Lista 13 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Estudar as funções abaixo com relação a máximos e mínimos locais e globais:

(a) $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$;

(b) $f(x) = e^x - e^{-3x}$

(c) $f(x) = x^2 + 3x + 2$

(d) $f(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2$.

(e) $f(x) = x \cdot e^{-2x}$

(f) $f(x) = \sqrt[3]{x^3 - x^2}$

(g) $f(x) = \sin(x) + \cos(x)$ em $[0, \pi]$

(h) $f(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}}$

Solução:

(a) Tem-se, pela **Regra do Quociente**,

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot (1+x^2) - x \cdot [(1+x^2)']}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$$

Buscamos os pontos críticos de f, portanto devemos resolver:

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} = 0$$

que equivale a resolver:

$$1 - x^2 = 0$$

que tem -1 e 1 como soluções. Os pontos críticos são, portanto, -1 e 1. Para determinar se temos aqui pontos de máximo, mínimo ou inflexão, é necessário calcular $f''(x)$. Temos:

*jeancb@ime.usp.br

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\right]' \underset{\uparrow}{\overset{\text{Regra do Quociente}}{=}} \frac{[(1-x^2)]' \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot [(1+x^2)^2]'}{[(1+x^2)^2]^2} =$$

$$= \frac{-2x \cdot (1+x^2)^2 - (1-x^2) \cdot [2 \cdot (1+x^2) \cdot 2x]}{(1+x^2)^4} = -\frac{2x \cdot (-x^2+3)}{(x^2+1)^3}$$

Portanto, temos:

$$f''(-1) = -\frac{2 \cdot (-1) \cdot (-(-1)^2+3)}{((-1)^2+1)^3} = \frac{1}{2} > 0,$$

de modo que -1 é mínimo local de f, e temos:

$$f''(1) = -\frac{2 \cdot 1 \cdot (-1^2+3)}{(1^2+1)^3} = -\frac{1}{2} < 0,$$

de modo que 1 é um ponto de máximo local.

(b) Primeiramente calculamos a derivada de f, para encontrar seus pontos críticos:

$$f'(x) = [e^x - e^{-3x}]' = e^x + 3e^{-3x}$$

Notamos que a equação:

$$f'(x) = e^x + e^{-3x} = 0$$

não tem nenhuma solução, de modo que esta função não admite nem máximos nem mínimos locais ou globais.

(c) Tem-se:

$$f'(x) = [x^2 + 3x + 2]' = 2x + 3$$

Para encontrar pontos críticos, devemos resolver:

$$2x + 3 = 0$$

ou seja, $x = -\frac{3}{2}$. Para determinar se o ponto é de máximo, mínimo ou inflexão, calculamos a derivada segunda:

$$f''(x) = [(2x+3)]' = 2 > 0,$$

de modo que $f''\left(-\frac{3}{2}\right) = 2 > 0$ e $-\frac{3}{2}$ é um máximo local da função.

(d) Tem-se:

$$f'(x) = [x^4 - 4x^3 + 4x^2 + 2]' = 4x^3 - 12x^2 + 8x$$

Para encontrar pontos críticos, devemos resolver:

$$4x^3 - 12x^2 + 8x = 0$$

Podemos escrever a equação acima como:

$$x \cdot (4x^2 - 12x + 8) = 0$$

O produto do membro esquerdo se anula se, e somente se, $x = 0$ ou $4x^2 - 12x + 8 = 0$. O discriminante desta equação quadrática é $\Delta = -7$, logo nunca ocorre $4x^2 - 12x + 8 = 0$.

A solução é, portanto, $x = 0$. Para determinar se o ponto é de máximo, mínimo ou inflexão, calculamos a derivada segunda:

$$f''(x) = [4x^3 - 12x^2 + 8x]' = 12x^2 - 24x + 8,$$

Como $f''(0) = 12 \cdot 0^2 - 24 \cdot 0 + 8 = 8 > 0 > 0$, tem-se que 0 é um mínimo local da função.

(e) Tem-se, pela **Regra do Produto**:

$$f'(x) = [x \cdot e^{-2x}]' = [x]' \cdot e^{-2x} + x \cdot [e^{-2x}]' = e^{-2x} - 2x \cdot e^{-2x} = e^{-2x} \cdot (1 - 2x)$$

Para encontrar pontos críticos, devemos resolver:

$$e^{-2x} \cdot (1 - 2x) = 0$$

Uma vez que para qualquer $x \in \mathbb{R}$ tem-se $e^{-2x} \neq 0$, o produto acima se anula se, e somente se:

$$1 - 2x = 0$$

A solução é, portanto, $x = \frac{1}{2}$. Para determinar se o ponto é de máximo, mínimo ou inflexão, calculamos a derivada segunda, usando a **Regra do Produto**:

$$f''(x) = [e^{-2x} \cdot (1-2x)]' = [e^{-2x}]' \cdot (1-2x) + e^{-2x} \cdot [(1-2x)]' =$$

$$= -2 \cdot e^{-2x} \cdot (1-2x) - 2 \cdot e^{-2x} = 4 \cdot e^{-2x} \cdot (x-1)$$

Como $f''\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right) = -\dfrac{2}{e} < 0$, tem-se que $\frac{1}{2}$ é um máximo local da função.

