

LISTA 14 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

- (1) Para alguma constante positiva C , a variação da temperatura T de um paciente, em função da dose, D , de um medicamento é dada por:

$$T(D) = \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right) \cdot D^2$$

Determinar qual a dosagem do medicamento capaz de abaixar a temperatura de um paciente com febre alta o mais rapidamente possível.

Solução: devemos encontrar D_0 tal que $\frac{dT}{dD}(D_0)$ seja o maior possível. Primeiramente calculamos:

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dD} &= \frac{d}{dD} \left[\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right) \cdot D^2 \right] \overset{\substack{\text{Regra do} \\ \text{Produto}}}{=} -\frac{D^2}{3} + 2 \cdot D \cdot \left(\frac{C}{2} - \frac{D}{3} \right) = \\ &= -\frac{D^2}{3} + D \cdot C - \frac{2 \cdot D^2}{3} = D^2 + D \cdot C \end{aligned}$$

Ou seja, precisamos maximizar:

$$S(D) = \frac{dT}{dD}(D) = -D^2 + D \cdot C$$

Buscaremos pontos críticos da função acima resolvendo:

$$S'(D) = -2 \cdot D + C = 0$$

*jeancb@ime.usp.br

$$D = \frac{C}{2}$$

Para verificar se este valor maximiza ou minimiza a função, fazemos o teste da derivada segunda, calculando:

$$S''(D) = -2 < 0$$

Como $S''\left(\frac{C}{2}\right) = -2 < 0$, segue que $C/2$ é maximante da função. Assim, a dose que cumpre este papel é $C/2$.

- (2) O momento de torção de uma viga apoiada em uma extremidade, a uma distância x do suporte é dada por:

$$M(x) = \frac{1}{2} \cdot w \cdot L \cdot x - \frac{1}{2} \cdot w \cdot x^2,$$

onde L é o comprimento da viga e w é a carga uniforme por unidade de comprimento. Encontre o ponto da viga onde o momento é o maior possível.

Solução: Devemos encontrar x_0 que maximize M . Para tanto, precisamos resolver a equação:

$$M'(x) = \frac{1}{2} \cdot w \cdot L - w \cdot x = 0$$

$$x = \frac{L}{2}$$

Para verificar que este valor, de fato, maximiza M , fazemos o teste da derivada segunda, calculando:

$$M''(x) = -w < 0$$

donde decorre que $M''\left(\frac{L}{2}\right) = -w < 0$. Portanto, $x = L/2$ maximiza o momento de torção da viga.

- (3) Quando um projétil é atirado, seu alcance, R , é definido como a distância horizontal do ponto de onde atiramos o projétil ao ponto onde o projétil atinge o solo. Se o solo é horizontal e desprezamos a resistência do ar, pode-se demonstrar que:

$$R(\theta) = \frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g},$$

onde v_0 é a velocidade inicial do projétil, g é a aceleração da gravidade (constante) e θ é o ângulo inicial de lançamento do projétil com respeito à horizontal, de modo que $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Qual o ângulo que maximiza o alcance?

Solução: Devemos encontrar θ tal que R seja máximo. Para isto, resolvemos:

$$\begin{aligned} R'(\theta) &= \frac{d}{d\theta} \left(\frac{v_0^2 \cdot \sin(2\theta)}{g} \right) = \frac{v_0^2}{g} \cdot \frac{d}{d\theta} (\sin(2\theta)) = \\ &= \frac{v_0^2}{g} \cdot \cos(2\theta) \cdot 2 = \frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos(2\theta) = 0 \end{aligned}$$

Como $v_0 \neq 0$, a igualdade acima ocorre se, e somente se,

$$\cos(2\theta) = 0$$

o que ocorre se, e somente se:

$$2\theta = \arccos(0) = \frac{\pi}{2}$$

ou seja, se, e somente se $\theta = \frac{\pi}{4}$, ou 45° . Para verificar que este valor, de fato, *maximiza* R , calculamos:

$$R''(\theta) = \left[\frac{2v_0^2}{g} \cdot \cos(2\theta) \right]' = \frac{2v_0^2}{g} \cdot [-\sin(2\theta)] \cdot 2 = \frac{-4v_0^2}{g} \cdot \sin(2\theta)$$

Assim:

$$R''\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{-4v_0^2}{g} \cdot \sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{4v_0^2}{g} < 0.$$

Logo, $\theta = \pi/4$, de fato, *maximiza* o alcance.

(4) Esboçar os gráficos das seguintes funções:

(a) $f(x) = x \cdot e^{-x}$

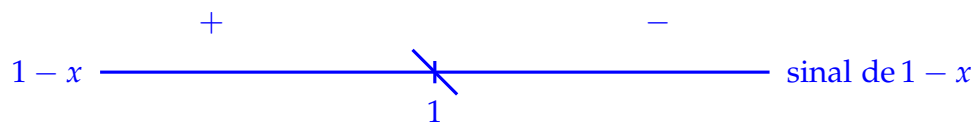
Passo 1: O domínio natural desta função é $\mathbb{R}$, uma vez que podemos calcular $f(x)$ para qualquer $x \in \mathbb{R}$.

