

# GABARITO DA LISTA 11 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni\*

*“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”*

(1) Calcular as derivadas das seguintes funções:

(a)  $f(x) = 2^x \cdot \cos(x)$ ;

**Solução:** Neste caso temos o produto de duas funções,  $g(x) = 2^x$  e  $h(x) = \cos(x)$ , de modo que cabe aplicar a **Regra do Produto**. Tendo em vista que:

$$g'(x) = 2^x \cdot \ln(2)$$

$$h'(x) = -\sin(x)$$

segue que:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = 2^x \cdot \ln(2) \cdot \cos(x) - 2^x \cdot \sin(x)$$

(b)  $f(x) = \tan(x)$

**Solução:** Neste caso temos o quociente de duas funções,  $g(x) = \sin(x)$  e  $h(x) = \cos(x)$ , de modo que cabe aplicar a **Regra do Quociente**. Tendo em vista que:

$$g'(x) = \cos(x)$$

---

\*jeancb@ime.usp.br

$$h'(x) = -\sin(x)$$

segue que:

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h^2(x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cos^2(x) + \sin^2(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos^2(x)} = \sec^2(x).$$

(c)  $f(x) = e^{x^2}$

**Solução:** Neste caso temos  $f$  como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 & \mapsto & e^{x^2} \end{array}$$

onde  $h(x) = x^2$  e  $g(y) = e^y$ . Tendo em vista que  $h'(x) = 2 \cdot x$  e que  $g'(y) = e^y$ , pela **Regra da Cadeia** segue que:

$$f(x) = g(h(x)) \xRightarrow{\text{R. Cadeia}} f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x) = e^{x^2} \cdot 2 \cdot x = 2x \cdot e^{x^2}$$

(d)  $f(x) = e^{\cos(x^3)}.$

**Solução:** Neste caso temos  $f$  como a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} & \xrightarrow{m} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^3 & \mapsto & \cos(x^3) & \mapsto & e^{\cos(x^3)} \end{array}$$

onde  $h(x) = x^3$ ,  $g(y) = \cos(y)$  e  $m(z) = e^z$ . Tendo em vista que  $h'(x) = 3 \cdot x^2$ , que  $g'(y) = -\sin(y)$  e  $m'(z) = e^z$ , pela **Regra da Cadeia** segue que:

$$f(x) = m(g(h(x))) \Rightarrow f'(x) = m'(g(h(x))) \cdot [g(h(x))]' \stackrel{\text{R. Cadeia}}{\uparrow} m'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{g(h(x))} \cdot (-\sin(h(x))) \cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{\cos(h(x))} \cdot (-\sin(h(x))) \cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = e^{\cos(x^3)} \cdot (-\sin(x^3)) \cdot (3 \cdot x^2)$$

$$\therefore f'(x) = -3 \cdot x^2 \cdot e^{x^3} \cdot \sin(x^3)$$

(e)  $f(x) = \cos(e^x - \ln(x))$

**Solução:** Neste caso temos  $f$  como a composição das funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - \ln(x) & \mapsto & \cos(e^x - \ln(x)) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & e^x - \ln(x) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \cos(y) \end{array}$$

Tendo em vista que:

$$g'(y) = -\sin(y) \text{ e } h'(x) = e^x - \frac{1}{x}$$

segue que:

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = -\sin(h(x)) \cdot h'(x) = -\sin(e^x - \ln(x)) \cdot \left(e^x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\therefore f'(x) = -e^x \cdot \sin(e^x - \ln(x)) + \frac{\sin(e^x - \ln(x))}{x}$$

(f)  $f(x) = \ln(x^2 - 2)$

**Solução:** Neste caso, temos a composição de funções:

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2 & \mapsto & \ln(x^2 - 2) \end{array}$$

onde

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* \\ x & \mapsto & x^2 - 2 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ y & \mapsto & \ln(y) \end{array}$$

Tendo em vista que:

$$g'(y) = \frac{1}{y} \text{ e } h'(x) = 2 \cdot x$$

segue que:

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$\Rightarrow f'(x) = g'(x^2 - 2) \cdot 2 \cdot x$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2x}{(x^2 - 2)}$$

$$(g) \ f(x) = \frac{\sin(x)}{x+1}$$

**Solução:** Neste caso temos o quociente de duas funções:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x) \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x+1 \end{array}$$