(f) Tem-se, pela **Regra da Cadeia**:

$$f'(x) = [\sqrt[3]{x^3 - x^2}]' = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} \cdot (3x^2 - 2x)$$

Para encontrar pontos críticos, devemos resolver:

$$[\sqrt[3]{x^3 - x^2}]' = \frac{1}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} \cdot (3x^2 - 2x) = \frac{3x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}} = 0$$

Notamos que f' não está definida para $x = 0$ nem para $x = 1$ – e portanto estes são pontos críticos de f. Para que $f'(x) = 0$, devemos exigir que:

$$3x^2 - 2x = 0$$

Como $x = 0$ não pode ser admitido na equação acima, a solução é, portanto, $x = \frac{2}{3}$. Para determinar se o ponto é de máximo, mínimo ou inflexão, calculamos a derivada segunda, usando a **Regra do Quociente**:

$$f''(x) = \left[\frac{3x^2 - 2x}{\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}}\right]' = \frac{[3x^2-2x]' \cdot \sqrt[3]{(x^3-x^2)^2} - (3x^2-2x) \cdot [\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}]'}{[\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}]^2} =$$

$$= \frac{\left[(6x-2)\cdot\sqrt[3]{(x^3-x^2)^2}-(3x^2-2x)\cdot\left[\frac{2\cdot(3x^2-1)}{3\cdot\sqrt[3]{x^3-x}}\right]\right.}{[\sqrt[3]{(x^3-x^2)}]^4} = -\frac{2x^2}{3\cdot(x^3-x^2)^{\frac{5}{3}}}$$

Temos $f''\left(\frac{2}{3}\right) = -\dfrac{2\left(\frac{2}{3}\right)^2}{3\cdot\left(\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right)^{\frac{5}{3}}}$. Observando que $\left(\frac{2}{3}\right)^3-\left(\frac{2}{3}\right)^2 < 0$, tem-se que $f''\left(\frac{2}{3}\right) > 0$ é um mínimo local da função.
Falta, ainda, analisarmos os valores da função em $x = 0$ e em $x = 1$ (que são pontos onde a derivada não existe). Temos:

$$f(0) = \sqrt[3]{(0)^3-(0)^2} = 0$$

Observamos que para todo $x \in \mathbb{R}$ tal que $|x| < 1$, tem-se $x^3 - x^2 \leq 0$, de modo que $\sqrt[3]{x^3-x^2} \leq 0 = f(0)$. Desta forma, $x = 0$ é um máximo local da função.

$$f(1) = \sqrt[3]{1^3-1^2} = 0$$

Observe que se $0 < x < 1$ temos $x^3 - x^2 < 0 = f(1)$, e que se $x > 1$, temos $x^3 - x^2 > 0 = f(1)$. Como em qualquer vizinhança de 1 há valores de x tais que $f(x) < f(1)$ e $f(x) > f(1)$, tem-se que 1 não é nem mínimo nem máximo local.

(g) Por ser soma de funções contínuas, f é uma função contínua. Sendo seu domínio, $[0,\pi]$, um intervalo fechado e limitado, segue do **Teorema de Weierstrass** que f assume um máximo e um mínimo neste intervalo. Os candidatos são os pontos críticos, que podem ser encontrados resolvendo a equação:

$$f'(x) = [\sin(x)+\cos(x)]' \overset{\substack{\text{Regra da}\\ \text{Soma}\\ \uparrow}}{=} [\sin(x)]' + [\cos(x)]' = \cos(x) - \sin(x) = 0$$

o que ocorre se, e somente se:

$$\cos(x) = \sin(x).$$

Analisando o círculo trigonométrico, concluímos que a única solução da equação acima é $x = \frac{\pi}{4}$. Para verificarmos se este é um ponto de máximo, mínimo ou inflexão, calculamos:

$$f''(x) = [f'(x)]' = [\cos(x) - \sin(x)]' = -\sin(x) - \cos(x) = -[\sin(x) + \cos(x)]$$

Como $f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\left[\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = -\left[\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right] = -\sqrt{2} < 0$, segue que $\frac{\pi}{4}$ é um máximo local. Resta calcularmos f nos extremos do intervalo. Temos:

$$f(0) = \sin(0) + \cos(0) = 0 + 1 = 1$$

$$f(\pi) = \sin(\pi) + \cos(\pi) = 0 - 1 = -1$$

Para determinar se estes extremos são máximos, mínimos locais, devemos estudar o sinal da derivada, $f'(x) = -[\sin(x) + \cos(x)]$. Fazemos isto ao chamar $y = \sin(x)$, de modo que $\cos(y) = \sqrt{1 - y^2}$. Assim, tem-se:

$$f'(x) > 0 \iff -[y + \sqrt{1 - y^2}] > 0 \iff y + \sqrt{1 - y^2} < 0 \iff y < -\sqrt{1 - y^2}$$

Elevando os dois membros da inequação anterior ao quadrado, obtemos a inequação equivalente:

$$y^2 > 1 - y^2 \iff 2y^2 > 1 \iff y^2 > \frac{1}{2} \iff y > \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Assim, tem-se $f'(x) > 0$ sempre que $\sin(x) > \frac{\sqrt{2}}{2}$, ou seja, sempre que $\frac{\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{4}$. Concluímos, assim, que f é estritamente crescente no intervalo $]\pi/4, 3\pi/4[$. Consequentemente, f é estritamente decrescente nos intervalos $]0, \pi/4[$ e $]3\pi/4, \pi[$. Assim, 0 é máximo local e π é mínimo local. Comparando os valores, temos 0 como mínimo local, $\frac{\pi}{4}$ como máximo global e π como mínimo global.

