

# Resolução da Lista 11 de MAT0121

Gabriel Sallouti Allegrini

## Questão 1

Da definição 23 da agenda 8, temos que a equação do plano tangente em um ponto  $(x_0, y_0, z_0)$  é:

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

Além disso a reta normal ao plano tangente em  $(x_0, y_0, z_0)$  é dada por:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda \cdot \nabla f(x_0, y_0, z_0) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Assim, para obtermos as equações do plano tangente e da reta normal, precisamos calcular  $\nabla f(x_0, y_0, z_0)$  e substituir nas equações.

- (a) Tomando  $f(x, y, z)$  como a equação da superfície de nível, ou seja,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ , temos que:

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = (2x, 2y, 2z)$$

$$\nabla f(1, 1, 1) = (2, 2, 2)$$

Substituindo na fórmula do plano tangente, obtemos a seguinte equação do plano:

$$(2, 2, 2) \cdot (x - 1, y - 1, z - 1) = 0 \quad \Rightarrow \quad 2x + 2y + 2z - 6 = 0 \quad \Rightarrow \quad z = 3 - x - y$$

Substituindo na fórmula da reta normal, obtemos a seguinte equação de reta:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1) + \lambda \cdot (2, 2, 2) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (b) Tomando  $f(x, y, z)$  como a equação da superfície de nível, ou seja,  $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ , temos que:

$$\nabla f(x, y, z) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = (2x, 2y, -2z)$$

$$\nabla f(3, 5, -4) = (6, 10, 8)$$

Substituindo na fórmula do plano tangente, obtemos a seguinte equação do plano:

$$\begin{aligned}(6, 10, 8) \cdot (x - 3, y - 5, z + 4) = 0 &\Rightarrow 6(x - 3) + 10(y - 5) + 8(z + 4) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = \frac{-3x - 5y + 18}{4}\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da reta normal, obtemos a seguinte equação de reta:

$$(x, y, z) = (3, 5, -4) + \lambda \cdot (6, 10, 8) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

- (c) Tomando  $f(x, y, z)$  como a equação da superfície de nível, ou seja,  $f(x, y, z) = \cos(\pi \cdot x) - x^2y + e^{xz} + yz$ , temos que:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z), \frac{\partial f}{\partial z}(x, y, z) \right) = \\ &= (\cos(\pi \cdot x) - x^2y + e^{xz} + yz, z - x^2, e^{xz}x + y) \\ \nabla f(0, 1, 2) &= (4, 2, 1)\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula do plano tangente, obtemos a seguinte equação do plano:

$$\begin{aligned}(4, 2, 1) \cdot (x - 0, y - 1, z - 2) = 0 &\Rightarrow 4(x - 0) + 2(y - 1) + 1(z - 2) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow z = 4 - 4x - 2y\end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da reta normal, obtemos a seguinte equação de reta:

$$(x, y, z) = (0, 1, 2) + \lambda \cdot (4, 2, 1) \quad , \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

## Questão 2

- (a) Do Teorema 29 da agenda 8, temos que o máximo crescimento da função  $f(x_0, y_0)$  ocorre no sentido e direção do vetor  $\nabla f(x_0, y_0)$ .

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y) &= \left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y), \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = (x, y) \\ \nabla f(1, 1) &= (1, 1)\end{aligned}$$

Assim, a direção na qual a função  $f(x, y)$  cresce mais rapidamente no ponto  $(1, 1)$  é dada pelo vetor  $(1, 1)$

- (b) Já no que diz respeito ao decrescimento, temos que a direção e sentido onde a função decresce mais rapidamente são os do vetor  $-\nabla f(x_0, y_0)$ .

$$-\nabla f(1, 1) = -(1, 1) = (-1, -1)$$

Assim, a direção na qual a função  $f(x, y)$  decresce mais rapidamente no ponto  $(1, 1)$  é dada pelo vetor  $(-1, -1)$

- (c) Pelo Teorema 27 da Agenda 8, temos que quando a função é diferenciável, a derivada direcional é dada por:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|}$$

Nessa questão temos uma função diferenciável, uma vez que a função é polinomial. Logo, podemos aplicar essa equação e substituir  $\frac{\partial f}{\partial \vec{u}}(x_0, y_0)$  por 0, uma vez que buscamos as direções com variação nula no ponto  $(x_0, y_0) = (1, 1)$ :

$$0 = \nabla f(1, 1) \cdot \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \Rightarrow 0 = (1, 1) \cdot \frac{(v, w)}{\sqrt{v^2 + w^2}} \Rightarrow 0 = v + w \Rightarrow w = -v$$

Assim, as direções na qual a função  $f(x, y)$  tem variação nula no ponto  $(1, 1)$  são dadas pelos vetores  $(v, -v)$ ,  $v \in \mathbb{R}$  e  $v \neq 0$ .

