esses valores em:

$$dg(x_0,y_0) = \frac{\partial g}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot dx + \frac{\partial g}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot dy$$

Logo, obtemos:

$$dg(0,0) = 1\cdot dx$$

(c) Para obter a diferencial, precisamos das derivadas parciais no ponto $(2,5)$:

$$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(x^2+y^3) = 2x \;\Rightarrow\; \frac{\partial h}{\partial x}(2,5) = 4$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(x^2 + y^3) = 3y^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial h}{\partial y}(2,5) = 75$$

Assim, podemos obter a diferencial substituindo esses valores em:

$$dh(x_0, y_0) = \frac{\partial h}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot dx + \frac{\partial h}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot dy$$

Logo, obtemos:

$$dh(2,5) = 4 \cdot dx + 75 \cdot dy$$

Questão 2

Definindo a função $v(r,h)$ como a função que calcula o volume de uma caixa cilíndrica com base no raio (r) e na altura (h), temos:

$$v(r,h) = \pi r^2 \cdot h$$

Para obter a diferencial, precisamos das derivadas parciais no ponto $(3,8)$:

$$\frac{\partial v}{\partial r}(r,h) = \frac{d}{dr}(\pi r^2 \cdot h) = 2\pi r \cdot h \;\Rightarrow\; \frac{\partial v}{\partial r}(3,8) = 48\pi$$

$$\frac{\partial v}{\partial h}(r,h) = \frac{d}{dh}(\pi r^2 \cdot h) = \pi r^2 \;\Rightarrow\; \frac{\partial v}{\partial h}(3,8) = 9\pi$$

Logo, obtemos:

$$dv(3,8) = 48\pi \cdot dr + 9\pi \cdot dh$$

Assim, através do Teorema do Incremento e considerando que valores $\Delta r = \Delta h = \pm 0,05m$ são consideravelmente pequenos, podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\Delta v(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) \approx dv(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y)$$

Assim, o erro máximo cometido no cálculo do volume é:

$$dv(x_0, y_0)(\Delta x, \Delta y) = 48\pi \cdot 0,05 + 9\pi \cdot 0,05 \approx 8,95m^3$$

Questão 3

(a) Para isso precisamos calcular as derivadas parciais de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(\sin(x \cdot y)) = \cos(x \cdot y) \cdot y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(\sin(x \cdot y)) = \cos(x \cdot y) \cdot x$$

Temos que tanto $f(x,y)$ como suas derivadas parciais de primeira ordem estão definidas para qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$. Além disso, temos que as suas derivadas parciais são contínuas em todo $\mathbb{R}^2$, uma vez que são os produtos de funções polinomiais por funções trigonométricas (ambas obrigatoriamente contínuas). Assim, pelo Teorema 37 da Agenda 7, temos que a função é diferenciável em todo $\mathbb{R}^2$ também.

(b) Para isso precisamos calcular as derivadas parciais de $f(x,y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{d}{dx}(e^{x\cdot y}) = e^{x\cdot y}\cdot y \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(5,2) = 2e^{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{d}{dy}(e^{x\cdot y}) = e^{x\cdot y}\cdot x \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(5,2) = 5e^{10}$$

Temos que tanto $f(x,y)$ como suas derivadas parciais de primeira ordem estão definidas em todo $\mathbb{R}^2$. Agora, podemos calcular os limites das derivadas parciais quanto tendem a $(5,2)$, de modo a descobrir se são contínuas nesse ponto:

$$\lim_{(x,y)\to(5,2)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(5,2)} e^{x\cdot y}\cdot y = 2e^{10}$$

$$\lim_{(x,y)\to(5,2)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{(x,y)\to(5,2)} e^{x\cdot y}\cdot x = 5e^{10}$$

Assim, uma vez que as derivadas parciais são contínuas nesse ponto, temos pelo Teorema 37 da Agenda 7 que a função $f(x,y)$ é diferenciável em $(5,2)$

(c) Novamente, pelo Teorema 37 da Agenda 7 podemos garantir que essa função é diferenciável em um ponto $(x_0,y_0)\in \operatorname{int}.(U)$. Isso uma vez que o enunciado garante que a função é de classe $\mathcal{C}^2(U;\mathbb{R})$, ou seja, suas derivadas parciais são contínuas.