Passo 2: A derivada de f é:

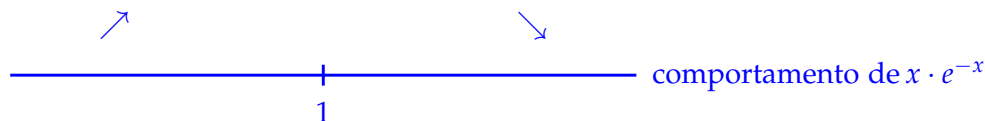
$$\begin{aligned} f'(x) &= [x \cdot e^{-x}]' = [x]' \cdot e^{-x} + x \cdot [e^{-x}]' = e^{-x} - x \cdot e^{-x} = \\ &= (1 - x) \cdot e^{-x} \end{aligned}$$

Observamos que a função derivada está definida em todo $\mathbb{R}$. Basta, portanto, analisarmos seus intervalos de crescimento e de decrescimento.

Uma vez que para todo $x \in \mathbb{R}$ temos $e^{-x} > 0$, o sinal de $f'(x)$ depende unicamente do sinal da expressão $1 - x$



Concluimos que se $x < 1$, $f'(x) > 0$ – ou seja, para $x < 1$, a função é estritamente crescente. Para $x > 1$ tem-se $f'(x) < 0$, de modo que a função é estritamente decrescente. Ademais, em $x = 1$ temos um ponto crítico – ou seja, a derivada se anula.



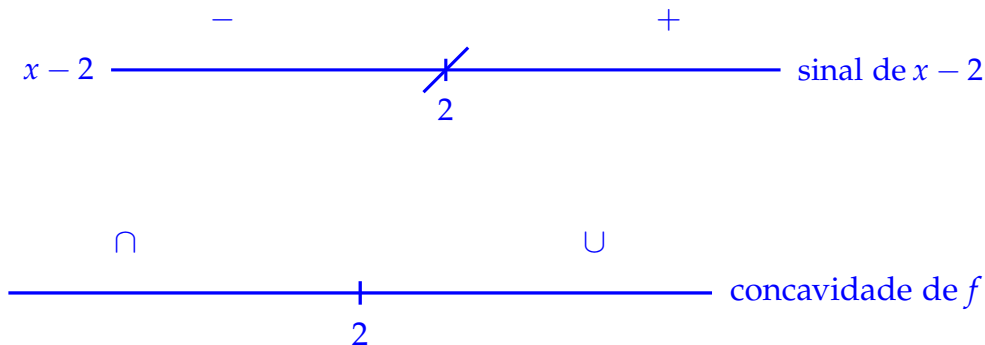
Logo f é crescente em $] - \infty, 1[$ e decrescente em $]1, \infty[$, tendo um ponto de máximo local em $x = 1$.

Passo 3: Calculamos:

$$f''(x) = [(1-x) \cdot e^{-x}]' = [(1-x)]' \cdot e^{-x} + [(1-x)] \cdot [e^{-x}]' = -e^{-x} + (1-x) \cdot [-e^{-x}] =$$

$$= e^{-x} \cdot (x-2)$$

Como para todo $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$, o sinal de $f''(x)$ é determinado pelo sinal de $x-2$. Assim, temos:



Assim, em $] -\infty, 2[$ o gráfico tem concavidade voltada para baixo, em $]2, \infty[$ o gráfico tem concavidade voltada para cima e em $x = 2$ temos um ponto de inflexão.

Passo 4: Neste caso, não precisamos executar este passo.

Passo 5: Temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^x} \stackrel{\text{L.H.}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} = -\infty$$

Passo 6: Vamos determinar as raízes de f . Temos:

$$x \cdot e^{-x} = 0 \iff x = 0$$

Passo 7: Temos:

0	$f(0) = 0 \cdot e^{-0} = 0$	raiz de f
1	$f(1) = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$	máximo local de f
2	$f(2) = 2 \cdot e^{-2} = \frac{2}{e^2}$	ponto de inflexão

Passo 8: Busquemos, primeiramente, assíntotas horizontais, calculando:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot e^{-x} \stackrel{\text{Passo 5}}{=} 0,$$

de modo que a reta $y = 0$ é uma assíntota horizontal de f .
Também, uma vez que:

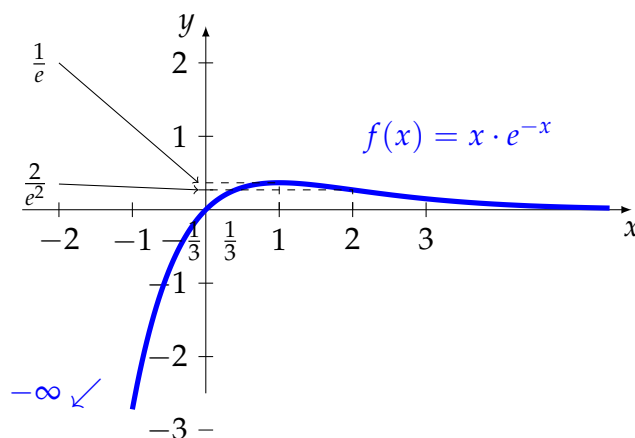
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \cdot e^{-x} \stackrel{\text{Passo 5}}{=} \infty,$$

segue que $y = 0$ é a *única* assíntota horizontal de f .

Ao buscar assíntotas oblíquas, ou seja, assíntotas da forma $y = a \cdot x + b$, obtemos:

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{-x} = 0$$

$$a = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot e^{-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = \infty$$



de modo que não há assíntotas oblíquas.