### Questão 3

Do Teorema 5 da Agenda 9, podemos utilizar a Fórmula de Taylor de ordem 2 (quadrática) em  $f(x, y) = \cos(x) \cdot \cos(y)$  em  $(0, 0)$ :

$$f(u, v) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot v^2 \right)$$

Assim, precisamos calcular as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $f(x, y)$  no ponto  $(0, 0)$  e também  $f(0, 0)$ .

$$f(0, 0) = \cos(0) \cdot \cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = -\sin(x) \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = -\sin(0) \cos(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -\cos(x) \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = -\cos(0) \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -\cos(x) \cdot \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = -\cos(0) \cdot \cos(0) = -1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \sin(x) \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \sin(0) \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -\cos(x) \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -\cos(0) \cos(0) = -1$$

Substituindo, obtemos a seguinte aproximação quadrática:

$$f(u, v) = 1 + \frac{1}{2} \cdot (-u^2 - v^2)$$

O erro cometido na aproximação é dado por:

$$r_{(x_0, y_0)}(u, v) = \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t_0 u, t_0 v) u^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(t_0 u, t_0 v) u^2 v + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(t_0 u, t_0 v) u v^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 u, t_0 v) v^3 \right)$$

para algum  $t_0 \in ]0, 1[$ . Observando que todas as derivadas de ordem 3 não assumem valor absoluto maior do que 1, por ser produto de senos e cossenos, podemos majorar o erro por:

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{1}{6} (|u|^3 + 3|u|^2|v| + 3|u||v|^2 + |v|^3)$$

Assim, para  $|x| \leq 0.1$  e  $|y| \leq 0.1$ , tem-se que o erro na aproximação é:

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{1}{6} (0.1^3 + 3 \cdot 0.1^3 + 3 \cdot 0.1^3 + 0.1^3) \leq 0.00134$$

#### Questão 4

Do Teorema 5 da Agenda 9, podemos utilizar a Fórmula de Taylor de ordem 2 (quadrática) em  $f(x, y) = e^x \cdot \sin(y)$  em  $(0, 0)$ :

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot u + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot v + \\ &+ \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) \cdot u^2 + 2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) \cdot uv + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) \cdot v^2 \right) + r_{(0,0)}(u, v) \end{aligned}$$

Assim, precisamos calcular as derivadas parciais de primeira e segunda ordem de  $f(x, y)$  no ponto  $(0, 0)$  e também  $f(0, 0)$ .

$$f(0, 0) = e^0 \cdot \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = e^x \cdot \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = e^0 \cdot \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = e^x \cdot \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = e^x \cdot \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = e^0 \cdot \sin(0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = e^x \cdot \cos(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -e^x \sin(y) \Rightarrow \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -e^0 \sin(0) = 0$$

Substituindo, obtemos a seguinte aproximação quadrática:

$$f(u, v) \approx v + uv = v \cdot (u + 1)$$

O erro cometido na aproximação é dado por:

$$r_{(x_0, y_0)}(u, v) = \frac{1}{6} \left( \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(t_0 u, t_0 v) u^3 + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(t_0 u, t_0 v) u^2 v + 3 \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y^2}(t_0 u, t_0 v) u v^2 + \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(t_0 u, t_0 v) v^3 \right)$$

para algum  $t_0 \in ]0, 1[$ . Calculando as derivadas parciais de terceira ordem e substituindo na equação, obtemos:

$$r_{(0,0)}(u, v) = \frac{1}{6} (e^{t_0 u} \sin(t_0 v) u^3 + 3 e^{t_0 u} \cos(t_0 v) u^2 v - 3 e^{t_0 u} \sin(t_0 v) u v^2 - e^{t_0 u} \cos(t_0 v) v^3)$$

Podemos colocar  $e^{t_0 u}$  em evidência, aplicar a desigualdade triangular e, uma vez que seno e cosseno não assumem valor maior que 1, podemos majorar o erro por:

$$r_{(0,0)}(u, v) = \frac{e^{t_0 u}}{6} (\sin(t_0 v) u^3 + 3 \cos(t_0 v) u^2 v - 3 \sin(t_0 v) u v^2 - \cos(t_0 v) v^3)$$