Sabemos que  $h'(x) = \cos(x)$  e que  $g'(x) = 1$ . Pela **Regra do Quociente**, temos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{h(x)}{g(x)} \right) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{\cos(x) \cdot (x+1) - \sin(x) \cdot 1}{(x+1)^2}$$

$$(h) \ f(x) = \frac{2x+3}{x^2-1}$$

**Solução:** Neste caso temos o quociente de duas funções:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x+3 \end{array}$$

e:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\} & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2-1 \end{array}$$

Sabemos que  $h'(x) = 2$  e que  $g'(x) = 2x$ . Pela **Regra do Quociente**, temos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left( \frac{h(x)}{g(x)} \right) = \frac{h'(x) \cdot g(x) - h(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2-1) - (2x+3) \cdot (2x)}{(x^2-1)^2} = -\frac{2x^2+6x+2}{(x^2-1)^2}$$

$$(i) f(x) = \sqrt{x} + \frac{3}{x^2 + 1}$$

**Solução:** Temos a soma de duas funções:  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $h(x) = \frac{3}{x^2+1}$ . Sabemos que:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Precisamos calcular, portanto,  $h'(x)$ , que por sua vez é o quociente das funções  $h_1(x) = 1$  e  $h_2(x) = x^2 + 1$ . Como  $h'_1(x) = 0$  e  $h'_2(x) = 2x$ , segue da **Regra do Quociente** que:

$$h'(x) = \frac{h'_1(x) \cdot h_2(x) - h_1(x) \cdot h'_2(x)}{h_2(x)^2} = \frac{0 \cdot (x^2 + 1) - 1 \cdot (2x)}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h'(x) = -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

Aplicando a **Regra da Soma**, temos:

$$f'(x) = g'(x) + h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$(j) f(x) = \frac{\sqrt{x}}{x + 1}$$

**Solução:** Neste caso temos o quociente das funções  $g(x) = \sqrt{x}$  e  $h(x) = x + 1$ . Logo,

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$$

Sabemos que  $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$  e que  $h'(x) = 1$ , de modo que:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}} \cdot (x + 1) - \sqrt{x} \cdot 1}{(x + 1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-x + 1}{2\sqrt{x} \cdot (x + 1)^2}$$

(k)  $f(x) = (2x^3 + 3x^2) \cdot e^x$

**Solução:** Temos  $f$  enquanto produto de duas funções,  $g(x) = (2x^3 + 3x^2)$  e  $h(x) = e^x$ . Vamos aplicar, portanto, a **Regra do Produto**. Tem-se  $g'(x) = 6x + 6$  e  $h'(x) = e^x$ , de modo que:

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \Rightarrow f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (6x + 6) \cdot e^x + (2x^3 + 3x^2) \cdot e^x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = (2x^3 + 3x^2 + 6x + 6) \cdot e^x$$

(l)  $f(x) = \sec(x)$

**Solução:** Esta função se escreve como:

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

$$f(x) = \sec(x) = \frac{g(x) = 1}{h(x) = \cos(x)}$$

de modo que podemos derivar esta função aplicando a **Regra do Quociente**, com  $g(x) = 1$  e  $h(x) = \cos(x)$ . Temos  $g'(x) = 0$  e  $h'(x) = -\sin(x)$ . Assim, para todo  $x$  tal que  $h(x) \neq 0$  (ou seja, tal que  $\cos(x) \neq 0$ ), temos:

$$f'(x) = \frac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{h(x)^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f'(x) = \frac{0 \cdot \cos(x) - 1 \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \frac{\sin(x)}{\cos(x)} \cdot \frac{1}{\cos(x)} = \tan(x) \cdot \sec(x)$$

$$(m) \quad f(x) = \ln \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right)$$

**Solução:** Podemos ver  $f$  como a composição:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{\ell} & [1, \infty[ & \xrightarrow{h} & \mathbb{R}_+^* & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 + 1 & \mapsto & \frac{1}{x^2 + 1} & \mapsto & \ln \left( \frac{1}{x^2 + 1} \right) \end{array}$$

onde  $\ell(x) = x^2 + 1$ ,  $h(y) = \frac{1}{y}$  e  $g(z) = \ln(z)$ . Sabemos que  $\ell'(x) = 2x$ ,  $h'(x) = -\frac{1}{y^2}$  e que  $g'(z) = \frac{1}{z}$ . Pela **Regra da Cadeia**, temos:

$$f'(x) = ((g \circ h) \circ \ell)'(x) = (g \circ h)'(\ell(x)) \cdot \ell'(x) = g'(h(\ell(x))) \cdot h'(\ell(x)) \cdot \ell'(x) \Rightarrow$$

$$f'(x) = \frac{1}{h(\ell(x))} \cdot \left( -\frac{1}{\ell^2(x)} \right) \cdot 2x = \frac{-2x}{h(\ell(x)) \cdot \ell^2(x)}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{-2x}{\frac{1}{(x^2+1)} \cdot (x^2 + 1)^2} = -\frac{2x}{x^2 + 1}$$

$$(n) \quad f(x) = \tan(2x^2 + 3x)$$

**Solução:** Neste caso,  $f$  é a composta:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{h} & \left[ -\frac{9}{8}, \infty[ \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 + 3x = (2n + 1) \cdot \frac{\pi}{2}, n \in \mathbb{Z}\} \right. & \xrightarrow{g} & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 2x^2 + 3x & \mapsto & \tan(2x^2 + 3x) \end{array}$$

onde  $h(x) = 2x^2 + 3x$  e  $g(y) = \tan(y)$ . Sabe-se que  $h'(x) = 4x + 3$  e que  $g'(x) = \sec^2(x)$ . Pela **Regra da Cadeia**,

$$f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

$$f'(x) = \sec^2(h(x)) \cdot h'(x) = \sec^2(2x^2 + 3x) \cdot (4x + 3)$$

(2) Determinar, usando a derivação de funções inversas, as derivadas de:

(a)  $f(x) = \arccos(x)$

**Solução:** Sabemos que  $f(x) = \arccos(x)$  é a inversa de  $g(y) = \cos(y)$ , e  $g'(y) = -\sin(y)$ . Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{-\sin(g^{-1}(x))} = \frac{-1}{\sqrt{1 - \cos^2(\arccos(x))}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

(b)  $f(x) = \arctan(x)$

**Solução:** Sabemos que  $f(x) = \arctan(x)$  é a inversa de  $g(y) = \tan(y)$ , e  $g'(y) = \sec^2(y)$ . Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))} \stackrel{\sec^2(\theta)=1+\tan^2(\theta)}{=} \frac{1}{\tan^2(\arctan(x)) + 1} = \frac{1}{x^2 + 1}$$

(c)  $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$

**Solução:** Sabemos que  $f(x) = \operatorname{arccot}(x)$  é a inversa de  $g(y) = \cot(y)$ , e  $g'(y) = -\csc^2(y)$ . Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{-1}{\csc^2(\operatorname{arccot}(x))} \stackrel{\csc^2(\theta)=1+\cot^2(\theta)}{=} \frac{-1}{1 + \cot^2(\operatorname{arccot}(x))} = -\frac{1}{x^2 + 1}$$

(d)  $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$

**Solução:** Sabemos que  $f(x) = \operatorname{arcsec}(x)$  é a inversa de  $g(y) = \sec(y)$ , e  $g'(y) = \tan(y) \cdot \sec(y)$ . Assim,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{\tan(\operatorname{arcsec}(x)) \cdot \sec(\operatorname{arcsec}(x))} = \frac{1}{x \cdot \tan(\operatorname{arcsec}(x))} \stackrel{\tan(\theta)=\sqrt{\sec^2(\theta)-1}}{=} \\ &= \frac{1}{x \cdot \sqrt{\sec^2(\operatorname{arcsec}(x)) - 1}} = \frac{1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}} \end{aligned}$$