(b) $f(x) = x + \sin(x)$

Passo 1: o domínio natural desta função é $\mathbb{R}$;

Passo 2: A derivada de f é:

$$\frac{d}{dx}(x + \sin(x)) = 1 + \cos(x)$$

Observamos que para todo $x \in \mathbb{R}$, $-1 \leq \cos(x) \leq 1$, de modo que:

$$0 \leq 1 + \cos(x) = f'(x) \leq 1$$

Conclui-se, portanto, que a função é não-decrescente, assumindo pontos críticos quando:

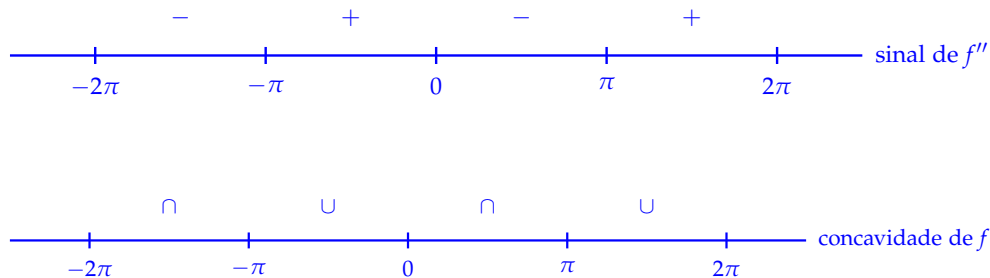
$$0 = 1 + \cos(x) = f'(x) \iff \cos(x) = -1 \iff x = (2k+1) \cdot \pi, k \in \mathbb{Z}$$

Assim, esta função admite infinitos pontos críticos (pontos cuja reta tangente é horizontal, e todos pontos de inflexão), quais sejam, todos os múltiplos ímpares de π .

Passo 3: Temos:

$$f''(x) = [f'(x)]' = [1 + \cos(x)]' = -\sin(x)$$

de modo que o sinal de $f''(x)$ é o oposto do sinal de $\sin(x)$



Os pontos de inflexão de f serão aqueles nos quais se tem $f''(x) = -\sin(x) = 0$, ou seja, todos os múltiplos inteiros de π .

Passo 5: Temos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} x + \sin(x) = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \sin(x) = -\infty$$

Passo 6: Temos:

$$f(x) = x + \sin(x) = 0 \iff \sin(x) = -x \iff x = 0$$

Passo 7: A tabela com os pontos característicos é:

-3π	$f(-3\pi) = -3\pi + \sin(-3\pi) = -3\pi$	ponto crítico e de inflexão de f
-2π	$f(-2\pi) = -2\pi + \sin(-2\pi) = -2\pi$	ponto de inflexão de f
$-\pi$	$f(-\pi) = -\pi + \sin(-\pi) = -\pi$	ponto crítico e de inflexão de f
0	$f(0) = 0 + \sin(0) = 0$	zero e ponto de inflexão de f
π	$f(\pi) = \pi + \sin(\pi) = \pi$	ponto crítico e de inflexão de f
2π	$f(2\pi) = 2\pi + \sin(2\pi) = 2\pi$	ponto de inflexão de f
3π	$f(3\pi) = 3\pi + \sin(3\pi) = 3\pi$	ponto crítico e de inflexão de f

Passo 8: Temos a assíntota horizontal $y = -1$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} 1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

e:

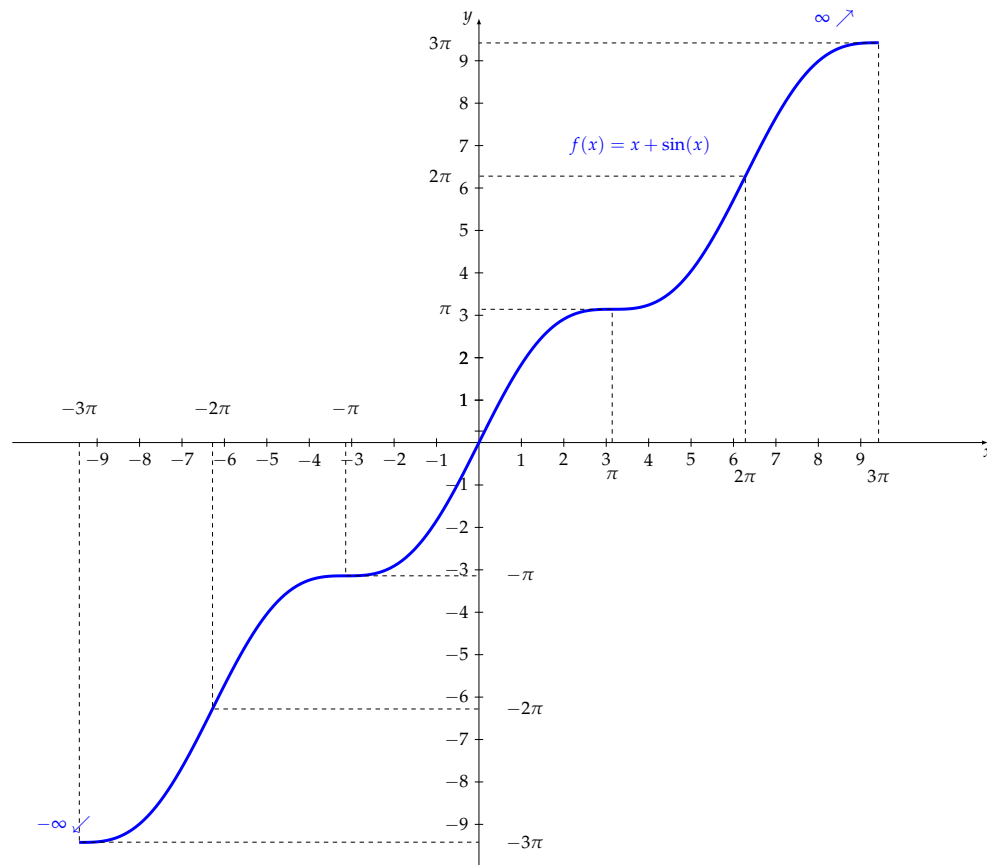
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x + \sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