Questão 4

Para obtermos a pseudo-linearização de $f(x,y)$, precisamos calcular $f(3,2)$, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(3,2)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(3,2)$. Essa linearização obrigatoriamente existe, o que pode ser visto pelo Corolário 29 da Agenda 7. Uma vez que a função é polinomial, temos que ela é diferenciável, logo, as derivadas parciais existem e consequentemente também existe uma pseudo-linearização.

$$f(3,2) = 3^2 - 3\cdot 2 + \frac{1}{2}2^2 - 3 = 2$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2x - y \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(3,2) = 4$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -x + y \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(3,2) = -1$$

Agora, basta calcular a linearização substituindo os valores em:

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$L(x,y) = 2 + 4\cdot(x-3) - 1\cdot(y-2) \;\Rightarrow\; L(x,y) = 4x - y - 8$$

Agora, para obtermos o erro máximo da linearização dentro do retângulo dado, precisamos calcular as derivadas parciais de ordem dois da função $f(x,y)$ e encontrar um majorante simultâneo para o módulo dessas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -1$$

Assim, temos que o majorante é $M = 2$, agora basta calcular o erro máximo para um ponto (x,y) dentro do retângulo:

$$erro \leq \frac{M}{2}\cdot(|x-x_0| + |y-y_0|)^2 \;\Rightarrow\; erro \leq (|x-3| + |y-2|)^2$$

Questão 5

Para obtermos a pseudo-linearização de $f(x,y)$, precisamos calcular $f(0,\pi/2)$, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/2)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/2)$.

$$f(0,\pi/2) = e^0\cdot\cos(\pi/2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = e^x\cdot\cos(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial x}(0,\pi/2) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -e^x\cdot\sin(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial f}{\partial y}(0,\pi/2) = -1$$

Agora, basta calcular a linearização substituindo os valores em:

$$L(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\cdot(y-y_0)$$

$$L(x,y) = 0 + 0\cdot(x-0) - 1\cdot(y-\pi/2) \;\Rightarrow\; L(x,y) = -y + \pi/2$$

Agora, para obtermos o erro máximo da linearização dentro do retângulo dado, precisamos calcular as derivadas parciais de ordem dois da função $f(x,y)$ e encontrar um majorante simultâneo para o módulo dessas derivadas:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = e^x\cdot\cos(y) \;\Rightarrow\; \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,\pi/2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = -e^x \cdot \cos(y) \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,\pi/2) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = -e^x \cdot \sin(y) \ \Rightarrow \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,\pi/2) = -1$$

Assim, temos que o majorante é $M = 1$, agora basta calcular o erro máximo para um ponto (x, y) dentro do retângulo:

$$erro \leq \frac{M}{2} \cdot (|x - x_0| + |y - y_0|)^2 \ \Rightarrow \ erro \leq \frac{1}{2} \cdot (|x| + |y - \pi/2|)^2$$

Questão 6

Temos que a função que calcula o determinante dessa matriz é $f(a, b, c, d) = a \cdot d - b \cdot c$ Assim, para sabermos a sensibilidade (módulo da derivada parcial) em relação a cada variável, precisamos calcular todas as derivadas parciais de primeira ordem dessa função:

$$|\frac{\partial f}{\partial a}| = |d|$$

$$|\frac{\partial f}{\partial b}| = |-c|$$

$$|\frac{\partial f}{\partial c}| = |-b|$$

$$|\frac{\partial f}{\partial d}| = |a|$$

Assim, sabendo que $|a|$ é muito maior que $|b|$,$|c|$ e $|d|$, a função é mais sensível em relação à variável d, cuja sensibilidade vale $|a|$.