(h) Determinamos, primeiramente, os pontos críticos de f resolvendo a equação:

$$f'(x) = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{x-1}{x^2}\right)' = e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{(x-1)' \cdot x^2 - (x-1) \cdot [x^2]'}{[x^2]^2}\right)' =$$

$$= e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-x^2 + 2x}{x^4}\right)$$

Assim, temos $f'(x) = 0$ se, e somente se:

$$e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-x^2 + 2x}{x^4} \right) = 0$$

Uma vez que para todo $x \neq 0$ tem-se $\dfrac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x^4} \neq 0$, teremos $f'(x) = 0$ se, e somente se:

$$-x^2 + 2x = 0$$

$$x \cdot (-x + 2) = 0$$

Como $x \neq 0$, o produto acima se anula apenas quando $x = 2$. Resta determinar se 2 é maximante ou minimante da função. Para tanto, calculamos $f''(x)$:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot \left(\frac{-x^2 + 2x}{x^4} \right) \right]' = \frac{2e^{\frac{x-1}{x^2}} x^3 - 5e^{\frac{x-1}{x^2}} x^2 - 4e^{\frac{x-1}{x^2}} x + 4e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x^6} =$$

$$= \frac{e^{\frac{x-1}{x^2}} \cdot (2x^3 - 5x^2 - 4x + 4)}{x^6}$$

Uma vez que para todo $x \neq 0$ temos $\dfrac{e^{\frac{x-1}{x^2}}}{x^6} > 0$, o sinal de $f''(x)$ fica completamente determinado pelo sinal da expressão:

$$g(x) = 2x^3 - 5x^2 - 4x + 4$$

$$g(2) = 2 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 + 4 = 2 \cdot 8 - 5 \cdot 4 - 8 + 4 = 16 - 20 - 4 = 16 - 24 = -8 < 0.$$

Segue, portanto, que $f''(2) < 0$, de modo que 2 é um maximante local de f.

(2) Determinar os valores máximo e mínimo globais (caso existam) da função dada, no intervalo indicado:

(a) $f(x) = \frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3$ em $[-2, 3]$

(b) $g(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ em $[-2, 1]$

(c) $h(x) = \sin(x) - \cos(x)$ em $[0, \pi]$

(d) $f(x) = \dfrac{1}{x^3 - 2x^2}$ em $]0, 2[$

Solução:

(a) Buscamos os pontos críticos de f resolvendo a equação:

$$f'(x) = \left[\frac{x^4}{4} - x^3 - 2x^2 + 3\right]' = x^3 - 3x^2 - 4x = 0$$

$$x \cdot (x^2 - 3x - 4) = 0 \iff (x = 0) \vee (x^2 - 3x - 4 = 0)$$

$$x^2 - 3x - 4 = 0 \iff (x = -1) \vee (x = 4)$$

Os únicos destes pontos que pertencem ao intervalo $[-2, 3]$ são 0 e -1. Para determinar se 0 e -1 são máximos, mínimos ou pontos de inflexão, calculamos:

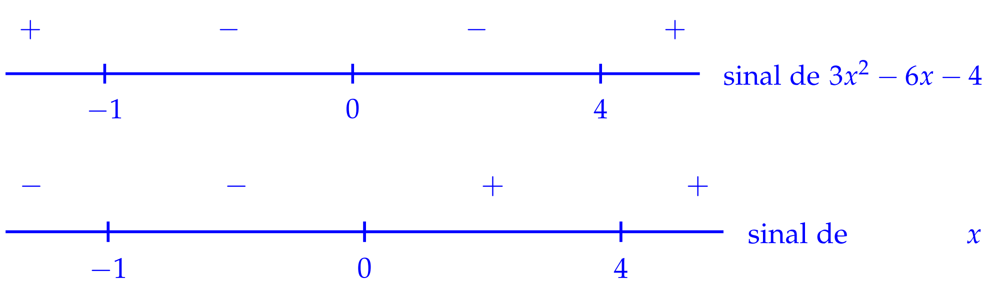
$$f''(x) = [f'(x)]' = [x^3 - 3x^2 - 4x]' = 3x^2 - 6x - 4$$

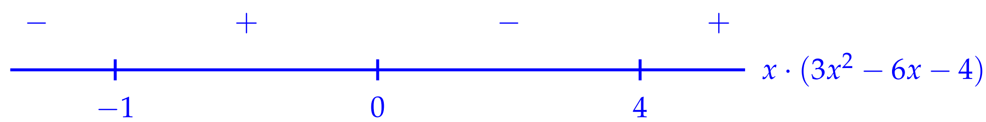
Verificamos que:

$$f''(0) = 3 \cdot 0^2 - 6 \cdot 0 - 4 = -4 < 0,$$

$$f''(-1) = 3 \cdot (-1)^2 - 6 \cdot (-1) - 4 = 17 > 0,$$

de modo que 0 é máximo local e -1 é mínimo local. Resta analisar os extremos do intervalo. Para isto, é preciso estudarmos o sinal de f':





Assim, no intervalo $[-2,-1[$, a função é estritamente decrescente, de modo que $f(-2) = \frac{(-2)^4}{4} - (-2)^3 - 2(-2)^2 + 3 = 11$ é um máximo local. No intervalo $]1,3]$, a função é estritamente decrescente, de modo que $f(3) = \frac{(3)^4}{4} - (3)^3 - 2(3)^2 + 3 = \frac{81}{4} - 25 = -\dfrac{19}{4}$ é mínimo local. Uma vez que $f(3) < f(-1) < f(0) < f(-2)$, segue que:

$x = -2$ é ponto de máximo global;
$x = -1$ é ponto de mínimo local;
$x = 0$ é ponto de máximo local;
$x = 2$ é ponto de mínimo global;

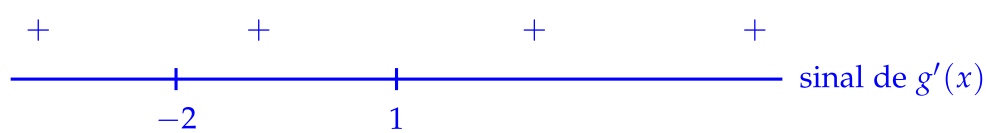
(b) Buscamos os pontos críticos de g resolvendo a equação:

$$g'(x) = [x^3 - 3x^2 + 3x - 1]' = 3x^2 - 6x + 3 = 0$$

A única solução da equação acima é $x = 1$. Para verificarmos se este ponto é de máximo local, mínimo local ou de inflexão, calculamos $g''(1)$. Temos:

$$g''(x) = [g'(x)]' = [3x^2 - 6x + 3]' = 6x - 6$$

e portanto $g''(1) = 6 - 6 = 0$. O ponto é, portanto, de inflexão. Resta analisarmos g nos extremos do intervalo $[-2,1]$. Para tanto, vamos estudar o sinal de g':



Concluímos que a função é estritamente crescente no intervalo $[-2,1]$, de modo que deve assumir seu mínimo em $x = -2$ e seu máximo em $x = 1$. Logo, $x = -2$ é o mínimo global e $x = 1$ é o máximo global desta função.