o gráfico pode admitir uma assíntota da forma $y = a \cdot x + b = x + b$.

Observe que calculando:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} [x + \sin(x) - x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \sin(x)$$

concluimos que $\nexists b$. Logo, o gráfico não admite assíntota oblíqua.



(c) $f(x) = \frac{x+3}{2-x}$

Passo 1: O domínio natural desta função é $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Por se tratar de uma função racional, esta é contínua em todo o seu domínio.

Passo 2: Calculamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x+3}{2-x} \right) = \frac{[(x+3)]' \cdot (2-x) - (x+3) \cdot [(2-x)]'}{(2-x)^2}$$

$$\therefore f'(x) = -\frac{1}{(2-x)^2}$$

Notamos que f' não está definida em $x = 2$. Para *todo* $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ temos $(2-x)^2 > 0$, de modo que $\frac{1}{(2-x)^2} > 0$ e, consequentemente:

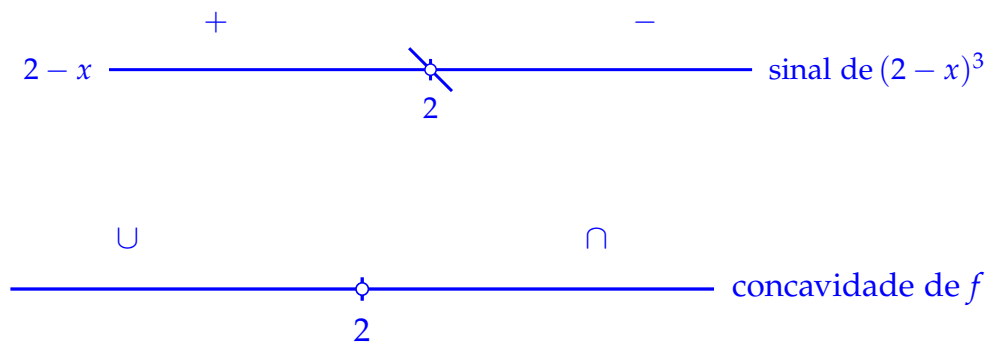
$$(\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{2\}) \left(f'(x) = -\frac{1}{(2-x)^2} < 0 \right)$$

de modo que a função é estritamente decrescente em todo seu domínio. Observamos que nenhum valor de x é tal que $f'(x) = 0$, logo não temos pontos críticos.

Passo 3: Calculamos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx} \left[-\frac{1}{(2-x)^2} \right] = -\frac{2}{(2-x)^3}$$

que está definida em $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. O sinal de $f''(x)$ é o oposto do sinal do termo $(2-x)^3$, que é idêntico ao sinal de $2-x$:



Passo 4: Temos 2 como ponto de acumulação à direita e à esquerda de $\mathbb{R} \setminus \{2\}$. Devemos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+3}{2-x}$$

Fazemos a mudança de variável $u = 2 - x$, e observamos que $\lim_{x \rightarrow 2+} u = \lim_{x \rightarrow 2+} 2 - x = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} = 0$. Além disto, conforme x tende a 2 pela direita, u tende a 0 por valores *menores* do que 0. Assim, $x \rightarrow 2+ \Rightarrow u \rightarrow 0_-$. O limite acima é, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{u \rightarrow 0_-} \frac{5-u}{u} = 5 \cdot \lim_{u \rightarrow 0_-} \frac{1}{u} - \lim_{u \rightarrow 0_-} 1 = -\infty$$

Também temos:

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x+3}{2-x}$$

Fazemos a mudança de variável $u = 2 - x$, e observamos que $\lim_{x \rightarrow 2-} u = \lim_{x \rightarrow 2-} 2 - x = \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} = 0$. Além disto, conforme x tende a 2 pela esquerda, u tende a 0 por valores *maiores* do que 0. Assim, $x \rightarrow 2- \Rightarrow u \rightarrow 0_+$. O limite acima é, portanto:

$$\lim_{x \rightarrow 2-} \frac{x+3}{2-x} = \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{5-u}{u} = 5 \cdot \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{u} - \lim_{u \rightarrow 0+} 1 = \infty$$

Como f' não está definida em $x = 2$, devemos calcular:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} -\frac{2}{(2-x)^3}$$

Fazemos, aqui, a mudança de variável $u = (2-x)^3$, de modo que $x \rightarrow 2+ \Rightarrow u \rightarrow 0-$, de modo que:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} -\frac{2}{(2-x)^3} = \lim_{u \rightarrow 0-} -\frac{2}{u} = -2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0-} \frac{1}{u} = \infty$$

Analogamente,

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = -2 \cdot \lim_{u \rightarrow 0+} \frac{1}{u} = -\infty$$

Assim, conforme nos aproximamos de 2 pela direita, a declividade da reta tangente ao gráfico aumenta para além de qualquer número, tendendo a ficar vertical. Conforme nos aproximamos de 2 pela esquerda, a reta tangente ao gráfico também tende à posição vertical.

