

LISTA 05 DE MAT 0121

Prof. Jean Cerqueira Berni*

“Eu ouço, eu esqueço. Eu vejo, eu lembro. Eu faço, eu aprendo.”

(1) Determinar e esboçar os domínios das seguintes funções:

(a) $f(x, y) = xy + x^3 + y^3$;

Solução: Identificamos a função acima como uma função polinomial, cujo domínio é o plano inteiro;

(b) $g(x, y) = \ln(x^3 - y^3)$;

Solução: Sabemos que o logaritmo de um número só está definido para valores positivos. Desta forma, o domínio de g deve consistir dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x^3 - y^3 > 0$, ou seja,

$$\text{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^3 - y^3 > 0\}$$

Tem-se $x^3 - y^3 = (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2)$, de modo que:

$$x^3 - y^3 > 0 \iff (x - y) \cdot (x^2 + xy + y^2) > 0,$$

o que ocorre se, e somente se, os dois fatores forem simultaneamente positivos ou simultaneamente negativos. Assim, um par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ estará no domínio de g se, e somente se:

$$x - y > 0 \text{ e } x^2 + xy + y^2 > 0 \tag{1}$$

ou

*jeancb@ime.usp.br

$$x - y < 0 \text{ e } x^2 + xy + y^2 < 0 \quad (2)$$

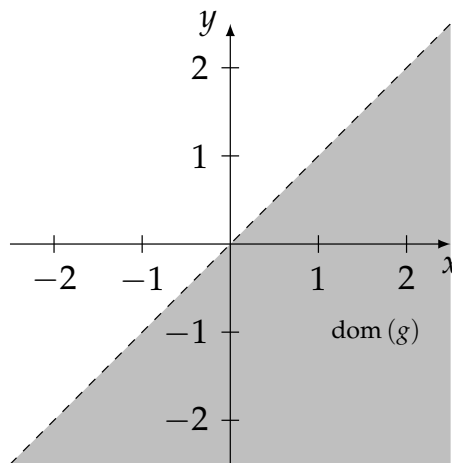
Observamos que $x^2 + xy + y^2 = x^2 + 2xy + y^2 - xy = (x + y)^2 - xy$, de modo que:

$$x^2 + xy + y^2 > 0 \iff \sqrt{xy} < x + y \text{ (sempre ocorre)}$$

$$x^2 + xy + y^2 < 0 \iff \sqrt{xy} > x + y \text{ (nunca ocorre)}$$

Desta forma, o domínio de g consistirá dos pontos que satisfazem (1), isto é:

$$\text{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > y\}$$



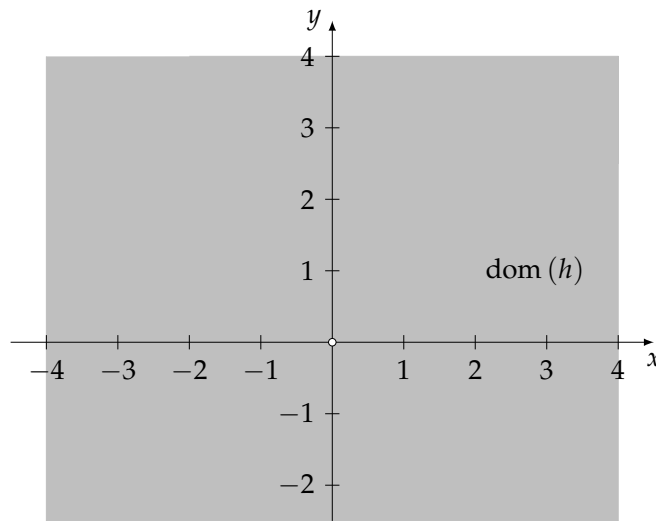
(c) $h(x, y) = \frac{xy}{x^4 + y^6};$

Solução: Sabemos que o quociente está definido se, e somente se, seu denominador for diferente de zero. Desta forma,

$$\text{dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^4 + y^6 \neq 0\}$$

Mas $x^4 + y^6 = 0$ se, e somente se, $x = y = 0$. Logo,

$$\text{dom}(h) = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

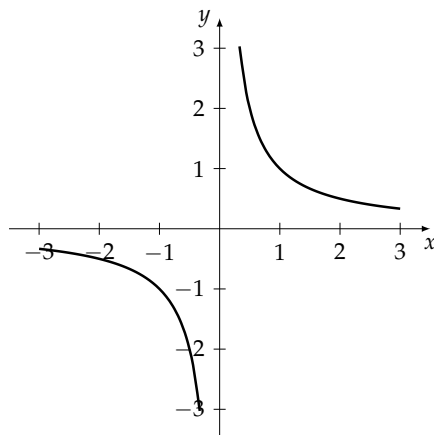


(d) $f(x, y) = \frac{1}{\ln(x \cdot y)}$;

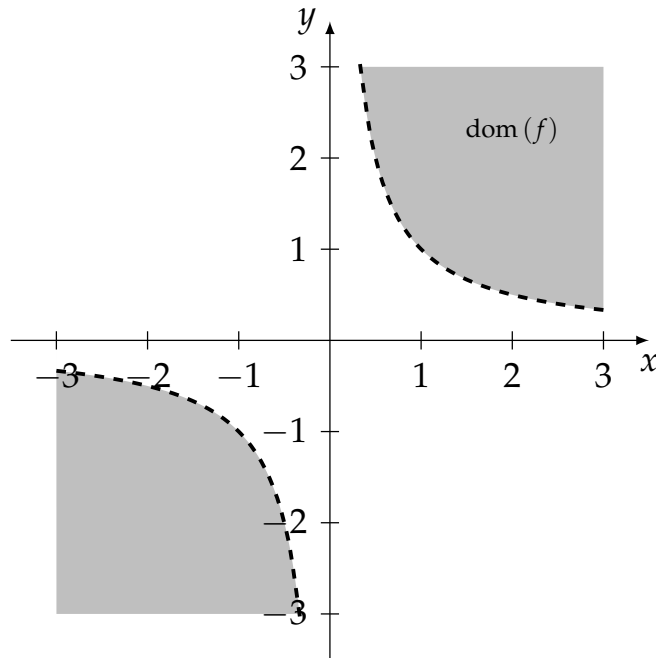
Solução: Neste caso há duas restrições: uma delas é que o denominador não se anule, ou seja, que $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ seja tal que $\ln(x \cdot y) \neq 0$, e a outra é que $x \cdot y > 0$, para que possamos calcular $\ln(xy)$. Logo, tem-se:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x \cdot y \neq 1) \& (x \cdot y > 0)\}$$

Os pontos (x, y) tais que $x \cdot y = 1$ são exatamente os pontos sobre a hipérbole dada por $y = \frac{1}{x}$:



Os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $x \cdot y > 0$ são exatamente os pontos (x, y) para os quais temos x e y de mesmo sinal, ou seja, pontos do primeiro e do terceiro quadrantes (que não se encontrem sobre os eixos Ox ou Oy). O domínio de f é, portanto:



(e) $g(x, y) = \arctan(x + y + yx^3)$

Solução: Neste caso não há nenhum obstáculo para se calcular o arco-tangente. Desta forma, tem-se $\text{dom}(g) = \mathbb{R}^2$.

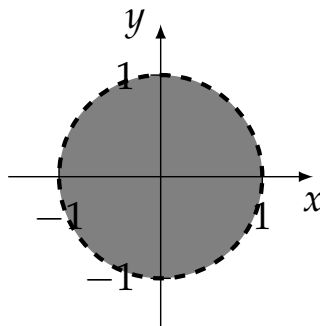
(f) $h(x, y) = \frac{\cos(x^2 + x + y)}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$

Solução: Neste caso há dois obstáculos para calcular $h(x, y)$: o primeiro é que o denominador da expressão que define h não deve se anular; o segundo é que o argumento da raiz quadrada do denominador não pode ser um número menor do que zero. Assim,

$$\text{dom}(h) = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (\sqrt{1 - x^2 - y^2} \neq 0) \& (1 - x^2 - y^2 > 0) \right\}$$

Tem-se $1 - x^2 - y^2 > 0 \iff x^2 + y^2 < 1$, ou seja, devemos ter (x, y) deve pertencer ao disco centrado em $(0, 0)$ e de raio 1 no plano Oxy . Assim,

$$\text{dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$$



(2) Verificar se a função dada em cada item é homogênea ou não. Em caso afirmativo, determinar o seu grau de homogeneidade:

(a) $f(x, y) = 3x^2 + 5xy + y^2$

Solução: Seja $t > 0$ qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= 3 \cdot (tx)^2 + 5 \cdot (tx) \cdot (ty) + (ty)^2 = \\ &= 3t^2x^2 + 5t^2xy + t^2y^2 = t^2 \cdot (3x^2 + 5xy + y^2) = t^2 \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

Assim, f é uma função homogênea de grau zero.

(b) $f(x, y) = \frac{x^3 + 2xy^2}{x^3 - y^3}$

Solução: Seja $t > 0$ qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= \frac{(tx)^3 + 2(tx)(ty)^2}{(tx)^3 - (ty)^3} = \\ &= \frac{t^3 \cdot x^3 + 2 \cdot t^3 \cdot xy^2}{t^3 \cdot x^3 - t^3 \cdot y^3} = \frac{\cancel{t^3} \cdot (x^3 + 2xy^2)}{\cancel{t^3} \cdot (x^3 - y^3)} = f(x, y) \end{aligned}$$

Assim, f é uma função homogênea de grau dois.

(c) $f(x, y) = \sqrt{x^4 + y^4}$

Solução: Seja $t > 0$ qualquer. Temos:

$$f(t \cdot x, t \cdot y) = \sqrt{(tx)^4 + (ty)^4} = \sqrt{t^4 \cdot x^4 + t^4 \cdot y^4} = \sqrt{t^4 \cdot (x^4 + y^4)} =$$

$$= t^2 \cdot \sqrt{x^4 + y^4} = t^2 \cdot f(x, y)$$

Assim, f é uma função homogênea de grau dois.

$$(d) f(x, y) = \frac{2}{x^2 + y^2}$$

Solução: Seja $t > 0$ qualquer. Temos:

$$\begin{aligned} f(t \cdot x, t \cdot y) &= \frac{2}{(tx)^2 + (ty)^2} = \frac{1}{t^2 \cdot (x^2 + y^2)} = \frac{1}{t^2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = t^{-2} \cdot \frac{1}{x^2 + y^2} = \\ &= t^{-2} \cdot f(x, y) \end{aligned}$$

Assim, f é uma função homogênea de grau menos dois.

(3) Esboçar as curvas indicadas em cada item:

(a) curvas de nível $1/4, 1/2, 1, 2$ e 4 do gráfico da função $z = f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2}$;

Solução: Temos:

$$f^{-1} \left[\left\{ \frac{1}{4} \right\} \right] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{4} \right\} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 4 \}$$

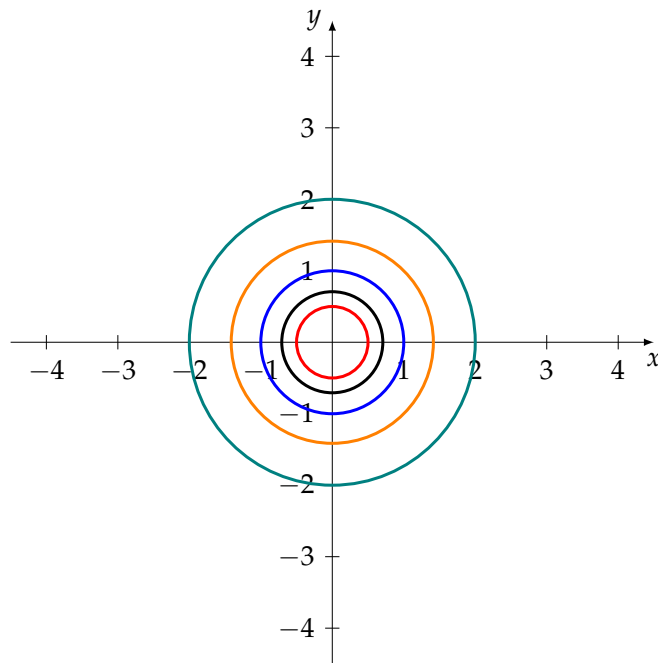
$$f^{-1} \left[\left\{ \frac{1}{2} \right\} \right] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2 + y^2} = \frac{1}{2} \right\} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 2 \}$$

$$f^{-1} [\{1\}] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2 + y^2} = 1 \right\} = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$$

$$f^{-1} [\{2\}] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2 + y^2} = 2 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{2} \right\}$$

$$f^{-1} [\{4\}] = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{1}{x^2 + y^2} = 4 \right\} = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = \frac{1}{4} \right\}$$

As curvas de nível estão representadas abaixo:



(b) curvas de nível 0, 1 e 2 e traços do gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 - y^2$;

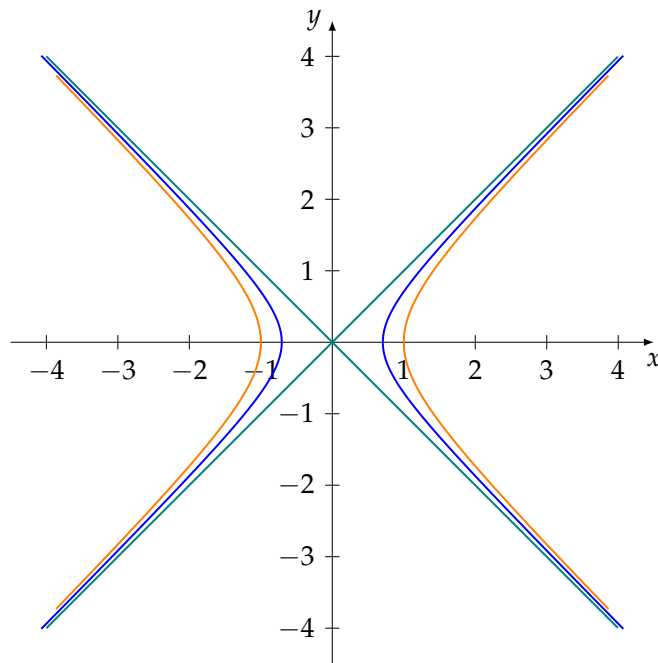
Solução: Temos:

$$\begin{aligned} f^{-1}[\{0\}] &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 0\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = y^2\} = \\ &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid |x| = |y|\} \end{aligned}$$

$$f^{-1}[\{1\}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 1\}$$

$$f^{-1}[\{2\}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 2\}$$

As curvas de nível estão representadas abaixo:



Os traços são:

$$\text{tr}_{xz}(\text{Graf}(f)) = \{(x, 0, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{tr}_{yz}(\text{Graf}(f)) = \{(0, y, -y^2) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

(c) curvas de nível 0, 2 e 4 e traços do gráfico da função $z = f(x, y) = x^2$;

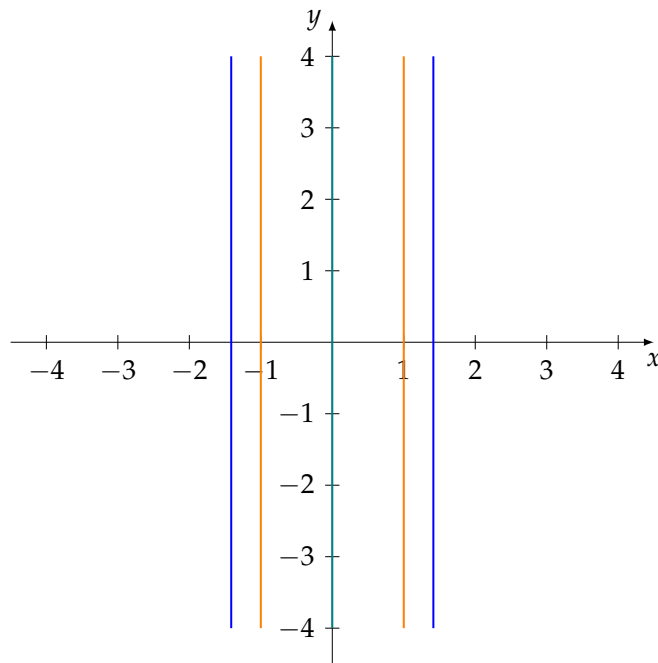
Solução: Temos:

$$f^{-1}[\{0\}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 0\} = \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$f^{-1}[\{1\}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 1\} = \{(-1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(1, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

$$f^{-1}[\{2\}] = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 = 2\} = \{(-\sqrt{2}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\} \cup \{(\sqrt{2}, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \in \mathbb{R}\}$$

As curvas de nível estão representadas abaixo:



Os traços são:

$$\text{tr}_{xz}(\text{Graf}(f)) = \{(x, 0, x^2) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{tr}_{yz}(\text{Graf}(f)) = \{(0, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}$$

(4) A temperatura em um ponto (x, y) de uma placa de metal plana é dada por:

$$T(x, y) = 9x^2 + 4y^2 \text{ (graus celsius)}$$

Pede-se:

(a) Encontrar a temperatura no ponto $(1, 2)$;

Solução: A temperatura no ponto $(1, 2)$ é:

$$T(1, 2) = 9 \cdot 1^2 + 4 \cdot 2^2 = 1 + 16 = 17 \text{ graus celsius}$$

(b) Encontrar a equação da curva ao longo da qual a temperatura tem um valor constante e igual a 36 graus celsius;

Solução: A curva consistirá dos pontos de coordenadas $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$T(x, y) = 36,$$

ou seja,

$$9x^2 + 4y^2 = 36$$

A curva tem, portanto, a seguinte equação:

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(5) Decidir se o domínio das seguintes funções é limitado ou não limitado:

(a) $f(x, y) = x - y$;

Solução: por se tratar de uma função linear, seu domínio é $\mathbb{R}^2$, um conjunto ilimitado.

(b) $f(x, y) = 4x^2 + 9y^2$;

Solução: por se tratar de uma função polinomial, seu domínio é $\mathbb{R}^2$, um conjunto ilimitado.

(c) $f(x, y) = x \cdot y$;

Solução: por se tratar de uma função polinomial, seu domínio é $\mathbb{R}^2$, um conjunto ilimitado.

(d) $f(x, y) = \sqrt{y - x}$;

Solução: o domínio desta função consiste dos pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que:

$$y - x > 0 \iff y > x$$

Esta região é ilimitada. De fato, dado qualquer número $M > 0$

(e) $f(x, y) = \frac{y}{x^2}$

Neste caso, devemos excluir do domínio pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ que anulem o denominador. Desta forma:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

(f) $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{16-x^2-y^2}}$

Neste caso, devemos excluir do domínio pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $16 - x^2 - y^2 < 0$ e tais que $16 - x^2 - y^2 = 0$. Desta forma:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 16\},$$

ou seja, o domínio é o interior do círculo centrado em $(0, 0)$ e de raio 4, logo, uma região limitada do plano.

(g) $f(x, y) = \arcsin(y - x)$

Neste caso, pertencem ao domínio os pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tais que $|y - x| < 1$, ou seja, pontos (x, y) tais que:

$$|y - x| \leq 1$$

$$-1 \leq y - x \leq 1$$

$$-1 + x \leq y \leq 1 + x$$

ou seja, a região delimitada pelas retas $y = x - 1$ e $y = x + 1$. Assim, tem-se uma região ilimitada.

(h) $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

Neste caso, temos:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 9\},$$

ou seja, o disco centrado em $(0, 0)$ e de raio 3 – portanto uma região limitada.