(c) Buscamos os pontos críticos de h resolvendo a equação $h'(x) = 0$, ou seja:

$$h'(x) = [\sin(x) - \cos(x)]' = \cos(x) + \sin(x) = 0 \iff \cos(x) = -\sin(x)$$

No intervalo $[0, \pi]$, a igualdade acima ocorre somente quando $x = \frac{3\pi}{4}$. Para verificar se temos um ponto de máximo local, mínimo local ou de inflexão, calculamos a derivada segunda de h:

$$h''(x) = [h'(x)]' = [\cos(x) + \sin(x)]' = -\sin(x) + \cos(x)$$

Como $h''\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2} < 0$,
segue que $\frac{3\pi}{4}$ é um máximo local. Resta analisarmos os valores dos extremos do intervalo $[0, \pi]$. Para tanto, estudamos o sinal de $h'(x)$.

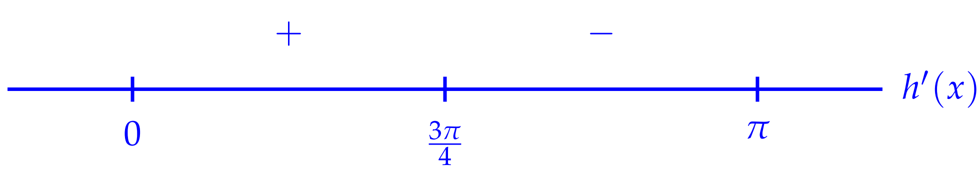
Para $x \in [0, \pi/2]$, tanto $\sin(x)$ quanto $\cos(x)$ assumem valores maiores ou iguais a zero, de modo que $h'(x) = \sin(x) + \cos(x) \geq 0$.
Analisando o círculo trigonométrico, tendo em conta que para todo $x \in [\pi/2, 3\pi/4], \sin(x) \geq \sqrt{2}/2$ e $\cos(x) \geq -\frac{\sqrt{2}}{2}$, também garantimos que $h'(x) = \sin(x) + \cos(x) \geq \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} = 0$. Assim:

$$\left(\forall x \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right]\right)\left(h'(x) = \sin(x) + \cos(x) \geq 0\right)$$

Agora, para $x \in [3\pi/4, \pi]$, temos $-1 \leq \cos(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2}$ e $0 \leq \sin(x) \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$, de modo que:

$$h'(x) = \sin(x) + \cos(x) \leq -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} = 0.$$

Assim, temos a tabela:



Concluindo que a função h é estritamente crescente em $[0, 3\pi/4]$ e estritamente decrescente em $[3\pi/4, \pi]$, de modo que 0 e π são, ambos, mínimos locais. Temos, também, $h(0) = \sin(0) - \cos(0) = 0 - 1 = -1$ e $h(\pi) = \sin(\pi) - \cos(\pi) = 0 - (-1) = 1$. Como $h\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} - \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}$, temos $h(0) < h(\pi) < h\left(\frac{3\pi}{4}\right)$, e:

$x = 0$ é mínimo global de h;

$x = \frac{3\pi}{4}$ é máximo global de h;

$x = \pi$ é mínimo local de h;

(d) Buscamos os pontos críticos de f resolvendo a equação:

$$f'(x) = \left[\frac{1}{x^3 - 2x^2}\right]' = \frac{4x - 3x^2}{(x^3 - 2x^2)^2} = 0$$

Notamos que a equação acima equivale à equação $4x - 3x^2 = 0$. As soluções desta equação são $x = 0$, que não pertence ao domínio de f', e $x = \frac{4}{3}$, que pertence a $]0, 2[$. Para verificar se temos em mãos um máximo local, um mínimo local ou um ponto de inflexão, calculamos a derivada segunda:

$$f''(x) = [f'(x)]' = \left[\frac{4x - 3x^2}{(x^3 - 2x^2)^2}\right]' =$$

$$= \frac{[(4x - 3x^2)]' \cdot (x^3 - 2x^2)^2 - (4x - 3x^2) \cdot [(x^3 - 2x^2)^2]'}{(x^3 - 2x^2)^4} =$$

$$= \frac{4\left(3x^2 - 8x + 6\right)}{x^4\left(x - 2\right)^3}$$

Note que para todo $x \in]0, 2[$, $(x - 2) < 0$, de modo que $(x - 2)^3 < 0$. Desta forma, $\frac{4}{x^4 \cdot (x-2)^3} < 0$ para todo $x \in]0, 2[$, e o sinal da derivada segunda depende somente do sinal de $3x^2 - 8x + 6$. Como para todo $x \in]0, 2[$, $3x^2 - 8x + 6 > 0$, segue que $f''\left(\frac{4}{3}\right) < 0$, de modo que $\frac{4}{3}$ é um ponto de máximo local. Notando que:

$$\lim_{x \to 2_-} \frac{1}{x^3 - 2x^2} \overset{u = x^3 - 2x^2}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u \to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty$$

e que:

$$\lim_{x \to 0_+} \frac{1}{x^3 - 2x^2} \overset{u = x^3 - 2x^2}{\overset{\uparrow}{=}} \lim_{u \to 0_-} \frac{1}{u} = -\infty,$$

podemos concluir que $\frac{4}{3}$ é um *máximo global* desta função.