Temos, portanto, uma assíntota vertical de equação $x = 2$.

Passo 5: Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{2-x} \stackrel{\text{L.H.}}{\uparrow} -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3+x}{2-x} \stackrel{\text{L.H.}}{\uparrow} -1$$

Assim, temos uma assíntota horizontal, de equação $y = -1$.

Passo 6: Os zeros de f são os valores de x que satisfazem:

$$\frac{x+3}{2-x} = 0 \iff x+3 = 0 \iff x = -3$$

Desta forma, f tem um único zero, que é $x = -3$.

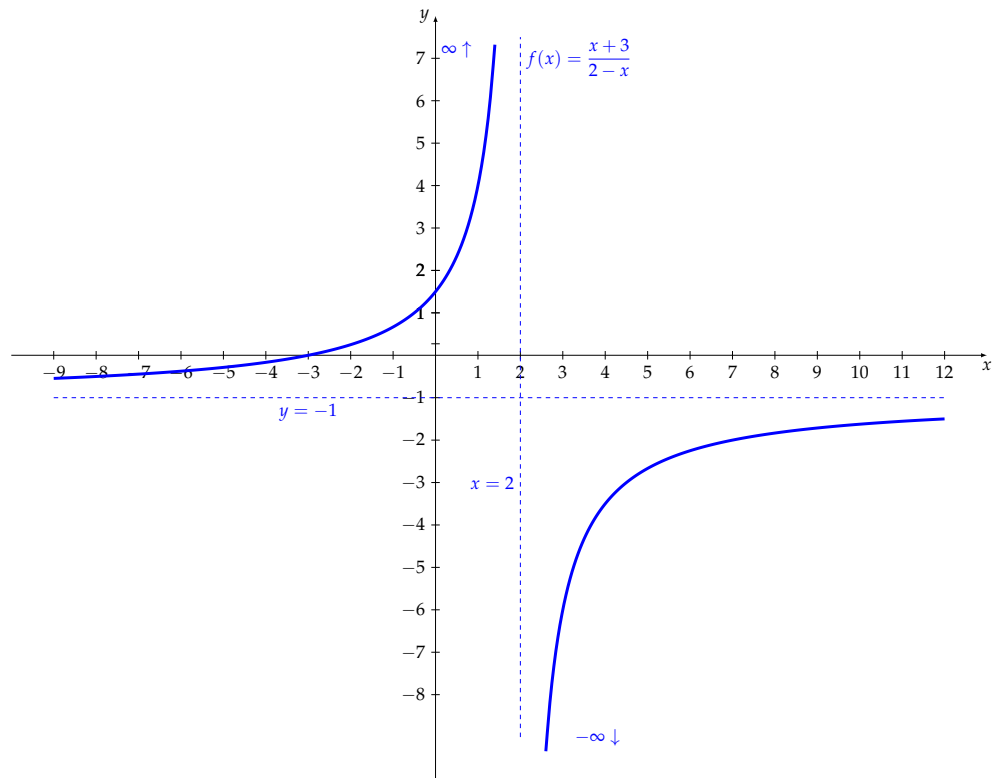
Passo 8: Temos a assíntota horizontal $y = -1$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3+x}{x \cdot (2-x)} = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+3}{x \cdot (2-x)} = 0$$

o gráfico não admite assíntotas oblíquas.



(d) $g(x) = \frac{x^2}{x^2 + 4}$

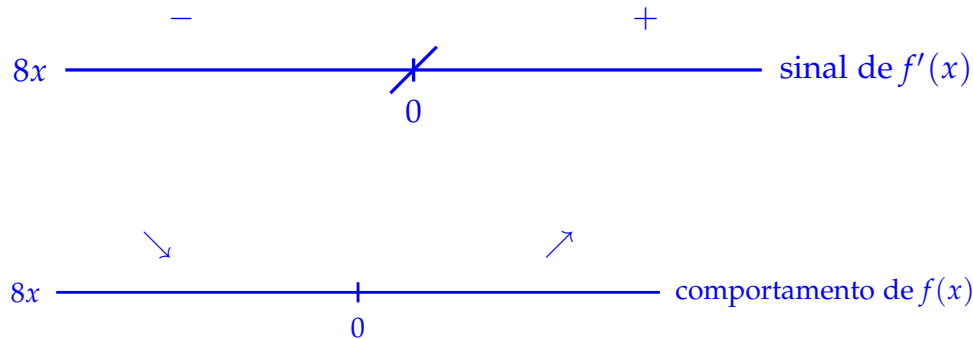
Passo 1: O domínio natural desta função é $\mathbb{R}$. Por se tratar de uma função racional, esta é contínua em todo o seu domínio.

Passo 2: Calculamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{x^2 + 4} \right) = \frac{[x^2]' \cdot (x^2 + 4) - (x^2) \cdot [x^2 + 4]'}{(x^2 + 4)^2}$$

$$\therefore f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 4)^2}$$

Notamos que f' está definida em todo $\mathbb{R}$. Para *todo* $x \in \mathbb{R}$ temos $(x^2 + 4)^2 > 0$, de modo que $\frac{8x}{(x^2+4)^2}$ tem sinal idêntico ao sinal de $8x$.