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{e^{t_0 u}}{6} (|\sin(t_0 v) u^3| + |3 \cos(t_0 v) u^2 v| + |-3 \sin(t_0 v) u v^2| + |-\cos(t_0 v) v^3|)$$

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{e^{t_0 u}}{6} (|u^3| + |3 u^2 v| + |-3 u v^2| + |-v^3|)$$

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{e^{t_0 u}}{6} (|u|^3 + 3|u|^2|v| + 3|u||v|^2 + |v|^3)$$

No entanto, essa função ainda depende de  $t_0$ , mas, como  $t_0 \in ]0, 1[$  e a função  $e^x$  é crescente, podemos majorar o erro substituindo  $t_0$  por 1:

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{e^u}{6} (|u|^3 + 3|u|^2|v| + 3|u||v|^2 + |v|^3)$$

Sabemos que para  $|x| \leq 0.1$ ,  $-0.1 \leq x \leq 0.1$ , de modo que a função  $e^x$ , uma vez que é crescente, tem valor máximo  $e^{0.1}$  para o conjunto de pontos onde  $|x| \leq 0.1$ .

Assim, para  $|x| \leq 0.1$  e  $|y| \leq 0.1$ , tem-se que o erro na aproximação é:

$$|r_{(0,0)}(u, v)| \leq \frac{e^{0.1}}{6} (|0.1|^3 + 3|0.1|^2|0.1| + 3|0.1||0.1|^2 + |0.1|^3) \leq 0.00134$$

## Questão 5

Primeiramente buscaremos os pontos críticos da função e analisaremos aqueles que se encontram no interior da região  $D$ , definida pelo enunciado.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 2(x - 2)y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 2y + x^2 - 4x + 5$$

Igualando as duas equações a 0 e resolvendo o sistema, descobrimos que o único ponto crítico dessa função é  $(2, -\frac{1}{2})$ , o qual não está contido na região  $D$ . Desse modo, esse

ponto não é candidato a máximo ou mínimo global da função.

Agora, precisamos avaliar a fronteira da região  $D$ . Esta fronteira é composta por três retas:

$$D_1 = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq 4\}$$

$$D_2 = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4\}$$

$$D_3 = \{(x, 4 - x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq 4\}$$

De modo que  $\partial D = D_1 \cup D_2 \cup D_3$ .

$$f_{(D_1)} = y^2 + 5y$$

Em  $D_1$ ,  $f$  assume um valor máximo em  $(0, 4)$ , com  $f(0, 4) = 36$ , e um valor mínimo em  $(0, 0)$ , com  $f(0, 0) = 0$ .

$$f_{(D_2)} = 0$$

Em  $D_2$ ,  $f$  é sempre igual a 0, independente do ponto dessa reta analisada.

$$f_{(D_3)} = y^2 + 5y$$

Em  $D_3$ ,  $f$  assume um valor máximo em  $(0, 4)$ , com  $f(0, 4) = 36$ , e um valor mínimo em  $(4, 0)$ , com  $f(4, 0) = 0$ .

Desse modo, obtemos que o máximo global da função é igual a 36 e o mínimo global da função é 0.

## Questão 6

Temos que a função está definida para uma circunferência de raio 1 com centro na origem e seu interior, ou seja:

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$$

No entanto, podemos descrever esse domínio com coordenadas polares:

$$D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r \leq 1\}$$

Para encontrar a maior e menor temperatura, vamos primeiro buscar os pontos críticos da função  $T(x, y)$ :

$$\frac{\partial T}{\partial x}(x, y) = 64(6x - 2y)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y}(x, y) = 64(6y + 2 - 2x)$$

Igualando as duas equações a 0 e resolvendo o sistema, descobrimos que o único ponto crítico dessa função é  $\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right)$ , o qual está contido na região  $D$ . Desse modo, esse ponto é candidato a máximo ou mínimo global da função.

$$T\left(-\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}\right) = 296$$

Agora, precisamos avaliar a fronteira da região  $D$ . Esta fronteira é bem descrita nas coordenadas polares, de modo que:

$$\partial D = \{(r, \theta) \in \mathbb{R}^2 \mid r = 1\}$$

Assim, a função nessa fronteira é tal que:

$$T(1, \theta) = 64(-\sin(2\theta) + 2\sin(\theta) + 8)$$

O máximo da função acima ocorre em  $(1, \frac{2\pi}{3})$ , de modo que  $f(1, \frac{2\pi}{3}) \approx 678.28$ . Já o mínimo da função acima ocorre em  $(1, \frac{4\pi}{3})$ , de modo que  $f(1, \frac{4\pi}{3}) \approx 345.72$ .

Desse modo, obtemos que o máximo global da função é igual a aproximadamente 678.28 e o mínimo global da função é 296.

## Questão 7

D

- (a) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 4y^2 - 4yx - 1 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 8xy - 2x^2 = 0$$

Assim, obtemos dois pontos críticos:  $(0, \frac{1}{2})$ ,  $(0, -\frac{1}{2})$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -4y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 8y - 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 8y - 4x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 8x$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -4y & 8y - 4x \\ 8y - 4x & 8x \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  em cada ponto crítico e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para o ponto  $(0, \frac{1}{2})$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -16 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, \frac{1}{2})$  é um ponto de sela.

Para o ponto  $(0, -\frac{1}{2})$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -16 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, -\frac{1}{2})$  é um ponto de sela.

- (b) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow \sin(y) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow x \cos(y) = 0$$

Assim, obtemos o seguinte conjunto de pontos críticos:  $(0, m\pi) | m \in \mathbb{Z}$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x \cdot \sin(y)$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 0 & \cos(y) \\ \cos(y) & x \cdot \sin(y) \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  nos pontos críticos e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para os pontos  $(0, m\pi) | m \in \mathbb{Z}$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -1 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, m\pi) | m \in \mathbb{Z}$  são pontos de sela.

- (c) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow y - 3x^2 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow x - 2y = 0$$

Assim, obtemos dois pontos críticos:  $(0, 0)$ ,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -2$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -6x & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  em cada ponto crítico e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para o ponto  $(0, 0)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -1 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, 0)$  é um ponto de sela.

Para o ponto  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = 1 > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(\frac{1}{6}, \frac{1}{12})$  é um máximo local.

- (d) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 2x - \frac{1}{x^2} + y = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 2y - \frac{1}{y^2} + x = 0$$

Assim, obtemos o ponto crítico:  $(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}})$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2}{x^3} + 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{2}{y^3} + 2$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{2}{x^3} + 2 & 1 \\ 1 & \frac{2}{y^3} + 2 \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  em cada ponto crítico e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para o ponto  $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = 63 > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}, \sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)$  é um mínimo local.

- (e) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow -8e^{-x^2-y^2}y^2x = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow 8e^{-x^2-y^2}y(-y^2 + 1) = 0$$

Assim, obtemos dois pontos críticos:  $(0, 0)$ ,  $(0, -1)$ ,  $(0, 1)$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = -8y^2e^{-x^2-y^2}(-2x^2 + 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 16e^{-x^2-y^2}yx(y^2 - 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = -16xe^{-x^2-y^2}y(-y^2 + 1)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 8e^{-x^2-y^2}(2y^4 - 5y^2 + 1)$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} -8y^2e^{-x^2-y^2}(-2x^2 + 1) & 16e^{-x^2-y^2}yx(y^2 - 1) \\ -16xe^{-x^2-y^2}y(-y^2 + 1) & 8e^{-x^2-y^2}(2y^4 - 5y^2 + 1) \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  em cada ponto crítico e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para o ponto  $(0, 0)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada, não podemos afirmar nada sobre  $(0, 0)$ .

Para o ponto  $(0, -1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = \frac{128}{e^2} > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, -1)$  é um máximo local.

Para o ponto  $(0, 1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = \frac{128}{e^2} > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(0, 1)$  é um máximo local.

- (f) Primeiramente, precisamos descobrir os pontos críticos, logo, temos que resolver o sistema que contém as duas equações abaixo:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \Rightarrow 3x^2 - 3 = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \Rightarrow -3y^2 + 3 = 0$$

Assim, obtemos dois pontos críticos:  $(-1, 1)$ ,  $(-1, -1)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(1, -1)$

Agora, precisamos calcular as derivadas parciais de segunda ordem da função e montar a matriz Hessiana.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = -6y$$

$$\mathcal{H}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{pmatrix}$$

Agora, devemos ver o sinal de  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y)$  em cada ponto crítico e também calcular o determinante da matriz Hessiana.

Para o ponto  $(-1, 1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = 36 > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(-1, 1)$  é um máximo local.

Para o ponto  $(-1, -1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -36 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(-1, -1)$  é um ponto de sela.

Para o ponto  $(1, 1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = -36 < 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(1, 1)$  é um ponto de sela.

Para o ponto  $(1, -1)$ , obtemos  $\det(\mathcal{H}) = 36 > 0$  e temos que  $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$ . Logo, pelo critério da segunda derivada,  $(1, -1)$  é um mínimo local.