Gabarito Lista 2

Higor Mendes Garcia

07/09/2021

Exercício 1

a)

Observe que:

$$f(x) = \frac{1}{x^{2/3}} = \frac{1}{x^{\alpha}}, \alpha = \frac{2}{3} < 1.$$

Sabemos que $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ é convergente no intervalo $[0,1]$ se $\alpha < 1$ ou seja, a integral imprópria é convergente, e podemos então tentar calculá-la:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx &= \lim_{a\to 0}\int_a^1 \frac{1}{x^{2/3}}\,dx \\
&= \lim_{a\to 0}\left[3\sqrt[3]{x}\right]_a^1 \\
&= \lim_{a\to 0} 3\sqrt[3]{1} - 3\sqrt[3]{a} \\
&= 3
\end{aligned}$$

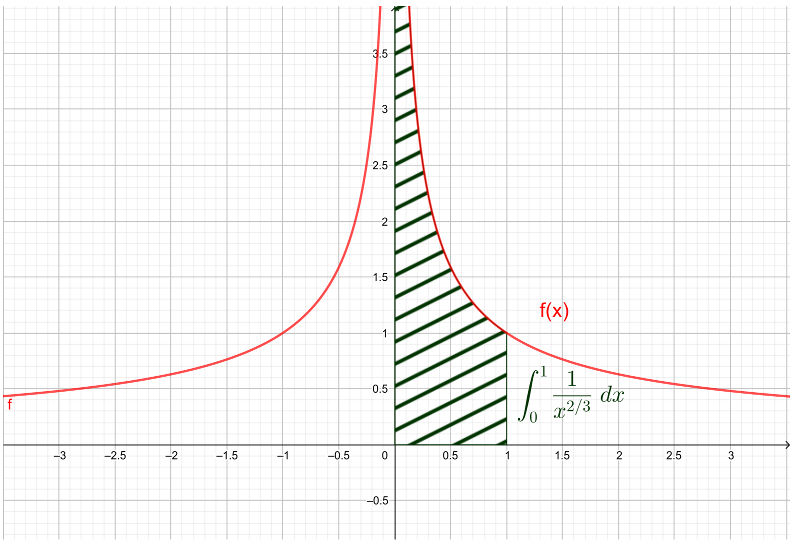

Figure 1: Representação geométrica da integral imprópria.

b)

Observe que:

$$x \in]-1,\, 0[\;\Rightarrow\; \frac{1}{x+1} > \frac{1}{x}$$

Sabemos que $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx$ diverge em $[-1,\, 0[$ logo, como a integral dominada diverge segue que a integral dominante também é divergente.

c)

Observe que:

$$x \in]1,\, +\infty[\Rightarrow \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{x^{\alpha}}, \alpha = \frac{3}{2} > 1.$$

Sabemos também que $\displaystyle\int \frac{1}{x^{\alpha}}\,dx$ converge em $[1,\, +\infty[$ se $\alpha > 1$, então a integral imprópria converge e podemos tentar calculá-la:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx &= \lim_{a\to+\infty} \int_1^{a} \frac{1}{x\sqrt{x}}\,dx \\
&= \lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{2}{\sqrt{x}}\right]_1^a \\
&= \lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{2}{\sqrt{a}}\right) - \left(-\frac{2}{1}\right) = 2
\end{aligned}$$

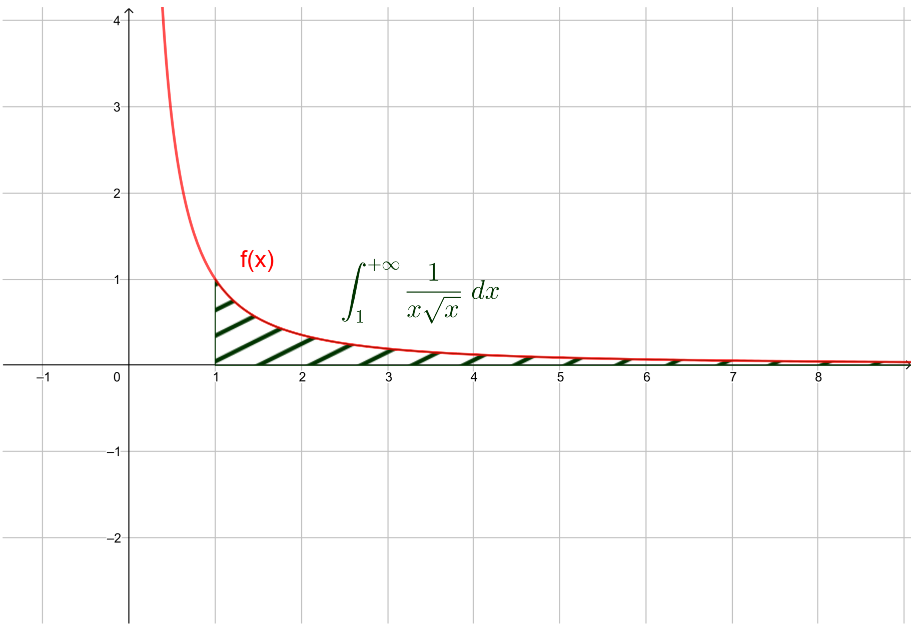

Figure 2: Representação geométrica da integral imprópria.