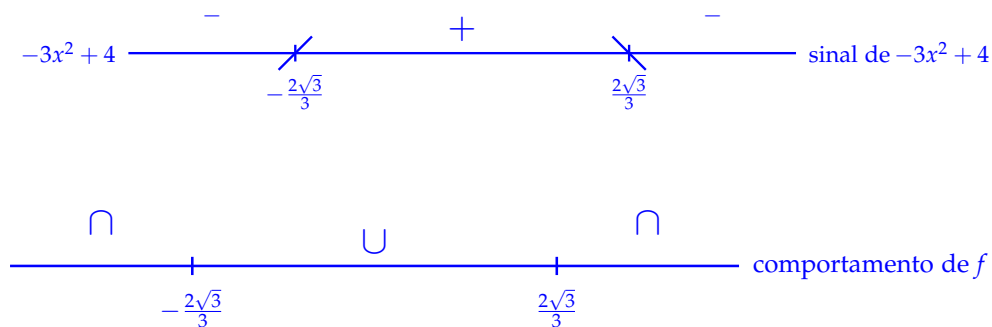


Desta forma, f é estritamente decrescente em $] - \infty, 0[$ e estritamente crescente em $]0, \infty[$. Notamos que $f'(x) = 0 \iff x = 0$, ou seja, 0 é um ponto crítico de f , um mínimo local.

Passo 3: Calculamos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx} \left[\frac{8x}{(x^2 + 4)^2} \right] = \frac{8(-3x^2 + 4)}{(x^2 + 4)^3}$$

que está definida em $\mathbb{R}$. Uma vez que, para todo $x \in \mathbb{R}$, $(x^2 + 4) > 0$ e, portanto, $(x^2 + 4)^3 > 0$, o sinal de $f''(x)$ é idêntico ao sinal de $-3x^2 + 4$:



Notamos que $f''(x) = 0 \iff x = -\frac{2\sqrt{3}}{3}$ ou $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$. Observando o diagrama acima, vemos que $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$ e $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ são pontos de inflexão do gráfico de f .

Passo 5: Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x^2 + 4} \stackrel{\text{L.H.}}{\underset{\uparrow}{=}} 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x^2 + 4} \stackrel{\text{L.H.}}{\underset{\uparrow}{=}} 1$$

Assim, temos uma assíntota horizontal, de equação $y = 1$.

Passo 6: Os zeros de f são os valores de x que satisfazem:

$$\frac{x^2}{x^2 + 4} = 0 \iff x^2 = 0 \iff x = 0$$

Desta forma, f tem um único zero, que é $x = 0$.

$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$f\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(-\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = \frac{1}{4}$	ponto de inflexão de f
0	$f(0) = \frac{0^2}{4 + 0^2} = 0$	zero e mínimo local de f
$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}{\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4} = \frac{1}{4}$	ponto de inflexão de f

Também podemos observar que f é uma função par, pois $f(-x) = \frac{(-x)^2}{(-x)^2 + 4} = \frac{x^2}{x^2 + 4} = f(x)$, de modo que o gráfico apresenta simetria com respeito ao eixo Oy .

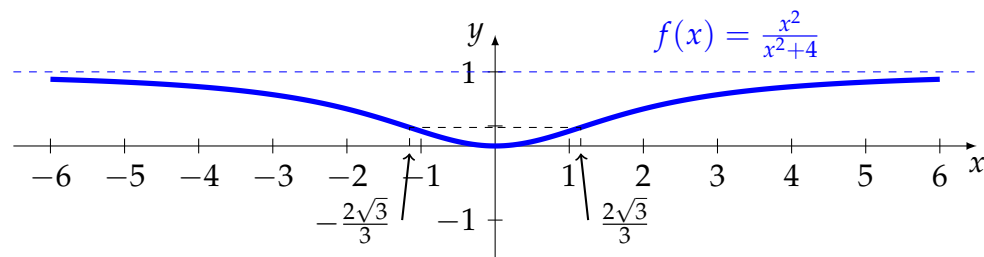
Passo 8: Temos a assíntota horizontal $y = 1$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{x \cdot (x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{x \cdot (x^2 + 4)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 + 4} = 0$$

o gráfico não admite assíntotas oblíquas.



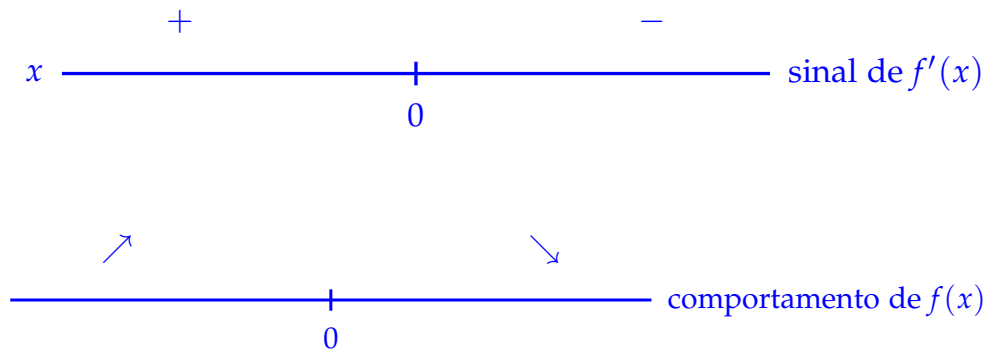
(e) $h(x) = \frac{3}{x^2 - 4}$

Passo 1: O domínio natural desta função é $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Por se tratar de uma função racional, esta é contínua em todo o seu domínio.

