Lista 16 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Resolver as seguintes integrais pelo método da substituição (não se esqueça da constante de integração):

(a) $\int x^3 \cdot \cos(x^4+2)dx$;

(b) $\int (x^2+1)^{35} \cdot x dx$

(c) $\int \frac{x}{(x+1)^2}dx$

(d) $\int x \cdot \sqrt{x^2-1}dx$.

(e) $\int \frac{e^{4x}}{1+e^{4x}}dx$

(f) $\int x^2 \cdot \sqrt{5+x^3}dx$

(g) $\int \frac{1}{7x-2}dx$

(h) $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$

(i) $\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)}dx$

(j) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

(k) $\int \cos(x) \cdot \sin(\sin(x))dx$

(ℓ) $\int \frac{x^2+\frac{4}{3} \cdot x}{x^3+2x^2-1}dx$

(m) $\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)dx$

(n) $\int \frac{\cos(x)}{(5+\sin(x))^2}dx$

Solução:

(a) Neste caso, fazemos $u(x) = x^4+2$, de modo que $du = u'(x)dx = 4 \cdot x^3 dx$, de modo que:

$$\int x^3 \cdot \cos(x^4+2)dx \overset{u=x^4+2}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{\cos(u)}{4}du \overset{\text{linearidade}}{\underset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4}\int \cos(u)\, du = \frac{1}{4} \cdot \sin(u) + C =$$

*jeancb@ime.usp.br

$$= \frac{1}{4} \cdot \sin(x^4 + 2) + C.$$

(b) Neste caso, fazemos $u(x) = x^2 + 1$, de modo que $du = u'(x)dx = 2 \cdot xdx$ e, portanto, $x \cdot dx = \frac{du}{2}$. Tem-se:

$$\int (x^2+1)^{35} \cdot xdx \overset{u=x^2+1}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{u^{35}}{2} du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{2} \int u^{35} du =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{u^{36}}{36} + C = \frac{(x^2+1)^{36}}{72} + C$$

(c) Neste caso, fazemos $u(x) = x + 1$, de modo que $du = u'(x)dx = dx$ e $x = u - 1$. Tem-se:

$$\int \frac{x}{(x+1)^2} dx \overset{u=x+1}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{u-1}{u^2} du = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^2} \right) du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}}$$

$$= \int \frac{1}{u} du - \int \frac{1}{u^2} du = \ln|u| - \left(-\frac{1}{u} \right) + C = \ln|x+1| + \frac{1}{x+1} + C$$

(d) Neste caso, fazemos $u(x) = \sqrt{x^2 - 1}$, de modo que $du = \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} dx$. Tem-se:

$$\int x \cdot \sqrt{x^2-1} dx = \int \frac{x \cdot (x^2-1)}{\sqrt{x^2-1}} dx \overset{u=\sqrt{x^2-1}}{\overset{\uparrow}{=}} \int u^2 du = \frac{u^3}{3} + C =$$

$$= \frac{(x^2-1)^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

(e) Neste caso, fazemos $u(x) = e^{4x} + 1$, de modo que $du = 4 \cdot e^{4x} dx$, ou seja, $e^{4x} \cdot dx = \frac{du}{4}$. Tem-se:

$$\int \frac{e^{4x}}{1+e^{4x}} dx \overset{u=1+e^{4x}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{4u} du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4} \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \cdot \ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \ln|1+e^{4x}| + C \overset{1+e^{4x}>0}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{4} \cdot \ln(1+e^{4x}) + C.$$

(f) Neste caso, fazemos $u(x) = 5 + x^3$, de modo que $du = 3 \cdot x^2 dx$, ou seja, $x^2 \cdot dx = \frac{du}{3}$. Tem-se:

$$\int x^2 \cdot \sqrt{5+x^3} dx \overset{u=5+x^3}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{\sqrt{u}}{3} du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{3} \int \sqrt{u} du = \frac{1}{3} \cdot \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \frac{(5+x^3)^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} + C = \frac{2}{9}\left(5+x^3\right)^{\frac{3}{2}} + C.$$

(g) Neste caso, fazemos $u(x) = 7x - 2$, de modo que $du = 7 \cdot dx$, ou seja, $dx = \frac{du}{7}$. Tem-se:

$$\int \frac{1}{7x-2} dx \overset{u=7x-2}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{7 \cdot u} du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{7} \cdot \int \frac{1}{u} du = \frac{1}{7} \cdot \ln|u| + C =$$

$$= \frac{1}{7} \cdot \ln|7x-2| + C.$$

(h) Neste caso, fazemos $u(x) = \sqrt{x}$, de modo que $du = \dfrac{dx}{2\sqrt{x}}$, ou seja, $\frac{dx}{\sqrt{x}} = 2 \cdot du$. Tem-se:

$$\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx \overset{u=\sqrt{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \int \sin(u) \cdot 2du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} 2 \cdot \int \sin(u) du = -2 \cdot \cos(u) + C =$$

$$= -2 \cdot \cos(\sqrt{x}) + C.$$

(i) Neste caso, fazemos $u(x) = \ln(x)$, de modo que $du = \dfrac{dx}{x}$. Tem-se:

$$\int \frac{1}{x \cdot \ln(x)} dx \overset{u=\ln(x)}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{u} du = \ln|u| + C =$$

$$= \ln|\ln|x|| + C$$

(j) Neste caso, fazemos $u(x) = \frac{1}{x}$, de modo que $du = -\frac{1}{x^2}dx$, ou seja, $\frac{1}{x^2}dx = -du$. Tem-se:

$$\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx \overset{u=\frac{1}{x}}{\overset{\uparrow}{=}} \int -e^u du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int e^u du = -e^{-u} + C =$$

$$= -e^{\frac{1}{x}} + C.$$

(k) Neste caso, fazemos $u(x) = \sin(x)$, de modo que $du = \cos(x)dx$. Tem-se:

$$\int \cos(x) \cdot \sin(\sin(x))dx \overset{u=\sin(x)}{\overset{\uparrow}{=}} \int \sin(u)du = -\cos(u) + C =$$

$$= -\cos(\sin(x)) + C.$$

(ℓ) Neste caso, fazemos $u(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, de modo que $du = (3x^2 + 4x)dx = 3 \cdot \left(x^2 + \frac{4}{3} \cdot x\right) dx$, ou seja, $\frac{du}{3} = \left(x^2 + \frac{4}{3} \cdot x\right) dx$. Tem-se:

$$\int \frac{du}{x^3 + 2x^2 - 1}dx \overset{u=x^3+2x^2-1}{\overset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{3 \cdot u}du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} \frac{1}{3}\int \frac{1}{u}du =$$

$$= \frac{1}{3} \cdot \ln|u| + C = \frac{1}{3} \cdot \ln|x^3 + 2x^2 - 1| + C.$$

(m) Neste caso, fazemos $u(x) = \cos(x)$, de modo que $du = -\sin(x)dx$, ou seja, $\sin(x)dx = -du$. Tem-se:

$$\int e^{\cos(x)} \cdot \sin(x)dx \overset{u=\cos(x)}{\overset{\uparrow}{=}} \int -e^u \cdot du \overset{\text{linearidade}}{\overset{\uparrow}{=}} -\int e^u du =$$

$$= -e^u + C = -e^{\cos(x)} + C.$$

(n) Neste caso, fazemos $u(x) = 5 + \sin(x)$, de modo que $du = \cos(x)dx$. Tem-se:

$$\int \frac{\cos(x)}{(5+\sin(x))^2}dx \overset{u=\sin(x)}{\underset{\uparrow}{=}} \int \frac{1}{u^2}du = -\frac{1}{u} + C = -\frac{1}{5+\sin(x)} + C$$

(2) Resolver as seguintes integrais por partes (não esqueça a constante de integração no final):

(a) $\int x \cdot e^x dx$

(b) $\int \ln(x)dx$

(c) $\int x \cdot \cos(x)dx$

(d) $\int \arcsin(x)dx$

(e) $\int x^2 \cdot e^{-5x}dx$

(f) $\int \ln^2(x)dx$

(g) $\int e^\theta \cdot \cos(\theta)d\theta$

(h) $\int x \cdot \arctan(x)dx$

Solução:

(a) Fazemos $u(x) = x$ e $dv = e^x dx$, de modo que $u'(x) = 1, du = u'(x)dx = dx$ e $v = e^x$. Temos:

$$\int x \cdot e^x dx = x \cdot e^x - \int e^x dx = x \cdot e^x - e^x + C$$

(b) Fazemos $u(x) = \ln(x)$ e $dv = 1 \cdot dx$, de modo que $u'(x) = \frac{1}{x}, du = \frac{dx}{x}$ e $v = x$. Temos:

$$\int \ln(x)dx = x \cdot \ln(x) - \int \cancel{x} \cdot \frac{dx}{\cancel{x}} = x \cdot \ln(x) - x + C$$

(c) Fazemos $u(x) = x$ e $dv = \cos(x)dx$, de modo que $u'(x) = 1, du = dx$ e $v = \sin(x)$. Temos:

$$\int x \cdot \cos(x)dx = x \cdot \sin(x) - \int \sin(x)dx = x \cdot \sin(x) + \cos(x) + C.$$

(d) Fazemos $u(x) = \arcsin(x)$ e $dv = 1 \cdot dx$, de modo que $u'(x) = 1, du = dx$ e $v = \sin(x)$. Temos:

$$\int \arcsin(x)dx = x \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx =$$

Devemos resolver, agora, a integral:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

Fazemos isto mediante o método da substituição, fazendo $u(x) = 1 - x^2$, temos $u'(x) = -2x$, e portanto $du = u'(x)dx = -2xdx$, donde $xdx = -\frac{du}{2}$

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\int \frac{du}{2\sqrt{u}} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{u^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C =$$

$$= -\sqrt{1-x^2} + C$$

Assim,

$$\int \arcsin(x)dx = x \cdot \arcsin(x) - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = x \cdot \arcsin(x) + \sqrt{1-x^2} + C.$$

(e) Fazemos $u(x) = x^2$, de modo que $u'(x) = 2 \cdot x$, e portanto, $du = 2xdx$, e $dv = e^{-5x}dx$, de modo que $v = -\dfrac{e^{-5x}}{5}$. Assim,

$$\int x^2 \cdot e^{-5x}dx = -\frac{x^2 \cdot e^{-5x}}{5} - \int \left(-\frac{e^{-5x}}{5}\right) \cdot 2xdx =$$

$$= -\frac{x^2 \cdot e^{-5x}}{5} + \frac{2}{5} \cdot \int e^{-5x} \cdot xdx$$

Resta resolver a integral:

$$\int e^{-5x} \cdot xdx$$

Resolvemos esta integral, novamente, por partes, fazendo $u = x$, de modo que $du = dx$, e $dv = e^{-5x}dx$, de modo que $v = -\frac{e^{-5x}}{5}$. Assim,

$$\int e^{-5x} \cdot xdx = -\frac{x \cdot e^{-5x}}{5} - \int \left(-\frac{e^{-5x}}{5}\right) dx =$$

$$= -\frac{x \cdot e^{-5x}}{5} + \frac{1}{5} \cdot \int e^{-5x}dx = -\frac{x \cdot e^{-5x}}{5} - \frac{1}{25} \cdot e^{-5x} + C$$

Desta forma,

$$\int x^2 \cdot e^{-5x}dx = -\frac{x^2 \cdot e^{-5x}}{5} + \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{x \cdot e^{-5x}}{5} - \frac{1}{25} \cdot e^{-5x}\right) + C =$$
$$= -\frac{x^2 \cdot e^{-5x}}{5} - \frac{2}{25} \cdot x \cdot e^{-5x} - \frac{2}{125} \cdot e^{-5x} + C =$$