d)

Observe que:

$$f(x) = \sqrt{|x|} = \sqrt{|-x|} = f(-x) \ \ (i)$$

$$x \in]0,1] \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{|x|}} = \frac{1}{x^{1/2}} = \frac{1}{x^{\alpha}}, \ \ \alpha < 1 \ \ (ii)$$

De (ii) sabemos que a integral imprópria é convergente no intervalo $[0, 1]$ e de (i) temos que:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{\sqrt{|x|}}\, dx &= 2 \times \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \\
&= 2 \times \left(\lim_{a \to 0} \int_{a}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx \right) \\
&= 2 \times \left(\lim_{a \to 0} \left[2\sqrt{x} \right]_{a}^{1} \right) \\
&= 2 \times \left(\lim_{a \to 0} 2\sqrt{1} - 2\sqrt{a} \right) \\
&= 2 \times \left(2\sqrt{1} - 2\sqrt{0} \right) \\
&= 4
\end{aligned}$$

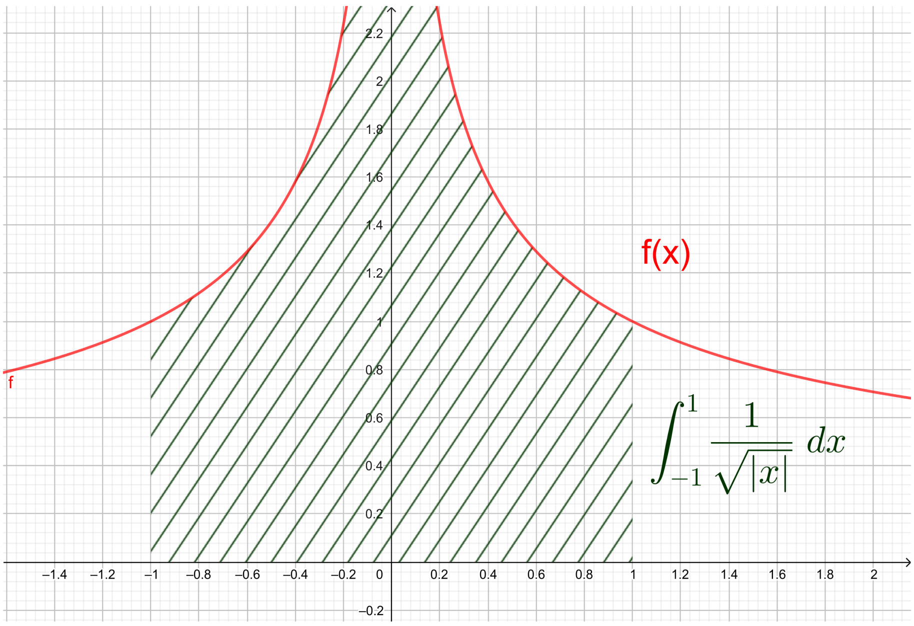

Figure 3: Representação geométrica da integral imprópria.

e)

Veja que:

$$x \in]-\infty,\, -1] \;\; \Rightarrow e^x < \frac{1}{x^2}$$

Como a integral dominante é convergente em $]-\infty,\, -1[$ então a integral dominada também converge no intervalo $]-\infty,\, -1[$ logo, convém tentar calcular a integral imprópria:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx &= \lim_{a \to -\infty} \int_{a}^{0} e^x \, dx \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left[e^x\right]_a^0 \\
&= \lim_{a \to -\infty} \left[e^x\right]_a^0 \\
&= \lim_{a \to -\infty} e^0 - e^a \\
&= 1
\end{aligned}$$