(3) Mostre que a função:

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

é uma função crescente de x.

Solução: Temos:

$$f'(x) \overset{\substack{\text{Regra do}\\ \text{Quociente}}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{[x]' \cdot \sqrt{a^2 + x^2} - x \cdot [\sqrt{a^2 + x^2}]'}{(\sqrt{a^2 + x^2})^2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - x \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2} \cdot \sqrt{a^2+x^2}}}{a^2 + x^2} =$$

$$= \frac{\sqrt{a^2 + x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2 + x^2} = \frac{\frac{a^2+x^2-x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}}{a^2 + x^2} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cdot \frac{1}{a^2 + x^2}$$

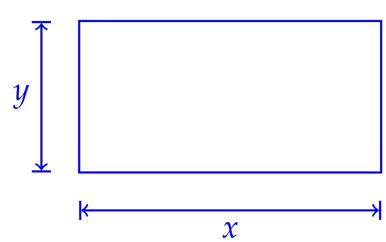
Uma vez que para todo $x \in \mathbb{R}$ tem-se:

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2 + x^2}} > 0 \text{ e } \frac{1}{a^2 + x^2} > 0,$$

segue que a função, por ser tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ $f'(x) > 0$, é estritamente crescente.

(4) Determinar as dimensões do retângulo de área máxima e cujo perímetro é $2p$.

Solução: Sejam x e y as medidas dos lados do retângulo em apreço. Pelo enunciado, temos:



$$x + y + x + y = 2x + 2y = 2p$$

ou seja,

$$x + y = p$$

de modo que $y = p - x$. A área, A, do retângulo pode ser expressa em termos de x como:

$$A(x) = x \cdot (p - x) = p \cdot x - x^2$$

Para encontrar o maximante e/ou minimante desta função, devemos resolver a equação $A'(x) = 0$, ou seja:

$$A'(x) = p - 2x = 0$$

cuja solução é $x = \frac{p}{2}$. O outro lado do retângulo mede, portanto, $y = p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}$. Para determinar se $\frac{p}{2}$ é maximante ou minimante, calculamos a derivada segunda de A em $\frac{p}{2}$. Tem-se:

$$A''(x) = [p - 2x]' = -2$$

de modo que $A''\left(\frac{p}{2}\right) < 0$ e $\frac{p}{2}$ é maximante. Assim, as dimensões do retângulo de perímetro $2p$ de maior área são $\frac{p}{2}$ e $\frac{p}{2}$, portanto um quadrado.

(5) Qual ponto da curva dada por $y = \frac{2}{x}$, para $x > 0$, está mais próximo da origem?

Solução: a distância entre um ponto da curva $y = \frac{2}{x}$, ou seja, um ponto da forma $\left(x, \frac{2}{x}\right), x \neq 0$ e a origem pode ser calculada pela fórmula:

$$d(x) = \sqrt{(x-0)^2 + \left(\frac{2}{x} - 0\right)^2} = \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}$$

Para encontrar o valor de x que minimiza $d(x)$, devemos primeiramente estudar seus pontos críticos. Para tanto, devemos resolver a equação $d'(x) = 0$. Temos:

$$d'(x) = \frac{2x - \frac{8}{x^3}}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}}$$

A expressão acima se anula se, e somente se:

$$2x - \frac{8}{x^3} = 0$$

$$2x = \frac{8}{x^3}$$

$$x^4 = 4$$

que admite como soluções $x = -\sqrt[4]{4}$ e $x = \sqrt[4]{4}$.

Para determinar se estes valores são minimantes ou maximantes de d, devemos calcular $d''(x)$. Tem-se:

$$d''(x) = [d'(x)]' = \left[\frac{2x - \frac{8}{x^3}}{2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}}\right]' \overset{\text{Regra do Quoc.}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \frac{\left[2x - \frac{8}{x^3}\right]' \cdot \left(2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}\right) - \left(2x - \frac{8}{x^3}\right) \cdot \left[2 \cdot \sqrt{x^2 + \frac{4}{x^2}}\right]'}{4 \cdot \left(x^2 + \frac{4}{x^2}\right)} =$$

$$= \frac{24x^4 + 16x^3 + 32}{x^2 \cdot (x^4 + 4) \cdot \sqrt[4]{x^2 + 4}}$$

Observando que para todo $x \neq 0$ temos $x^2 > 0, x^4 + 4 > 0$ e $\sqrt[4]{x^2 + 4} > 0$, vemos que o sinal de $d''(x)$ depende somente do sinal de $24x^4 + 16x^3 + 32$. Assim, $d''(\sqrt[4]{4}) = 24 \cdot (\sqrt[4]{4})^2 + 16 \cdot (\sqrt[4]{4})^3 + 32 > 0$, de modo que $x = \sqrt[4]{4}$ é um minimante da função $d(x)$.

O ponto da curva dada por $y = \frac{2}{x}$ com $x > 0$ que minimiza a distância à origem é, portanto, $\left(\sqrt[4]{4}, \frac{2}{\sqrt[4]{4}}\right) = \left(\sqrt[4]{4}, \frac{\sqrt[4]{4}}{2}\right)$.

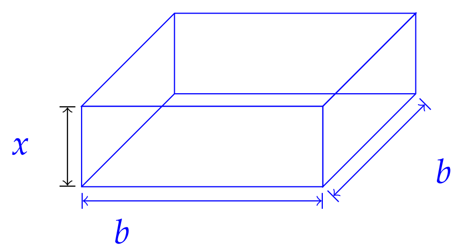
(6) Seus metalúrgicos foram contratados por uma fábrica de papel para projetar um tanque retangular de aço, com base quadrada, sem tampa, e com 500m^3 de capacidade. O tanque será construído soldando-se chapas de aço umas às outras ao longo das bordas. Como engenheiro de produção, sua tarefa é determinar as dimensões para a base e a altura que farão o tanque pesar o mínimo possível. Que dimensões serão passadas para a oficina?