(f) Neste caso, fazemos $u(x) = \ln^2(x)$, de modo que $u'(x) = 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$ e $du = 2\frac{\ln(x)}{x}dx$ e $dv = dx$, e portanto $v = x$. Assim,

$$\int \ln^2(x)dx = x \cdot \ln^2(x) - \int \cancel{x} \cdot \frac{2 \cdot \ln(x)}{\cancel{x}}dx = x \cdot \ln^2(x) - 2 \cdot \int \ln(x)dx =$$

$$\overset{\text{(b)}}{\overset{\uparrow}{=}} x \cdot \ln^2(x) - 2 \cdot (x \cdot \ln(x) - x) + C = x \cdot \ln^2(x) - 2 \cdot x \cdot \ln(x) + 2 \cdot x + C.$$

(g) Neste caso, fazemos $u(\theta) = \cos(\theta)$, de modo que $u'(\theta) = -\sin(\theta)$, $du = -\sin(\theta)d\theta$ e $dv = e^\theta d\theta$, de modo que $v(\theta) = e^\theta$, de modo que:

$$\int e^\theta \cdot \cos(\theta)d\theta = e^\theta \cdot \cos(\theta) - \int e^\theta \cdot (-\sin(\theta))d\theta = e^\theta \cdot \cos(\theta) + \int e^\theta \cdot \sin(\theta)d\theta$$

Resolvemos a integral:

$$\int e^\theta \cdot \sin(\theta)d\theta$$

também por partes, fazendo $u(\theta) = \sin(\theta)$ – de modo que $u'(\theta) = \cos(\theta) \cdot d\theta$ – e $dv = e^{\theta} \cdot d\theta$ – de modo que $v(\theta) = e^{\theta}$. Assim, temos:

$$\int e^{\theta} \cdot \sin(\theta) d\theta = e^{\theta} \cdot \sin(\theta) - \int e^{\theta} \cdot \cos(\theta) d\theta$$

Assim,

$$\int e^{\theta} \cdot \cos(\theta) d\theta = e^{\theta} \cdot \cos(\theta) + e^{\theta} \cdot \sin(\theta) - \int e^{\theta} \cdot \cos(\theta) d\theta$$

$$2 \cdot \int e^{\theta} \cdot \cos(\theta) d\theta = e^{\theta} \cdot \cos(\theta) + e^{\theta} \cdot \sin(\theta)$$

$$\int e^{\theta} \cdot \cos(\theta) d\theta = \frac{e^{\theta} \cdot \cos(\theta) + e^{\theta} \cdot \sin(\theta)}{2} + C$$

(h) Fazemos $u(x) = \arctan(x)$, de modo que $u'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ e $du = \frac{1}{1+x^2}dx$, e tomamos $dv = x \cdot dx$, donde segue que $v = \frac{x^2}{2}$. Assim,

$$\int x \cdot \arctan(x) dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

Resta-nos calcular:

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx$$

Podemos escrever:

$$\frac{x^2}{x^2+1} = \frac{x^2-1+1}{x^2+1} = \frac{x^2+1}{x^2+1} + \frac{-1}{x^2+1} = 1 - \frac{1}{x^2+1}$$

Assim,

$$\int \frac{x^2}{x^2+1} dx = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan(x) + C$$

Assim,

$$\int x \cdot \arctan(x)dx = \frac{x^2}{2} \cdot \arctan(x) - \frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{2} \cdot \arctan(x) + C.$$

(3) Usar o método da integração por partes para demonstrar que vale a fórmula:

$$\int x^n \cdot e^x dx = x^n \cdot e^x - n \cdot \int x^{n-1} \cdot e^x dx$$

Solução: Fazemos $u(x) = x^n$, de modo que $u'(x) = n \cdot x^{n-1}$ e $du = n \cdot x^{n-1} dx$, e fazemos $dv = e^x dx$, de modo que $v(x) = e^x$. Integrando por partes, tem-se:

$$\int x^n \cdot e^x dx = x^n \cdot e^x - \int e^x \cdot (n \cdot x^{n-1}) dx =$$

$$= x^n \cdot e^x - n \cdot \int x^{n-1} \cdot e^x dx$$