Lista 17 de MAT 0111

Prof. Jean Cerqueira Berni*

"Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo."

(1) Completar quadrados nas seguintes expressões:

(a) $x^2 - 8x + 5$
(b) $x^2 + 12x + 4$
(c) $3x^2 - 12x - 7$
(d) $-2x^2 - 12x - 9$
(e) $4x^2 + 8x - 9$
(f) $-3x^2 - 18x - 35$
(g) $5x^2 + 20x + 32$
(h) $x^2 + 4x + 5$
(i) $x^2 - 6x + 11$
(j) $3x^2 - 30x + 82$

Solução:

(a) Temos:

$$x^2 - 8x + 5 = x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 5 = \overbrace{x^2 - 2 \cdot 4 \cdot x + 16}^{=(x-4)^2} - 11 =$$

$$= (x-4)^2 - 11$$

(b) Temos:

$$x^2 + 12x + 4 = x^2 + 2 \cdot 6 \cdot x + 4 = \overbrace{x^2 + 2 \cdot 6 \cdot x + 36}^{=(x+6)^2} - 32 =$$

$$= (x+6)^2 - 32$$

*jeancb@ime.usp.br

(c) Temos:

$$3x^2 - 12x - 7 = 3 \cdot \left(x^2 - 4x - \frac{7}{3}\right) = 3 \cdot \left(\overbrace{x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 4}^{=(x+2)^2} - \frac{19}{3}\right) =$$

$$= 3 \cdot [(x+2)^2 - \frac{19}{3}] = 3 \cdot (x+2)^2 - 19.$$

(d) Temos:

$$-2x^2 - 12x - 9 = -2 \cdot \left(x^2 + 6x + \frac{7}{2}\right) = -2 \cdot \left(\overbrace{x^2 + 6x + 36}^{(x+6)^2} - \frac{65}{2}\right)$$

$$= -2 \cdot [(x+6)^2 - \frac{65}{2}] = 2 \cdot (x+6)^2 - 65.$$

(e) Temos:

$$4x^2 + 8x - 9 = 4 \cdot \left(x^2 + 2x - \frac{9}{4}\right) = 4 \cdot \left(\overbrace{x^2 + 2x + 4}^{(x+2)^2} - \frac{25}{4}\right)$$

$$= 4 \cdot [(x+2)^2 - \frac{25}{4}] = 4 \cdot (x+2)^2 - 25.$$

(f) Temos:

$$-3x^2 - 18x - 35 = -3 \cdot \left(x^2 + 6x - \frac{35}{3}\right) = -3 \cdot \left(\overbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9}^{(x+3)^2} - \frac{62}{3}\right)$$

$$= -3 \cdot [(x+3)^2 - \frac{62}{3}] = -3 \cdot (x+3)^2 + 62.$$

(g) Temos:

$$5x^2+20x+32 = 5\cdot\left(x^2+4x+\frac{32}{5}\right) = 5\cdot\left(\overbrace{x^2+2\cdot2\cdot x+4}^{(x+2)^2}+\frac{12}{5}\right)$$

$$= 5\cdot[(x+2)^2+\frac{12}{5}] = 5\cdot(x+2)^2+12.$$

(h) Temos:

$$x^2+4x+5 = \overbrace{x^2+2\cdot2\cdot x+4}^{(x+2)^2}+1 = (x+2)^2+1$$

(i) Temos:

$$x^2-6x+11 = \overbrace{x^2-2\cdot3\cdot x+9}^{(x-3)^2}+2 = (x-3)^2+2$$

(j) Temos:

$$3x^2-30x+82 = 3\cdot\left(x^2-10x+\frac{82}{3}\right) = 3\cdot\left(\overbrace{x^2-2\cdot5\cdot x+25}^{(x-5)^2}+\frac{7}{3}\right) =$$

$$3\cdot\left[(x-5)^2+\frac{7}{3}\right] = 3\cdot(x-5)^2+7$$

(2) Resolver as seguintes integrais em que o denominador é da forma ax^2+bx+c com $\Delta = b^2-4ac < 0$:

(a) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-2x+8}dx$

(b) $\displaystyle\int \frac{1}{2x^2+12x+23}dx$

(c) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$

(d) $\displaystyle\int \frac{dx}{5x^2-10x+9}$

Solução:

(a) Primeiramente, completamos quadrados na expressão que consta no denominador:

$$x^2 - 2x + 8 = \overbrace{x^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + 1}^{(x-1)^2} + 7 = (x-1)^2 + 7$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 8} = \frac{1}{(x-1)^2 + 7}$$

Fatoramos, em seguida, a expressão do denominador por 7, escrevendo:

$$\frac{1}{x^2 - 2x + 8} = \frac{1}{7 \cdot \left[\frac{1}{7} \cdot (x-1)^2 + 1\right]}$$

A integral fica, portanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1)\right)^2 + 1}$$

Efetuamos a mudança de variável:

$$y(x) = \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1)$$

de modo que:

$$y'(x) = \frac{\sqrt{7}}{7}$$

e portanto $dy = y'(x)dx = \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot dx$, de modo que $dx = \sqrt{7}dy$
Assim,