Solução: Sejam b a medida do lado da base do tanque e x a sua altura. Sujeitos à restrição Volume do tanque $= x \cdot b^2 = 500$, devemos minimizar seu peso – o que, neste caso, evidentemente corresponde a minimizar a área das chapas. A área, por sua vez, é:

$$A(x) = b^2 + 4 \cdot b \cdot x$$

Como $b^2 = \frac{500}{x}$, a área pode ser expressa como:

$$A(x) = \frac{500}{x} + 4 \cdot \sqrt{\frac{500}{x}} \cdot x$$



Devemos encontrar um valor de x que minimize A (e portanto minimize o peso do tanque). Para tanto, vamos procurar os pontos críticos de A resolvendo a equação:

$$A'(x) = -\frac{500}{x^2} + 4 \cdot \left[\frac{d}{dx}\left(\sqrt{\frac{500}{x}}\right) x + \frac{d}{dx}(x)\sqrt{\frac{500}{x}} \right] =$$

$$= -\frac{500}{x^2} + 4 \cdot \left[\left(-\frac{5\sqrt{5}}{x^{\frac{3}{2}}}\right) x + 1 \cdot \sqrt{\frac{500}{x}} \right] = \frac{20\left(\sqrt{5}x^{\frac{3}{2}} - 25\right)}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} = 0$$

ou seja,

$$\therefore A'(x) = \frac{20\left(\sqrt{5}x^{\frac{3}{2}} - 25\right)}{x^{\frac{3}{2}}\sqrt{x}} = 0.$$

Observamos que a igualdade acima ocorre se, e somente se:

$$\sqrt{5} \cdot x^{\frac{3}{2}} - 25 = 0$$

$$\sqrt{5} \cdot x^{\frac{3}{2}} = 25$$

$$x^{\frac{3}{2}} = 5 \cdot \sqrt{5}$$

$$x^3 = 125$$

$$x = \sqrt[3]{125} = 5.$$

Resta verificarmos se $x = 5$ realmente minimiza a área. Para tanto, calculamos $A''(x)$:

$$A''(x) = \frac{10\left(25x + 75x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} - \sqrt{5}x^{\frac{5}{2}}\right)}{x^4},$$

cujo sinal depende apenas do sinal de $25x + 75x^{\frac{1}{2}}\sqrt{x} - \sqrt{5}x^{\frac{5}{2}}$. Como $25 \cdot 5 + 75 \cdot 5^{\frac{1}{2}}\sqrt{5} - \sqrt{5} \cdot 5^{\frac{5}{2}} = 375 > 0$, segue que $A''(5) > 0$ e $x = 5$ de fato *minimiza* a área, e por conseguinte o peso da caixa.

(7) Suponha que a qualquer momento t (em segundos) a corrente alternada i (em ampères) que percorre um circuito seja dada por $i(t) = 2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t)$. Qual é o pico de corrente que pode ocorrer nesse circuito?

Solução: O pico de corrente é o seu valor máximo. Para encontrá-lo, portanto, devemos resolver a equação:

$$i'(t) = [2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot \sin(t)]' = 2 \cdot [\cos(t)]' + 2 \cdot [\sin(t)]' = 2 \cdot [-\sin(t)] + 2 \cdot [\cos(t)] =$$

$$= -2 \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t) = 0$$

A igualdade acima ocorre se, e somente se,

$$\cos(t) = \sin(t)$$

A igualdade acima ocorre para $t = \frac{\pi}{4} + k \cdot \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$. Uma vez que a função i é periódica de período 2π (veja os **Exemplos 18** e **19** da AGENDA 2 e note que a soma de funções periódicas de mesmo período 2π tem período 2π), vamos restringir nossa análise ao intervalo $[0, 2\pi]$. Neste intervalo, a equação é satisfeita para $t = \frac{\pi}{4}$ e para $t = \frac{5\pi}{4}$. Para determinar se esses pontos são pontos de máximo local (ou global), mínimo local (ou global) ou de inflexão, calculamos:

$$i''(t) = [i'(t)]' = [-2 \cdot \sin(t) + 2 \cdot \cos(t)]' = -2 \cdot [\sin(t)]' + 2 \cdot [\cos(t)]' =$$

$$= -2 \cdot \cos(t) + 2 \cdot [-\sin(t)] = -2 \cdot \cos(t) - 2 \cdot \sin(t)$$

Como $i''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = -2 \cdot \sqrt{2} < 0$,
tem-se que $t = \frac{\pi}{4}$ é um máximo local de i, e como:

$$i''\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 \cdot \cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) - 2 \cdot \sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 2 \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) =$$

$$= 2\sqrt{2} > 0,$$

segue que $t = \frac{5\pi}{4}$ é um ponto de mínimo da corrente. Como $i(0) = 2 \cdot \cos(0) + 2 \cdot \sin(0) = 2$, $f(2\pi) = 2 \cdot \cos(2\pi) + 2 \cdot \sin(2\pi)$ e $f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}$, segue que o máximo da corrente ocorre aos $\pi/4$ segundos, sendo igual a $2\sqrt{2}$ ampères (que é o pico de corrente).

(8) A resposta do corpo a uma dose de um medicamento é representada por uma equação da forma:

$$R = M^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)$$

onde C é uma constante positiva e M é a quantidade de medicamento absorvida no sangue. Por exemplo, se a resposta R esperada for uma variação na pressão sanguínea, então R deve ser medido em milímetros de mercúrio; se a resposta esperada for uma variação na temperatura, R será medido em graus centígrados e assim por diante.

(a) Determine dR/dM. Esta quantidade é denominada **sensibilidade** do corpo ao medicamento.

Solução: Temos:

$$\frac{dR}{dM} = \frac{d}{dM}\left(M^2 \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{M}{3}\right)\right) = \frac{d}{dM}\left(\frac{M^2 \cdot C}{2} - \frac{M^3}{3}\right) =$$

$$= \frac{d}{dM}\left(\frac{M^2 \cdot C}{2}\right) - \frac{d}{dM}\left(\frac{M^3}{3}\right) = M \cdot C - M^2$$

(b) Calcule a quantidade de medicamento à qual o organismo é mais sensível determinando o valor de M que maximiza dR/dM.

Solução: Vamos denotar por $S = S(M)$ a sensibilidade do corpo ao medicamento, calculado no item (a), ou seja:

$$S(M) = M \cdot C - M^2$$

Para encontrar M que maximize S, devemos encontrar as soluções de:

$$S'(M) = C - 2 \cdot M = 0$$

para o que temos:

$$M = \frac{C}{2}.$$

Resta verificar se este valor realmente *maximiza* S. Para tanto, calculamos:

$$S''(M) = -2 < 0,$$

e portanto $M = C/2$ é a quantidade de medicamento à qual o corpo é mais sensível.

(9) Quando tossimos, a traqueia se contrai e aumenta a velocidade do ar que passa. Isso levanta questões sobre o quanto deveria se contrair para maximizar a velocidade e se ela realmente se contrai tanto assim quando tossimos.

Considerando algumas hipóteses razoáveis sobre a elasticidade da parede da traqueia e de como a velocidade do ar próximo às paredes é reduzida pelo atrito, a velocidade média v do fluxo de ar pode ser modelada pela equação:

$$v = c \cdot (r_0 - r) \cdot r^2 \text{cm/s}, \ \frac{r_0}{2} \leq r \leq r_0$$

onde r_0 é o raio, em centímetros, da traqueia em repouso e c é uma constante positiva cujo valor depende, em parte, do comprimento da traqueia. Demonstre que v é máximo quando $r = (2/3) \cdot r_0$, ou seja, quando a traqueia está 33% contraída.[1]

Solução: Primeiramente procuramos os pontos críticos de $v = v(r)$ resolvendo a equação:

$$v'(r) = \frac{d}{dr}[c \cdot (r_0 - r) \cdot r^2] \overset{\substack{\text{Regra do} \\ \text{Produto} \\ \uparrow}}{=} c \cdot \left[\frac{d}{dr}(r_0 - r) \cdot r^2 + (r_0 - r) \cdot \frac{d}{dr}(r^2)\right] =$$

$$= c \cdot [-r^2 + 2 \cdot r \cdot (r_0 - r)] = 0$$

Como c é uma constante positiva, a igualdade acima ocorre se, e somente se:

$$-r^2 + 2 \cdot r_0 \cdot r - 2 \cdot r^2 = 0$$

$$r \cdot (2 \cdot r_0 - 3 \cdot r) = 0$$

[1] O impressionante é que imagens obtidas com raios X confirmam que a traqueia se contrai exatamente assim durante a tosse!

Uma vez que $r = 0$ não é aceitável (pois $r_0/2 \leq r \leq r_0$), tem-se:

$$2 \cdot r_0 - 3 \cdot r = 0 \iff r = \frac{2}{3} \cdot r_0$$

Para verificar que $r = 2r_0/3$ é, de fato, maximante da função v, devemos calcular:

$$v''(r) = [v'(r)]' = [c \cdot r \cdot (2 \cdot r_0 - 3 \cdot r)]' \overset{\substack{\text{Regra do} \\ \text{Produto} \\ \uparrow}}{=} c \cdot \left[\frac{d}{dr}(r) \cdot (2 \cdot r_0 - 3 \cdot r) + r \cdot \frac{d}{dr}(-3 \cdot r)\right] =$$

$$= c \cdot [2 \cdot r_0 - 3 \cdot r + r \cdot (-3)] = c \cdot [2 \cdot r_0 - 6 \cdot r]$$

Como:

$$v''\left(\frac{2r_0}{3}\right) = c \cdot \left[2 \cdot r_0 - 6 \cdot \left(\frac{2r_0}{3}\right)\right] = c \cdot [2 \cdot r_0 - 4 \cdot r_0] = -2 \cdot c \cdot r_0 < 0,$$

segue do teste da derivada segunda que $r = \frac{2}{3}r_0$ é maximante da função v.

(10) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função derivável, e seja $g(x) = \frac{f(x)}{x}$, $x \neq 0$. Suponha que x_0 seja ponto de máximo local de g. Mostrar que $x_0 \cdot f'(x_0) - f(x_0) = 0$.

Solução: Como x_0 é ponto de máximo local de g, tem-se $g'(x_0) = 0$, ou seja,

$$g'(x_0) = \frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{x}\right)\Bigg|_{x=x_0} \overset{\substack{\text{Regra do} \\ \text{Quociente} \\ \uparrow}}{=} \frac{f'(x) \cdot x - f(x) \cdot [x]'}{x^2}\Bigg|_{x=x_0} =$$

$$= \frac{f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0)}{x_0^2} = 0$$

o que equivale a dizer que x_0 satisfaz:

$$f'(x_0) \cdot x_0 - f(x_0) = 0.$$

(11) Um caminhoneiro percorreu 159km em duas horas, em uma estrada cujo limite de velocidade era de 65km/h e foi multado por excesso de velocidade. Por quê?