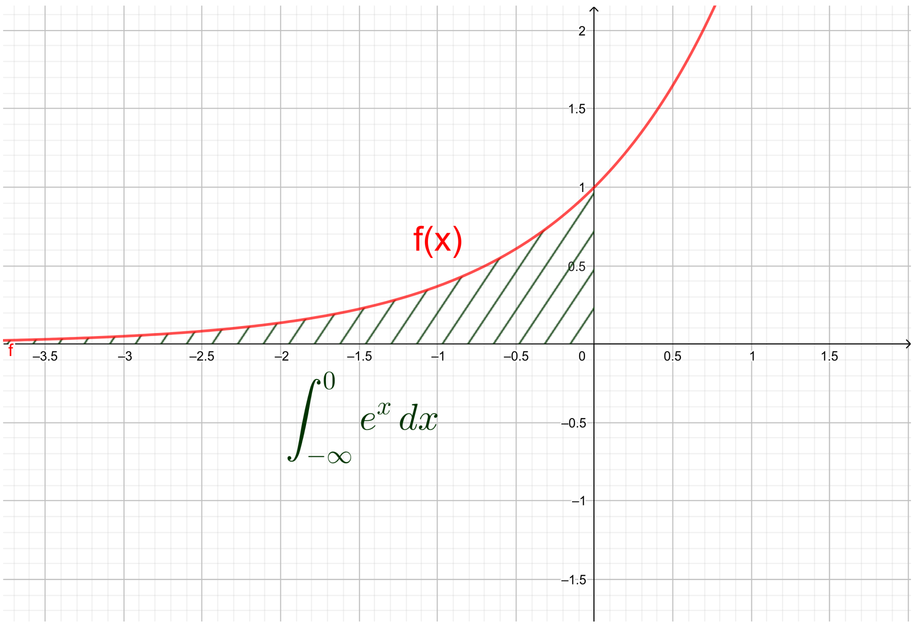

Figure 4: Representação geométrica da integral imprópria

f)

Observe que:

$$x \in]0, 1[\Rightarrow \sqrt[3]{x} > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{x}} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Assim, como a integral dominante converge em $]0, 1]$ sabemos que a integral imprópria dominada converge no mesmo intervalo e podemos tentar calculá-la:

$$\begin{aligned}
\int_0^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx &= lim_{a\to 0} \int_a^5 \frac{1}{\sqrt[3]{x}}\, dx \\
&= lim_{a\to 0} \int_a^5 x^{-\frac{1}{3}}\, dx \\
&= lim_{a\to 0} \left[\frac{3x^{2/3}}{2}\right]_a^5 \\
&= lim_{a\to 0} \frac{3\sqrt[3]{5^2}}{2} - \frac{3a^{2/3}}{2} \\
&= \frac{3\sqrt[3]{25}}{2}
\end{aligned}$$

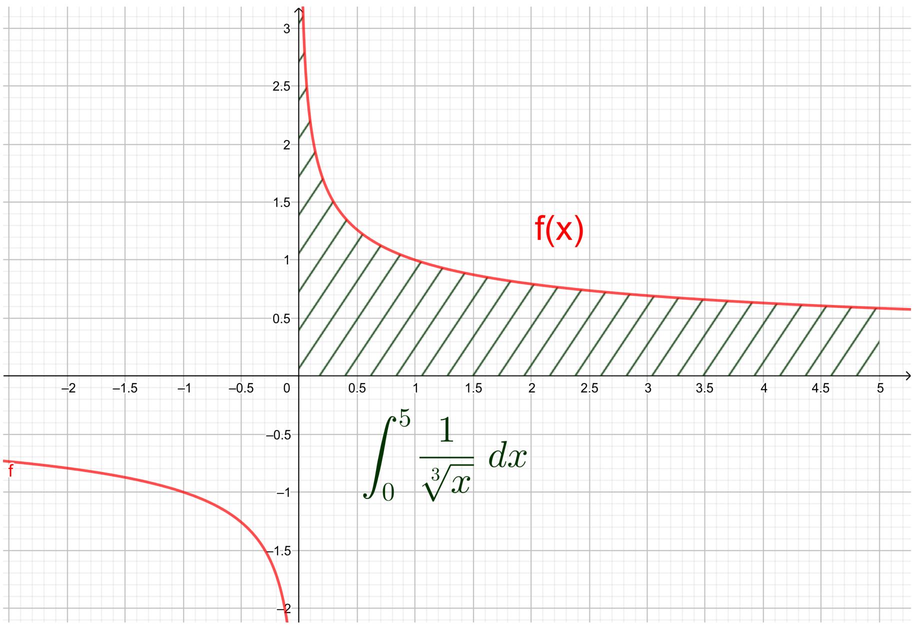

Figure 5: Representação geométrica da integral imprópria.

g)

Observe que:

$$f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{x^3}} = \frac{1}{x^{3/2}} = \frac{1}{x^\alpha},\ \alpha > 1$$