Passo 2: Calculamos:

$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{3}{x^2 - 4} \right) = -\frac{6x}{(x^2 - 4)^2}$$

Como para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ temos $-\frac{6}{(x^2 - 4)^2} < 0$, segue que o sinal de $f'(x)$ é o oposto do sinal de x

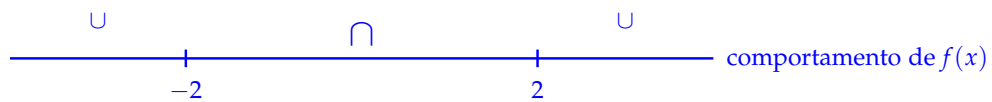
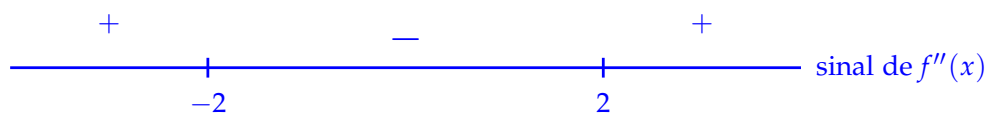
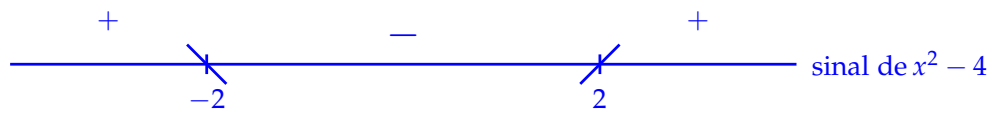


Desta forma, f é estritamente crescente em $] -\infty, 0[$ e estritamente decrescente em $]0, \infty[$. Notamos que $f'(x) = 0 \iff x = 0$, ou seja, 0 é um ponto crítico de f , um máximo local.

Passo 3: Calculamos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx} \left[-\frac{6x}{(x^2 - 4)^2} \right] = \frac{6(3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3}$$

que está definida em $\mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$. Uma vez que para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2, 2\}$ temos $6 \cdot (3x^2 + 4) > 0$, segue que o sinal de $f''(x)$ é idêntico ao sinal de $(x^2 - 4)^3$:



Notamos que $f''(x) = 0 \iff x = -2$ ou $x = 2$. Observando o diagrama acima, vemos que -2 e 2 são pontos de inflexão do gráfico de f .

Também:

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{3}{x^2 - 4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{3}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{3}{x^2 - 4} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{3}{x^2 - 4} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2+} \frac{6 \cdot (3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow 2-} \frac{6 \cdot (3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2+} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2+} \frac{6 \cdot (3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -2-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -2-} \frac{6 \cdot (3x^2 + 4)}{(x^2 - 4)^3} = \infty$$

Passo 5: Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^2 - 4} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{x^2 - 4} = 0$$

Assim, temos uma assíntota horizontal, de equação $y = 0$.

Passo 6: Os zeros de f são os valores de x que satisfazem:

$$\frac{3}{x^2 - 4} = 0$$

Desta forma, f não admite nenhum zero.

-2		assíntota vertical
0	$f(0) = \frac{3}{0^2 - 4} = -\frac{3}{4}$	máximo local de f
2		assíntota vertical

Também podemos observar que f é uma função par, pois $f(-x) = \frac{3}{(-x)^2 - 4} = \frac{3}{x^2 - 4} = f(x)$, de modo que o gráfico apresenta simetria com respeito ao eixo Oy .

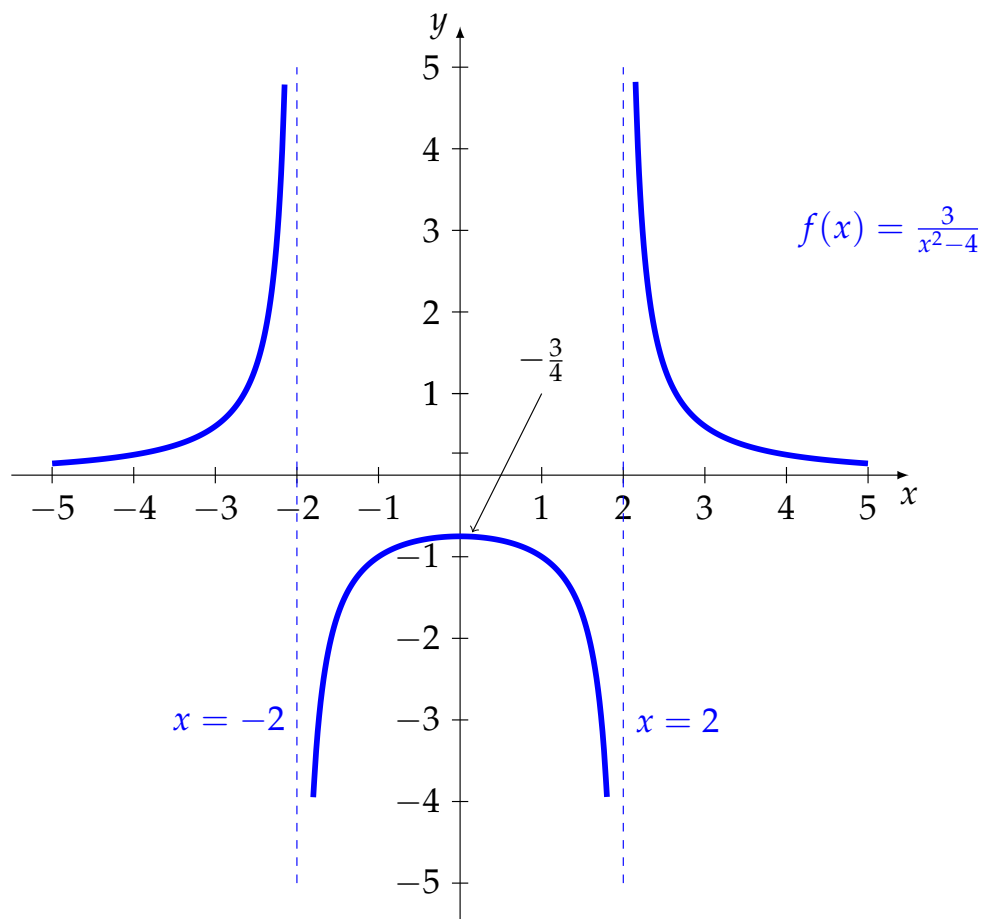
Passo 8: Temos as assíntotas verticais $x = -2$, $x = 2$ e a assíntota horizontal $y = 0$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3 - 4x} = 0$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3 - 4x} = 0$$

