

LISTA 15 DE MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

(1) A função dada por:

$$f: [-1, 5] \rightarrow \mathbb{R} \\ x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x}, & \text{se } x \neq 0 \\ 0, & \text{se } x \in [-1, 5] \setminus \{0\} \end{cases}$$

é Riemann-integrável em $[-1, 5]$? Por quê?

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \neq f(0) = 0,$$

segue que f é descontínua em 0. Como esta função tem apenas uma descontinuidade, ela é Riemann-integrável em $[-1, 5]$.

(2) Determinar as somas de Riemann superiores e inferiores de ordens 5 e 10 da função $f(x) = 1 + x^2$ no intervalo $[0, 5]$.

Solução: Para obtermos as somas de ordem 5 precisamos, primeiramente, subdividir o intervalo $[0, 5]$ em cinco subintervalos de mesmo comprimento, quais sejam, $[0, 1]$, $[1, 2]$, $[2, 3]$, $[3, 4]$ e $[4, 5]$ – todos de mesmo comprimento igual a $\Delta x_i = 1$. Observamos que a função $f(x) = 1 + x^2$ é *estritamente crescente* em $[0, 5]$, de modo que:

$$\underline{x}_1 = 0 \quad \bar{x}_1 = 1$$

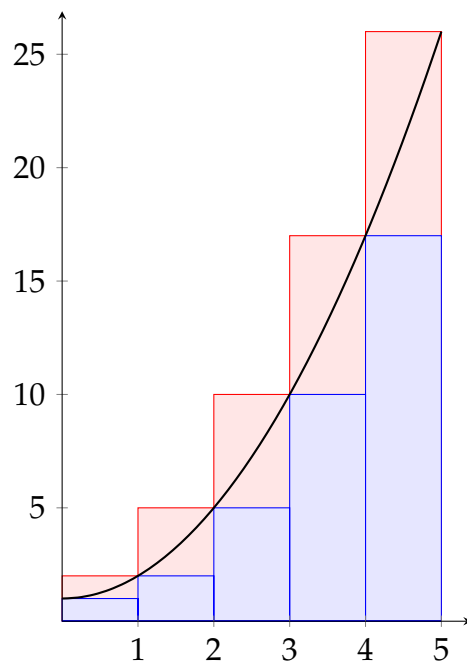
$$\underline{x}_2 = 1 \quad \bar{x}_2 = 2$$

*jeancb@ime.usp.br

$$\underline{x}_3 = 2 \quad \bar{x}_3 = 3$$

$$\underline{x}_4 = 3, \quad \bar{x}_4 = 4$$

$$\underline{x}_5 = 4 \quad \bar{x}_5 = 5.$$



Temos, assim:

$$\begin{aligned} S_5 &= \sum_{i=1}^5 f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 + f(5) \cdot 1 = \\ &= (1 + 1^2) + (1 + 2^2) + (1 + 3^2) + (1 + 4^2) + (1 + 5^2) = 60 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} s_5 &= \sum_{i=1}^5 f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x_i = f(0) \cdot 1 + f(1) \cdot 1 + f(2) \cdot 1 + f(3) \cdot 1 + f(4) \cdot 1 = \\ &= (1 + 0^2) + (1 + 1^2) + (1 + 2^2) + (1 + 3^2) + (1 + 4^2) = 35 \end{aligned}$$

Para obtermos as somas de ordem 10 precisamos, primeiramente, subdividir o intervalo $[0, 5]$ em dez subintervalos de mesmo comprimento, quais sejam, $\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right], \left[2, \frac{5}{2}\right], \left[\frac{5}{2}, 3\right], \left[3, \frac{7}{2}\right], \left[\frac{7}{2}, 4\right], \left[4, \frac{9}{2}\right], \left[\frac{9}{2}, 5\right]$ – todos de mesmo comprimento igual a $\Delta x_i = \frac{1}{2}$. Observamos que a função $f(x) = 1 + x^2$ é *estritamente crescente* em $[0, 5]$, de modo que:

$$\underline{x}_1 = 0, \quad \bar{x}_1 = \frac{1}{2}$$

$$\underline{x}_2 = \frac{1}{2}, \quad \bar{x}_2 = 1$$

$$\underline{x}_3 = 1, \quad \bar{x}_3 = \frac{3}{2}$$

$$\underline{x}_4 = \frac{3}{2}, \quad \bar{x}_4 = 2$$

$$\underline{x}_5 = 2, \quad \bar{x}_5 = \frac{5}{2}$$

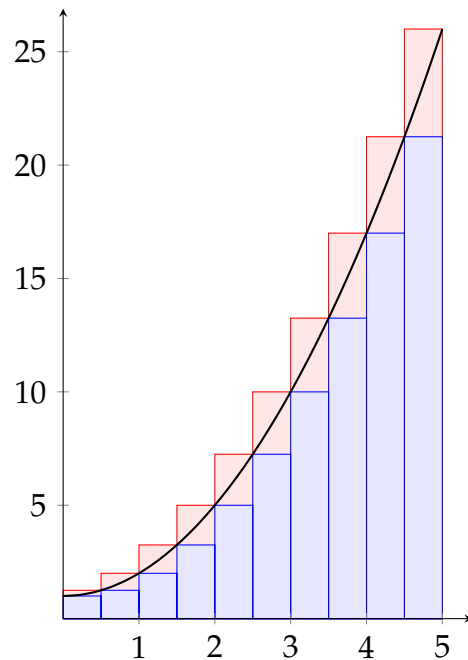
$$\underline{x}_6 = \frac{5}{2}, \quad \bar{x}_6 = 3$$

$$\underline{x}_7 = \frac{7}{2}, \quad \bar{x}_7 = \frac{9}{2}$$

$$\underline{x}_8 = 4, \quad \bar{x}_8 = 5$$

$$\underline{x}_9 = \frac{9}{2}, \quad \bar{x}_9 = \frac{11}{2}$$

$$\underline{x}_{10} = 5, \quad \bar{x}_{10} = 6$$



Assim,

$$\begin{aligned}
 S_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(\bar{x}_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) + f\left(\frac{9}{2}\right) + f(5) \right] = \\
 &= \frac{385}{8}
 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
 s_{10} &= \sum_{i=1}^{10} f(\underline{x}_i) \cdot \Delta x_i = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{i-1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} = \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \left[f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + f(1) + f\left(\frac{3}{2}\right) + f(2) + f\left(\frac{5}{2}\right) + f(3) + f\left(\frac{7}{2}\right) + f(4) \right] = \\
 &= \frac{285}{8}
 \end{aligned}$$

(2) Sejam $f, g : [1, 5] \rightarrow \mathbb{R}$ funções Riemann-integráveis tais que:

$$\int_1^2 f(x)dx = -4, \int_1^5 f(x)dx = 6 \text{ e } \int_1^5 g(x)dx = 8$$

Calcular:

(a) $\int_2^2 g(x)dx;$

(b) $\int_1^2 3 \cdot f(x)dx;$

(c) $\int_2^5 f(x)dx;$

(d) $\int_1^5 [4 \cdot f(x) - g(x)]dx;$

Solução:

(a) Pela **Observação 13** da AGENDA 13, tem-se:

$$\int_2^2 g(x)dx = 0.$$

(b) Pela linearidade da integral, temos:

$$\int_1^2 3 \cdot f(x)dx = 3 \cdot \int_1^2 f(x)dx = 3 \cdot (-4) = -12.$$

(c) Pela aditividade da integral, temos:

$$\int_1^5 f(x)dx = \int_1^2 f(x)dx + \int_2^5 f(x)dx$$

e portanto:

$$\int_2^5 f(x)dx = \int_1^5 f(x)dx - \int_1^2 f(x)dx = 6 - (-4) = 10.$$

(d) Pela linearidade da integral, tem-se:

$$\begin{aligned}\int_1^5 [4 \cdot f(x) - g(x)] dx &= 4 \cdot \int_1^5 f(x) dx - \int_1^5 g(x) dx = \\ &= 4 \cdot 6 - 8 = 24 - 8 = 16.\end{aligned}$$

(3) Determinar, em cada um dos itens a seguir, uma primitiva para a função:

- | | | |
|-------------------------|---|-------------------------------|
| (a) $f(x) = 6x$; | (e) $f(x) = -\pi \cdot \sin(\pi x)$ | (h) $f(x) = \frac{1}{2x^3}$; |
| (b) $f(x) = -3x^{-4}$; | (f) $f(x) = \frac{2}{3} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$ | (i) $f(x) = \frac{1}{x^4}$; |
| (c) $f(x) = x^7$ | (g) $f(x) = \sec(x) \cdot \tan(x)$; | (j) $f(x) = x^7 - 6x + 8$ |
| (d) $f(x) = x^{-4}$; | | |

Solução: Neste exercício a constante fica por sua conta.

- (a) $F(x) = 3x^2$, pois $F'(x) = (3x^2)' = 6x$.
- (b) $F(x) = x^{-3}$, pois $F'(x) = (x^{-3})' = -3 \cdot x^{-4}$.
- (c) $F(x) = \frac{x^8}{8} + 2$, pois $F'(x) = \left(\frac{x^8}{8} + 2\right)' = \frac{8 \cdot x^7}{8} + 0 = x^7$.
- (d) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} + \pi$, pois $F'(x) = \left(-\frac{1}{3x^3} + \pi\right)' = \frac{1}{x^4} + 0 = x^{-4}$.
- (e) $F(x) = \cos(\pi \cdot x) + 5$, pois $F'(x) = (\cos(\pi \cdot x) - 5)' = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot x) + 0 = -\pi \cdot \sin(\pi \cdot x)$.
- (f) $F(x) = 2 \cdot \tan\left(\frac{x}{3}\right) + 8$, pois $F'(x) = \left(2 \cdot \tan\left(\frac{x}{3}\right) + 8\right)' = \frac{2}{3} \cdot \sec^2\left(\frac{x}{3}\right)$.
- (g) $F(x) = \sec(x) + 12$, pois $F'(x) = (\sec(x) + 12)' = \sec(x) \cdot \tan(x)$.
- (h) $F(x) = -\frac{1}{4x^2} + 11$, pois $F'(x) = \left(-\frac{1}{4x^2} + 11\right)' = \frac{1}{2x^3}$.
- (i) $F(x) = -\frac{1}{3x^3} - 15$, pois $F'(x) = \left(-\frac{1}{3x^3} - 15\right)' = \frac{1}{x^4}$.
- (j) $F(x) = \frac{x^8}{8} - 3x^2 + 8x + e^\pi$, pois $F'(x) = \left(\frac{x^8}{8} - 3x^2 + 8x + e^\pi\right)' = x^7 - 6x + 8$.

(4) Calcular $F'(x)$ nos seguintes casos:

$$(a) F(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt$$

$$(b) F(x) = x \cdot \int_2^{x^2} \sin(t) dt$$

Solução:

(a) Pelo **Teorema Fundamental do Cálculo**, parte 1, temos:

$$F'(x) = \frac{d}{dx} \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt = \sqrt{1+x^2}$$

(b) Sabemos, do **Teorema Fundamental do Cálculo**, que:

$$\int_2^{x^2} \sin(t) dt = -\cos(x^2) + \cos(2)$$

de modo que:

$$\frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^2} \sin(t) dt \right) = \frac{d}{dx} (-\cos(x^2) + \cos(2)) = 2x \cdot \sin(x^2)$$

Pela **Regra do Produto**, temos:

$$\begin{aligned} F'(x) &= \frac{d}{dx} \left(x \cdot \int_2^{x^2} \sin(t) dt \right) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \int_2^{x^2} \sin(t) dt + x \cdot \frac{d}{dx} \left(\int_2^{x^2} \sin(t) dt \right) = \\ &= \int_2^{x^2} \sin(t) dt + x \cdot [2x \cdot \sin(x^2)] = \\ &= -\cos(x^2) + \cos(2) + 2x^2 \cdot \sin(x^2) \end{aligned}$$