Questão 7

(a) Para calcular as derivadas parciais de $f(x, y)$, precisamos usar a definição formal de derivada parcial:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\dfrac{\Delta x \cdot 0^2}{\Delta x^2 + 0^2} - 0}{\Delta x} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(0, \Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\dfrac{0 \cdot \Delta y^2}{0^2 + \Delta y^2} - 0}{\Delta y} = 0$$

(b) Temos que a composição das funções resulta em:

$$\begin{array}{rcl} f \circ g: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & (f \circ g)(t) & \mapsto & \begin{cases} \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \cdot t, \text{ se } t \neq 0 \\ 0, \text{ se } t = 0 \end{cases} \end{array}$$

Note que agora temos uma função de apenas uma variável (t), de modo que a diferenciabilidade em $t = 0$ é equivalente à derivabilidade em $t = 0$. Mas, como a função pode ser perfeitamente descrita por $(f \circ g)(t) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \cdot t$, mesmo quando $t = 0$, e ainda temos que essa função é linear em relação a t, temos que a função é derivável em $t = 0$ e seu valor é:

$$(f \circ g)'(t) = \frac{d}{dt}\left(\frac{ab^2}{a^2+b^2} \cdot t\right) = \frac{ab^2}{a^2+b^2}$$

Assim, obtemos $(f \circ g)'(t) = \dfrac{ab^2}{a^2+b^2} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$

(c) Temos que o gradiente de $f(x, y)$ é:

$$\nabla f(0,0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0), \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right) = (0,0)$$

Desse modo, temos que $\nabla f(0,0) \cdot g'(0) = 0$, uma vez que $\nabla f(0,0) = (0,0)$

Questão 8

Para resolver esse exercício, podemos tomar a Proposição 6 da Agenda 8 e expandir a definição para um função $f(x, y, z)$, de modo que podemos calcular as derivadas parciais de $F(u, v)$ a partir de:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial z}{\partial u}(u,v)$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u,v) + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(u,v)$$

No caso de $u = v = 1$, temos $x = y = z = 0$, de modo que basta substituir os valores:

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u,v) = 2 \cdot 1 + 0 + 0 = 2$$

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u,v) = 2 \cdot (-1) + 0 + 0 = -2$$

Questão 9

Para a resolução dos itens desse exercício, será utilizado o Teorema 1 da Agenda 8, que diz que:

$$\frac{d}{dt}(f \circ g)(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(t_0), y(t_0)) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

(a)

$$z'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(3, -1)) \cdot \frac{dx}{dt}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(3, -1) \cdot \frac{dy}{dt}(1) = 2 \cdot (6 \cdot 1) + 4 \cdot (1 - 4 \cdot 1) = 0$$

(b)

$$z'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(0, 2)) \cdot \frac{dx}{dt}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 2) \cdot \frac{dy}{dt}(1) = -1 \cdot (1) + 3 \cdot (1) = 2$$

(c)

$$z'(1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1, 3)) \cdot \frac{dx}{dt}(1) + \frac{\partial f}{\partial y}(1, 3) \cdot \frac{dy}{dt}(1) = 4 \cdot (2 \cdot 1) - 3 \cdot (4) = -4$$

Questão 10

Para resolver esse exercício, podemos tomar a Proposição 6 da Agenda 8 e expandir a definição para um função $f(x, y, z)$, de modo que podemos calcular a derivada parcial de $F(u, v, w)$ em relação a v a partir de:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \cdot \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)$$

Substituindo pelos valores do exercício:

$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = 2x \cdot (u^2) + 2y \cdot (2v) - 1 \cdot (0) = 2 \cdot (xu^2 + 2yv)$$

Questão 11

Para resolver esse exercício, basta utilizar o Teorema 1 da Agenda 8 com $t = 0$, $x(0) = 1$, $y(0) = -1$, $x'(0) = 1$ e $y'(0) = 2$:

$$F'(0) = \frac{\partial g}{\partial x}(1, -1) \cdot \frac{dx}{dt}(0) + \frac{\partial g}{\partial y}(1, -1) \cdot \frac{dy}{dt}(0) = e^{1-1} \cdot 1 + e^{1-1} \cdot 2 = 1 + 2 = 3$$