Logo, a integral imprópria diverge em $]0, 1]$ e não faz sentido tentarmos calculá-la.

h)

Veja que:

$$x \in \mathbb{R}_+^* \quad \Rightarrow e^{x^2} > x^3 \quad \Rightarrow e^{-(x^2)} < x^{-3} \quad \Rightarrow \frac{1}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^3} \quad \Rightarrow \frac{x}{e^{x^2}} < \frac{1}{x^2}$$

Assim, como a integral dominante converge em $[1, +\infty[$ teremos que a integral dominada também converge nesse intervalo e então podemos tentar calcular a integral imprópria:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,dx &= lim_{a\to+\infty} \int_0^a xe^{-x^2}\,dx \\
&= |_{u=e^{(-x^2)}} \quad lim_{a\to+\infty} \int_0^a -\frac{1}{2}\,du \\
&= lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{u}{2}\right]_0^a \\
&= lim_{a\to+\infty} \left[-\frac{1}{2e^{(x^2)}}\right]_0^a \\
&= lim_{a\to+\infty} \left(-\frac{1}{2e^{(a^2)}}\right) - \left(-\frac{1}{2e^{(0^2)}}\right) \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

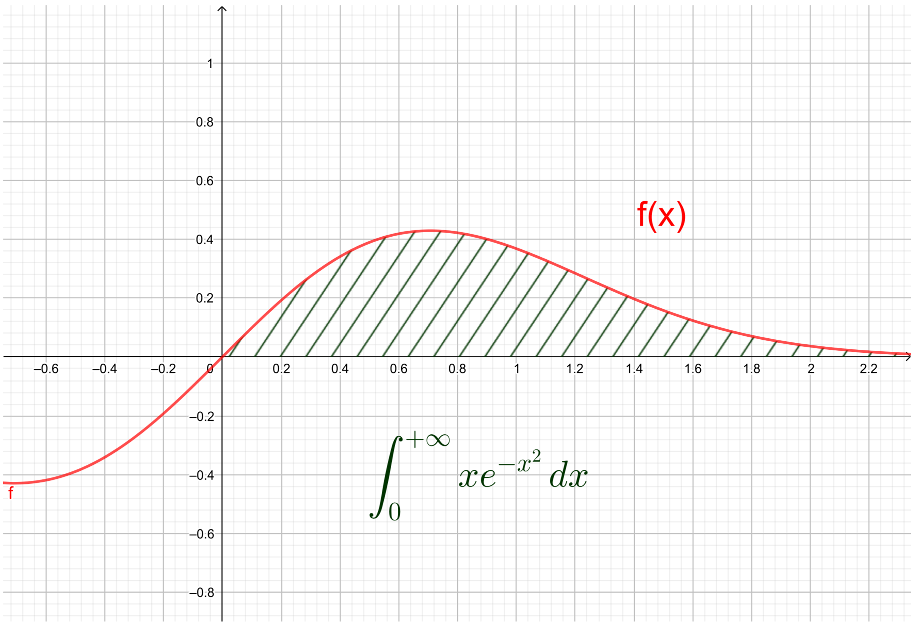

Figure 6: Representação geométrica da integral imprópria.

Exercício 2

Observe que:

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \sqrt{x} + 4x^2 > \sqrt{x} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{x} + 4x^2} < \frac{1}{\sqrt{x}}$$

Como a integral dominante corverge em $]0, 1]$, segue-se imediatamente que a integral dominada converge nesse mesmo intervalo.

Exercício 3

Dada uma função com essas condições, e considerando $F(x)$ a primitiva de $f(x)$ então:

$$\int_c^b f(x)\,dx = \lim_{a \to c} \int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a \to c} F(b) - F(a)$$

Exercício 4

Observe que a função não está definida para $x = 0$ logo, devemos calcular a integral como uma integral imprópria:

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx &= \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx \quad + \quad \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{a \to 0_-} \int_{-1}^{a} \frac{1}{x^2}\,dx \quad + \quad \lim_{a \to 0^+} \int_{a}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx \\
&= \lim_{a \to 0_-} \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{a} \quad + \quad \lim_{a \to 0^+} \left[-\frac{1}{x}\right]_{a}^{1} \\
&= \left(\lim_{a \to 0_-} \left(-\frac{1}{a}\right) - (1)\right) \quad + \quad \left(\lim_{a \to 0^+} (-1) - \left(-\frac{1}{a}\right)\right) \\
&= (+\infty) \quad + \quad (+\infty)
\end{aligned}$$

Logo, a integral diverge, o que indica que ignorar singularidades de uma função qualquer induz a erro.