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1)\right)^2 + 1} = \int \frac{\sqrt{7}}{y^2 + 1} dy = \sqrt{7} \cdot \int \frac{dy}{y^2 + 1} =$$

$$= \sqrt{7} \cdot \left(\arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1) \right) + C' \right) = \sqrt{7} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1) \right) + C$$

Portanto:

$$\int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8} = \frac{1}{7} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1) \right)^2 + 1} = \frac{1}{7} \cdot \left[\sqrt{7} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1) \right) \right] + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{x^2 - 2x + 8} = \frac{\sqrt{7}}{7} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{7}}{7} \cdot (x-1) \right) + C$$

(b) Primeiramente, completamos quadrados na expressão que consta no denominador:

$$2x^2 + 12x + 23 = 2 \cdot \left(x^2 + 6x + \frac{23}{2} \right) = 2 \cdot \left(\overbrace{x^2 + 2 \cdot 3 \cdot x + 9}^{(x+3)^2} + \frac{5}{2} \right) = 2 \cdot \left((x+3)^2 + \frac{5}{2} \right) =$$

$$= 2 \cdot (x+3)^2 + 5$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{2x^2 + 12x + 23} = \frac{1}{2 \cdot (x+3)^2 + 5}$$

Fatoramos, em seguida, a expressão do denominador por 5, escrevendo:

$$\frac{1}{2x^2 + 12x + 23} = \frac{1}{5 \cdot \left[\frac{2}{5} \cdot (x+3)^2 + 1 \right]} = \frac{1}{5 \cdot \left[\left(\frac{\sqrt{10}}{5} \cdot (x+3) \right)^2 + 1 \right]}$$

A integral fica, portanto:

$$\int \frac{dx}{2x^2+12x+23} = \frac{1}{5}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)\right)^2+1}$$

Efetuamos a mudança de variável:

$$y(x) = \frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)$$

de modo que:

$$y'(x) = \frac{\sqrt{10}}{5}$$

e portanto $dy = y'(x)dx = \frac{\sqrt{10}}{5}\cdot dx$, de modo que $dx = \frac{\sqrt{10}}{2}dy$
Assim,

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)\right)^2+1} = \frac{\sqrt{10}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}dy =$$

$$= \frac{\sqrt{10}}{2}\cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)\right)+C$$

Portanto:

$$\int \frac{dx}{2x^2+12x+23} = \frac{1}{5}\cdot\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)\right)^2+1}$$

$$\therefore \int \frac{dx}{2x^2+12x+23} = \frac{\sqrt{10}}{10}\cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{10}}{5}\cdot(x+3)\right)+C$$

(c) Primeiramente, completamos quadrados na expressão que consta no denominador:

$$x^2+2x+2 = \overbrace{x^2+2x+1}^{=(x+1)^2}+1 = (x+1)^2+1$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{x^2+2x+1} = \frac{1}{(x+1)^2+1}$$

A integral fica, portanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+1}$$

Efetuamos a mudança de variável:

$$y(x) = x+1$$

de modo que:

$$y'(x) = 1$$

e portanto $dy = y'(x)dx = 1 \cdot dx$, de modo que $dx = dy$
Assim,

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \int \frac{1}{(x+1)^2+1}dx = \int \frac{dy}{y^2+1} = \arctan(y) + C =$$

$$= \arctan(x+1) + C.$$

Portanto:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+2} = \arctan(x+1) + C.$$

(d) Primeiramente, completamos quadrados na expressão que consta no denominador:

$$5x^2 - 10x + 9 = 5 \cdot \left(x^2 - 2x + \frac{9}{2}\right) = 5 \cdot \left(\overbrace{x^2 - 2x + 1}^{=(x-1)^2} + 4\right) =$$

$$5 \cdot (x-1)^2 + 4$$

Assim, temos:

$$\frac{1}{5x^2 - 10x + 9} = \frac{1}{5 \cdot (x-1)^2 + 4}$$

Fatoramos, em seguida, a expressão do denominador por 4, escrevendo:

$$\frac{1}{5x^2 - 10x + 9} = \frac{1}{5 \cdot (x-1)^2 + 4} = \frac{1}{4 \cdot \left(\frac{5}{4} \cdot (x-1)^2 + 1\right)}$$

A integral fica, portanto:

$$\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 9} = \frac{1}{4} \cdot \int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)\right)^2 + 1}$$

Efetuamos a mudança de variável:

$$y(x) = \frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)$$

de modo que:

$$y'(x) = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

e portanto $dy = y'(x)dx = \dfrac{\sqrt{5}}{2}dx$, de modo que $dx = \dfrac{2\sqrt{5}}{5}dy$
Assim,

$$\int \frac{dx}{\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)\right)^2 + 1} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \int \frac{1}{y^2+1} dy = \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \arctan(y) + C$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)\right) + C$$

Portanto:

$$\int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 9} = \frac{1}{4} \cdot \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)\right) + C$$

$$\therefore \int \frac{dx}{5x^2 - 10x + 9} = \frac{\sqrt{5}}{10} \cdot \arctan\left(\frac{\sqrt{5}}{2} \cdot (x-1)\right) + C$$