Solução: A velocidade média do caminhoneiro foi:

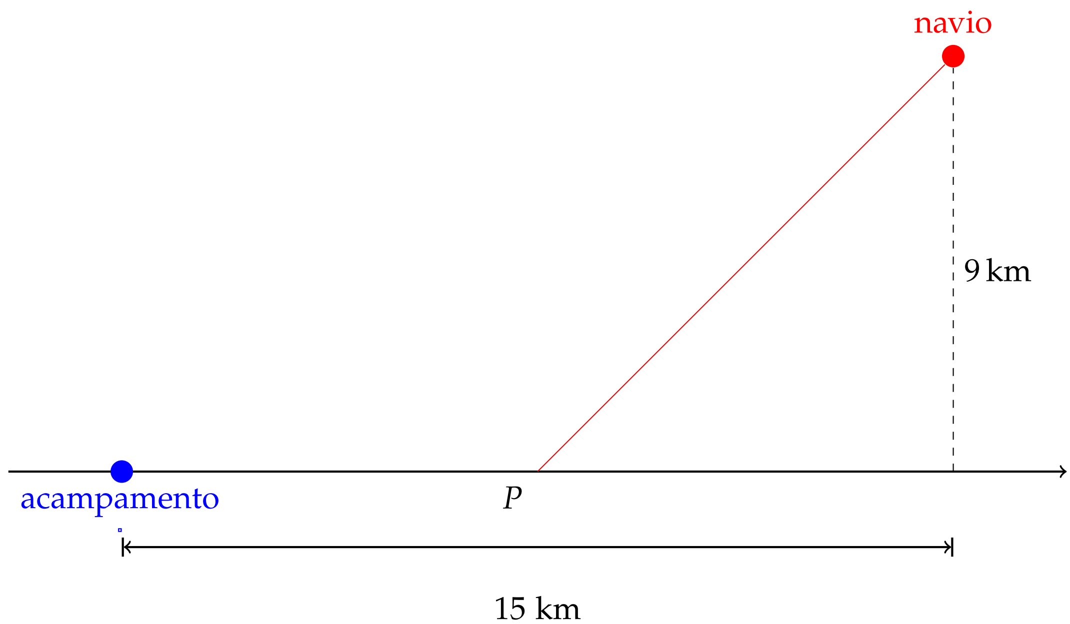
$$v_m = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{159 \text{ km}}{2\,\text{h}} = 79.5\text{km/h}.$$

Como podemos assumir ser a distância $s = s(t)$ percorrida pelo caminhoneiro em t horas como uma função contínua em $[0, 2]$ e derivável no intervalo $]0, 2[$, segue do **Teorema do Valor Médio** que existe $t_0 \in]0, 2[$ tal que:

$$v(t_0) = s'(t_0) = \frac{s(2) - s(0)}{2 - 0} = 79.5\text{km/h} = v_m$$

No instante $t_0 \in]0, 2[$ o caminhoneiro esteve a uma velocidade maior do que a velocidade máxima, e por isto foi multado.

(12) Um navio está ancorado a 9 km do ponto mais próximo da costa, que está a uma distância de 15km do acampamento, conforme ilustra a figura a seguir. Um mensageiro anda a 5 km/h e rema a 4 km/h. Em que ponto da costa o mensageiro deve desembarcar para chegar ao acampamento o mais rápido possível?



Solução: O tempo total (t_T) gasto pelo mensageiro é igual à soma do tempo gasto remando (t_r) com o tempo gasto caminhando (t_c):

$$t_T = t_r + t_c$$

O tempo gasto remando é igual à distância percorrida remando, d_r dividida pela velocidade em que o mensageiro rema ($v_r = 4\text{km/h}$), enquanto que o tempo gasto caminhando é igual à distância percorrida pelo mensageiro caminhando dividida pela velocidade com que o mensageiro caminha ($v_c = 5\text{km/h}$)

$$t_T = \frac{d_r}{4} + \frac{d_c}{5}$$

Denotemos por x a distância entre o acampamento e o ponto P, de modo que $d_c = x$ e, pelo **Teorema de Pitágoras**,

$$d_r = \sqrt{81 + (15 - x)^2}$$

Assim, podemos expressar:

$$t_T(x) = \frac{x}{5} + \frac{\sqrt{81 + (15 - x)^2}}{4}$$

Vamos determinar os pontos críticos de t_T. Temos

$$t'_T(x) = \frac{1}{5} + \frac{1}{4} \cdot \frac{-(15 - x)}{2 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2}} = \frac{-5 \cdot (15 - x) + 4 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2}}{20 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2}}$$

de modo que:

$$t'_T(x) = 0 \iff 4 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2} - 5 \cdot (15 - x) = 0 \iff$$

$$\iff 4 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2} = 5 \cdot (15 - x) \iff$$

$$\iff 16 \cdot (81 + (15 - x)^2) = 25 \cdot (15 - x)^2 \iff$$

$$\iff 1296 + 16 \cdot (15 - x)^2 = 25 \cdot (15 - x)^2 \iff$$

$$\iff 1296 = 9 \cdot (15 - x)^2 \iff$$

$$\iff 144 = (15 - x)^2 \iff$$

$$\iff 15 - x = 12 \text{ ou } 15 - x = -12$$

$$x = 3 \text{ ou } x = 27 \notin [0, 15].$$

Segue, portanto, que x é ponto crítico de t_T. Vamos verificar que se trata de um minimante calculando:

$$t''_T(x) = [t'_T(x)]' = \left[\frac{-5 \cdot (15 - x) + 4 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2}}{20 \cdot \sqrt{81 + (15 - x)^2}} \right]' =$$

$$= \frac{81}{4\,(x^2 - 30x + 306)\,\sqrt{x^2 - 30x + 306}}$$

Assim,

$$t''_T(3) = \frac{81}{4\,(3^2 - 30 \cdot 3 + 306)\,\sqrt{3^2 - 30 \cdot 3 + 306}} = \frac{3}{500} > 0,$$

de modo que $x = 3$ *minimiza* o tempo total. O mensageiro deve, portanto, desembarcar no ponto da costa que dista 3km do acampamento.