(e)  $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$

**Solução:** Sabemos que  $f(x) = \operatorname{arccsc}(x)$  é a inversa de  $g(y) = \csc(y)$ , e  $g'(y) = -\cot(y) \cdot \csc(y)$ . Assim,

$$f'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{-1}{\cot(\operatorname{arccsc}(x)) \cdot \csc(\operatorname{arccsc}(x))} = \frac{-1}{x \cdot \cot(\operatorname{arccsc}(x))} \stackrel{\cot(\theta) = \sqrt{\csc^2(\theta) - 1}}{=} \\ = -\frac{1}{x \cdot \sqrt{\csc(\operatorname{arccsc}(x))^2 - 1}} = \frac{-1}{x \cdot \sqrt{x^2 - 1}}$$

- (3) Sabendo que em cada caso a equação dada define uma função implícita  $y$  em termos de  $x$ , calcular  $y'(x)$  nos seguintes casos:

(a)  $y^3 - 3x^2y - 2 = 0$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^3 - 3x^2y(x) - 2) = \frac{d}{dx}(0) = 0$$

$$3y^2(x) \cdot y'(x) - 3x^2 \cdot y'(x) - 6x \cdot y(x) = 0$$

$$y'(x) \cdot (3y^2(x) - 3x^2) = 6x \cdot y(x)$$

$$\therefore y'(x) = \frac{6xy}{3y^2 - 3x^2}$$

(b)  $x^2 + y^2 = 4, y > 0$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx}(y(x)^2 + x^2) = \frac{d}{dx}(4) = 0$$

$$2y(x) \cdot y'(x) + 2x = 0$$

$$y(x) \cdot y'(x) = -x$$

$$\therefore y'(x) = -\frac{x}{y}$$

(c)  $x^4 y^3 = 3x^2 y + 1$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx}(x^4 \cdot y^3(x)) = \frac{d}{dx}(3x^2 \cdot y(x) + 1)$$

$$4x^3 \cdot y^3(x) + 3x^4 \cdot y^2(x) \cdot y'(x) = 6x \cdot y(x) + 3x \cdot y'(x)$$

$$(3x^2 y^2(x) - 3x) \cdot y'(x) = 6xy(x) - 4x^3 y^3(x)$$

$$\therefore y'(x) = \frac{6xy - 4x^3 y^3}{3x^2 y^2 - 3x}$$

(d)  $\frac{x}{x+y} - \frac{y}{x-y} = 0$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x+y(x)} - \frac{y(x)}{x-y(x)} \right) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x+y(x)} \right) - \frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{x-y(x)} \right) = 0$$

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{x}{x+y(x)} \right) = \frac{d}{dx} \left( \frac{y(x)}{x-y(x)} \right)$$

$$\frac{(x+y(x)) - x \cdot (1+y'(x))}{(x+y(x))^2} = \frac{y'(x) \cdot (x-y(x)) - y(x) \cdot (1-y'(x))}{(x-y(x))^2}$$

$$\frac{y(x) - x \cdot y'(x)}{(x+y(x))^2} = \frac{x \cdot y'(x) - y'(x)}{(x-y(x))^2} = \frac{x-1}{(x-y(x))^2} \cdot y'(x)$$

$$\frac{y(x)}{(x+y(x))^2} = \left( \frac{x-1}{(x-y(x))^2} + \frac{x}{(x+y(x))^2} \right) \cdot y'(x)$$

$$\therefore y'(x) = \frac{\frac{y}{(x+y)^2}}{\left( \frac{x-1}{(x-y)^2} + \frac{x}{(x+y)^2} \right)}$$

(e)  $x^2y - 2y - 3x - 1 = 0$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx}(x^2y(x) - 2y(x) - 3x - 1) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$2x \cdot y(x) + x^2 \cdot y'(x) - 2y'(x) - 3 = 0$$

$$(x^2 - 2) \cdot y'(x) = 3 - 2xy(x)$$

$$\therefore y'(x) = \frac{3 - 2xy}{x^2 - 2}$$

(f)  $\cos(y) = x + y$

**Solução:** Temos:

$$\frac{d}{dx}(\cos(y(x))) = \frac{d}{dx}(x + y(x))$$

$$-\sin(y(x)) \cdot y'(x) = 1 + y'(x)$$

$$-(1 + \sin(y)) \cdot y'(x) = 1$$

$$\therefore y'(x) = \frac{-1}{1 + \sin(y)}$$