o gráfico não admite assíntotas oblíquas.



(f) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$

Passo 1: O domínio natural desta função é $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por se tratar de uma função racional, esta é contínua em todo o seu domínio.

Passo 2: Calculamos:

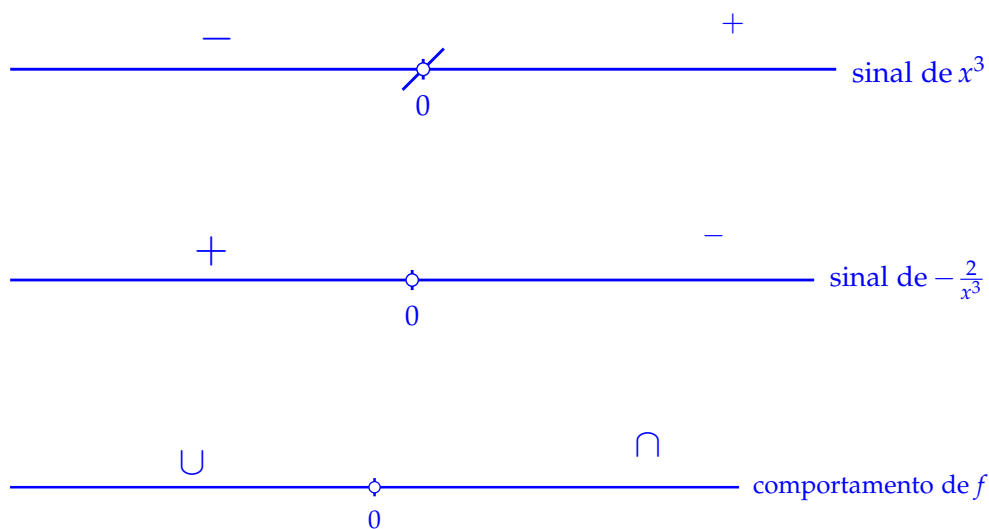
$$f'(x) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} \right) = \frac{x^2 + 1}{x^2}$$

Como para todo $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ temos $\frac{x^2+1}{x^2} > 0$, segue que o sinal de $f'(x)$ é sempre positivo, ou seja, a função é estritamente crescente.

Passo 3: Calculamos:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}[f'(x)] = \frac{d}{dx} \left[\frac{x^2+1}{x^2} \right] = -\frac{2}{x^3}$$

que está definida em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. O sinal de $f''(x)$ é o oposto do sinal de x^3 :



Notamos que $f''(x) = 0 \iff x^2 + 1 = 0$, o que nunca ocorre. Concluimos que o gráfico de f não tem pontos de inflexão.

Passo 4: Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow 0_+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_+} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0_-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0_-} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$$

de modo que temos uma assíntota vertical de equação $x = 0$.

Passo 5: Calculamos:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x} = -\infty$$

Assim, o gráfico não admite assíntota horizontal.

Passo 6: Os zeros de f são os valores de x que satisfazem:

$$\frac{x^2 + 2x - 1}{x} = 0$$

$$x^2 + 2x - 1 = 0$$

o que ocorre se, e somente se, $x = -1 - \sqrt{2}$ ou $x = \sqrt{2} - 1$.

Passo 7:

$-1 - \sqrt{2}$	$f(-1 - \sqrt{2}) = 0$	zero da função
0		assíntota vertical
$\sqrt{2} - 1$	$f(-1 + \sqrt{2}) = 0$	zero da função

Passo 8: Temos a assíntota vertical $x = 0$. Como:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1$$

e:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = 1$$

Logo, o gráfico pode admitir uma assíntota oblíqua da forma $y = x + b$. Temos, também:

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - a \cdot x] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - 1 \cdot x \right] = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{x} = 2 \end{aligned}$$

Segue, portanto, que o gráfico admite uma assíntota oblíqua de equação:

