Gabarito da Lista 12 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Calcular, aplicando quando possível, as Regras de L'Hospital:

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\ln(x+1)}{x}$;

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)}$

(c) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$

(d) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{e^x}{x}$.

(e) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{ax^2+b}{cx^2-d}$

(f) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^n}{e^x}$

(g) $\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \ln(x)$

(h) $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \dfrac{\ln(\sin(x))}{(\pi-2x)^2}$

(i) $\lim_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x}$

(j) $\lim_{x\to 0} \dfrac{x - \arcsin(x)}{\sin^3(x)}$

(k) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^n}, n > 0$

(ℓ) $\lim_{x\to 0} x^2 \cdot e^{\frac{1}{x^2}}$

(m) $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)}$

(n) $\lim_{x\to 0} \dfrac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1}$

Solução:

(a) Verificamos que:

$$\lim_{x\to 0} \ln(x+1) = \ln(0+1) = \ln(1) = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} x = 0.$$

Podemos, portanto, aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{[\ln(x+1)]'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x+1}}{1} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x+1} = \frac{1}{0+1} = 1.$$

*jeancb@ime.usp.br

(b) **Solução:** Verificamos que:

$$\lim_{x\to 0} e^x - e^{-x} - 2x = e^0 - e^{-0} - 2\cdot 0 = 1 - 1 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} x - \sin(x) = 0 - \sin(0) = 0 - 0 = 0$$

Podemos, portanto, aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{[e^x - e^{-x} - 2x]'}{[x - \sin(x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)}$$

Agora, notamos que:

$$\lim_{x\to 0} e^x + e^{-x} - 2 = e^0 + e^{-0} - 2 = 1 + 1 - 2 = 0$$

$$\lim_{x\to 0} 1 - \cos(x) = 1 - \cos(0) = 1 - 1 = 0,$$

Podemos, portanto, aplicar novamente a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{[e^x + e^{-x} - 2]'}{[1 - \cos(x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$$

Notamos, mais uma vez, que:

$$\lim_{x\to 0} e^x - e^{-x} = e^0 - e^{-0} = 1 - 1 = 0$$

e:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

Podemos, portanto, aplicar novamente a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{[e^x - e^{-x}]'}{[\sin(x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)}$$

Como:

$$\lim_{x\to 0} e^x + e^{-x} = e^0 + e^{-0} = 1 + 1 = 2$$

e:

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) = \cos(0) = 1 \neq 0$$

podemos calcular o limite do quociente como o quociente dos limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin(x)} = 2.$$

(c) **Solução:** Verificamos que:

$$\lim_{x\to\infty} \sin\left(\frac{k}{x}\right) = \sin\left(\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x}\right) = \sin(0) = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{k}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\sin\left(\frac{k}{x}\right)\right]'}{\left[\frac{1}{x}\right]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{k}{x^2}\cdot\cos\left(\frac{k}{x}\right)}{-\frac{1}{x^2}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-\frac{k}{\cancel{x^2}}\cdot\cos\left(\frac{k}{x}\right)}{-\frac{1}{\cancel{x^2}}} = \lim_{x\to\infty} k\cdot\cos\left(\frac{k}{x}\right) = k\cdot\cos\left(\lim_{x\to\infty}\frac{k}{x}\right) = k\cdot\cos(0) = k\cdot 1 = k$$

(d) **Solução:** Observamos que:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} x = \infty$$

podemos aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[e^x]'}{[x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{e^x}{1} = \lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

(e) **Solução:** Observamos que:

$$\lim_{x\to\infty} ax^2 + b = \infty$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} cx^2 - d = \infty,$$

Podemos, portanto, aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+b}{cx^2-d} = \lim_{x\to\infty} \frac{[ax^2+b]'}{[cx^2-d]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{2ax}{2cx} = \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{2x}\cdot a}{\cancel{2x}\cdot c} = \lim_{x\to\infty} \frac{a}{c} = \frac{a}{c}.$$

(f) **Solução:** Verificamos que:

$$\lim_{x\to\infty} x^n = \infty$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty$$

Assim, podemos aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to\infty} \frac{[x^n]'}{[e^x]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{n\cdot x^{n-1}}{e^x} = n\cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-1}}{e^x}$$

Observamos, por sua vez, que:

$$\lim_{x \to \infty} x^{n-1} = \infty$$

e que:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{[x^{n-1}]'}{[e^x]'} = \lim_{x \to \infty} \frac{(n-1) \cdot x^{n-2}}{e^x} = (n-1) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-2}}{e^x}$$

Observamos, novamente, que:

$$\lim_{x \to \infty} x^{n-2} = \infty$$

e que:

$$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} = \lim_{x \to \infty} \frac{[x^{n-2}]'}{[e^x]'} = \lim_{x \to \infty} \frac{(n-2) \cdot x^{n-3}}{e^x} = (n-2) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-3}}{e^x}$$

Prosseguimos deste modo, derivando numerador e denominador, até obtermos o limite da expressão:

$$\frac{1}{e^x}$$

Assim,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^n}{e^x} \overset{\substack{\textbf{L.H.} \\ \uparrow}}{=} n \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-1}}{e^x} \overset{\substack{\textbf{L.H.} \\ \uparrow}}{=} n \cdot (n-1) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-2}}{e^x} \overset{\substack{\textbf{L.H.} \\ \uparrow}}{=} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \lim_{x \to \infty} \frac{x^{n-3}}{e^x} =$$

$$\overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{x^{n-4}}{e^x} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \cdots \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} n! \cdot \lim_{x\to\infty} \frac{1}{e^x} = 0.$$

(g) **Solução:** Verificamos que não existe, nesta expressão, um quociente. Para aplicar a **Regra de L'Hospital**, no entanto, é necessário que haja um quociente. Assim, escrevemos, primeiramente,

$$x^n \cdot \ln(x) = \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^n}}$$

Observamos que:

$$\lim_{x\to 0_+} \ln(x) = -\infty$$

e que:

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{1}{x^n} = \infty$$

Podemos, portanto, aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações do tipo $\frac{-\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \ln(x) = \lim_{x\to 0_+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x^n}} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0_+} \frac{[\ln(x)]'}{\left[\frac{1}{x^n}\right]'} = \lim_{x\to 0_+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{n}{x^{n+1}}} = \lim_{x\to 0_+} -\frac{1}{x} \cdot \frac{x^{n+1}}{n} =$$

$$= -\frac{1}{n} \lim_{x\to 0_+} x^n = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0_+} x^n \cdot \ln(x) = 0.$$

(h) **Solução:** Observamos que:

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \ln(\sin(x)) \overset{\text{ln contínua}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln\left(\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} \sin(x)\right) \overset{\text{sin contínua}}{\overset{\uparrow}{=}} \ln\left(\sin\left(\lim_{x\to \frac{\pi}{2}-} x\right)\right) = \ln\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) =$$

$$= \ln(1) = 0,$$

e que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\pi - 2x)^2 = \left(\pi - 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)^2 = 0,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\ln(\sin(x))}{(\pi-2x)^2} \overset{\text{L.H.}}{\underset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{[\ln(\sin(x))]'}{[(\pi-2x)^2]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\frac{1}{\sin(x)}\cdot\cos(x)}{-4\cdot(\pi-2x)} = -\frac{1}{4}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\cot(x)}{(\pi-2x)}$$

Notamos que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \cot(x) = \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \frac{0}{1} = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} (\pi - 2x) = \pi - 2\cdot\frac{\pi}{2} = \pi - \pi = 0$$

de modo que podemos aplicar novamente a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\cot(x)}{(\pi-2x)} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{[\cot(x)]'}{[(\pi-2x)]'} = \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{-\csc^2(x)}{-2} = \frac{1}{2}\cdot \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \csc^2(x) = \frac{1}{2}\cdot 0^2 = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\frac{\pi}{2}-} \frac{\ln(\sin(x))}{(x-2\pi)} = 0$$

(i) **Solução:** Verificamos que:

$$\lim_{x\to 0} a^x - b^x = a^0 - b^0 = 1 - 1 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} x = 0,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{[a^x - b^x]'}{[x]'} = \lim_{x\to 0} \frac{a^x \cdot \ln(a) - b^x \cdot \ln(b)}{1} = 1 \cdot \ln(a) - 1 \cdot \ln(b) = .$$

$$= \ln(a) - \ln(b)$$

(j) Observamos que:

$$\lim_{x\to 0} x - \arcsin(x) = 0 - \arcsin(0) = 0 - 0 = 0.$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} \sin^3(x) = \sin^3(0) = 0^3 = 0,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \arcsin(x)}{\sin^3(x)} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{[x - \arcsin(x)]'}{[\sin^3(x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)}.$$

Notamos, novamente, que:

$$\lim_{x\to 0} 1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-0^2}} = 1 - 1 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} 3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x) = 0$$

de modo que podemos aplicar novamente a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\right]'}{[3 \cdot \sin^2(x) \cdot \cos(x)]'} =$$

$$= -\frac{1}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)-\sin^3(x)}$$

Observamos, novamente, que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{0}{1} = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} 2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)-\sin^3(x) = 2\cdot 0\cdot 1^2 - 0^3 = 0$$

de modo que podemos, mais uma vez, aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)-\sin^3(x)} \overset{\substack{\textbf{L.H.}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{\left[\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}\right]'}{[2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)-\sin^3(x)]'} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{2\cdot\cos(x)-9\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)}$$

Finalmente, notamos que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}} = 1$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} 2\cdot\cos(x)-9\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x) = 2\cdot 1 - 9\cdot 0^2\cdot 1 = 2$$

de modo que:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{2\cdot\cos(x)-9\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)} = \frac{1}{2}$$

Desta forma,

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin(x)}{\sin^3(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}{3\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}}{2\cdot\sin(x)\cdot\cos^2(x)-\sin^3(x)}=-\frac{1}{3}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2x^2+1}{(1-x^2)^{\frac{5}{2}}}}{2\cdot\cos(x)-9\cdot\sin^2(x)\cdot\cos(x)}=$$

$$=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{1}{6}.$$

$$\therefore\lim_{x\to 0}\frac{x-\arcsin(x)}{\sin^3(x)}=-\frac{1}{6}$$

(k) Notamos que:

$$\lim_{x\to\infty}\ln(x)=\infty$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty}x^n=\infty,$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital** para indeterminações da forma $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x)}{x^n}=\lim_{x\to\infty}\frac{[\ln(x)]'}{[x^n]'}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{n\cdot x^{n-1}}=n\cdot\lim_{x\to\infty}x^{n-2}=\infty$$

(ℓ) **Solução:** Observamos que não temos, na expressão original, um quociente. No entanto, podemos escrever:

$$x^2\cdot e^{\frac{1}{x^2}}=\frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}}$$

Neste caso, convém fazer a mudança de variável $y=\frac{1}{x^2}$. Uma vez que:

$$\lim_{x\to 0} y = \lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = \infty,$$

de modo que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{\frac{1}{x^2}}}{\frac{1}{x^2}} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y}$$

Verificamos que:

$$\lim_{y\to\infty} e^y = \infty$$

e que:

$$\lim_{y\to\infty} y = \infty$$

Podemos, portanto, aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{y} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{y\to\infty} \frac{[e^y]'}{[y]'} = \lim_{y\to\infty} \frac{e^y}{1} = \lim_{y\to\infty} e^y = \infty.$$

(m) **Solução:** Notamos que:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0.$$

e que:

$$\lim_{x\to\infty} \ln\left(\frac{x-1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} \ln\left(1-\frac{1}{x}\right) = \ln\left(\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)\right) = \ln(1) = 0.$$

de modo que podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)} \overset{\text{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\left[\ln\left(\frac{x+1}{x}\right)\right]'}{\left[\ln\left(\frac{x-1}{x}\right)\right]'} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{x}{x+1}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{\left(\frac{x}{x-1}\right)\cdot\left(\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to\infty} -\frac{\cancel{x}\cdot(x-1)}{(x+1)\cdot\cancel{x}} =$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{x+1} = 1.$$

(n) **Solução:** Notamos que:

$$\lim_{x\to 0} e^{x^2} - 1 = e^{0^2} - 1 = 1 - 1 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} \cos(x) - 1 = \cos(0) - 1 = 1 - 1 = 0$$

Desta forma, podemos aplicar a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} \overset{\substack{\textbf{L.H.}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{[e^{x^2}-1]'}{[\cos(x)-1]'} = \lim_{x\to 0} \frac{2x\cdot e^{x^2}}{-\sin(x)} = -2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^{x^2}}{\sin(x)}$$

Uma vez que:

$$\lim_{x\to 0} x\cdot e^{x^2} = 0\cdot e^{0^2} = 0\cdot 1 = 0$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0,$$

podemos aplicar, novamente, a **Regra de L'Hospital**:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^{x^2}}{\sin(x)} \overset{\substack{\textbf{L.H.}\\ \uparrow}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{[x\cdot e^{x^2}]'}{[\sin(x)]'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2} + 2x^2\cdot e^{x^2}}{\cos(x)} = 1$$

Segue, portanto, que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{x^2}-1}{\cos(x)-1} = -2\cdot \lim_{x\to 0} \frac{x\cdot e^{x^2}}{\sin(x)} = -2\cdot 1 = -2$$

(2) Observe a resolução do seguinte limite:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} \overset{\textbf{L.H.}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1.$$

Este limite está correto? O que há de errado?

Solução: Uma vez que:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

e:

$$\lim_{x\to 0} x+1 = 0+1 = 1 \neq 0$$

o limite deste quociente é o quociente destes limites:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x+1} = \frac{0}{1} = 0.$$

Assim, o limite apresentado no enunciado está incorreto.

Quanto à aplicabilidade da **Regra de L'Hospital**, observamos que:

$$\lim_{x\to 0} \sin(x) = \sin(0) = 0$$

mas que:

$$\lim_{x\to 0} x+1 = 0+1 = 1 \neq 0.$$

Neste caso **não** temos uma indeterminação, de modo que não é válida a aplicação da **Regra de L'Hospital** neste caso.

(3) Considere as funções:

$$f(x) = \begin{cases} x+2, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} x+1, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x = 0 \end{cases}$$

Figura 1: "Pode chegar um dia em que você vai usar a regra de L'Hospital...
Mas não será neste dia."

(a) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = 1$

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 2$

(c) Os itens (a) e (b) contradizem a **Regra de L'Hospital**? Por quê?

Solução: Temos:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} \overset{\textbf{"O" Teorema}}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{x\to 0} \frac{x+2}{x+1} = \frac{0+2}{0+1} = \frac{2}{1} = 2$$

Também,

$$\begin{array}{rccc} f': & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} g': & \mathbb{R}\setminus\{0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & 1 \end{array}$$

de modo que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{1} = 1$$

Observamos que:

$$\lim_{x\to 0} f(x) \overset{\overset{\textbf{"O" Teorema}}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to 0} x + 2 = 0 + 2 = 2.$$

e que:

$$\lim_{x\to 0} g(x) \overset{\overset{\textbf{"O" Teorema}}{\uparrow}}{=} \lim_{x\to 0} x + 1 = 0 + 1 = 1.$$

Desta forma, como:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2 \neq 0 = f(0)$$

$$\lim_{x\to 0} g(x) = 1 \neq 0 = f(0)$$

segue que nem f nem g são contínuas em 0. Disto conclui-se que nem f nem g são deriváveis em zero - o que é uma das hipóteses exigidas para se aplicar a **Regra de L'Hospital**. Uma vez que não estamos nas condições de aplicar a **Regra de L'Hospital**, não há qualquer contradição.