

Resolução da Lista 7 de MAT0121

Gabriel Sallouti Allegrini

Questão 1

- (a) Podemos tomar $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, ou seja,

$$f(x, y) = \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 - 2}$$

Como a função é polinomial, temos que $f(x)$ é contínua em seu domínio, onde:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 2\}$$

Como o ponto $(0,0)$ está contido no domínio, temos que:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3x^2 - y^2 + 5}{x^2 + y^2 - 2} = f(0, 0) = \frac{-5}{2}$$

- (b) Tomando $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, podemos fazer o mesmo que no item a). No entanto, nesse caso o domínio será:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 1\}$$

Ainda assim, o ponto no qual o limite deve ser calculado se encontra no domínio da função. Logo,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (3,4)} \sqrt{x^2 + y^2 - 1} = f(3, 4) = 2\sqrt{6}$$

- (c) Tomando $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, podemos calcular o limite apenas substituindo os valores do ponto ao qual o limite tende. Isso acontece porque funções trigonométricas são contínuas, assim como funções polinomiais, e o ponto $(0, \frac{\pi}{4})$ está contido no domínio da função.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \frac{\pi}{4})} \sec(x) \cdot \tan(y) = f(0, \frac{\pi}{4}) = 1$$

- (d) Tomando $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, não temos qualquer limitação para x ou y , assim:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Do mesmo modo que nas alternativas anteriores, temos que as funções exponenciais são contínuas em seu domínio. Uma vez que o ponto $(0, \ln(2))$ está contido no domínio da função, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0, \ln(2))} e^{x-y} = f(0, \ln(2)) = \frac{1}{e^{\ln(2)}} = \frac{1}{2}$$

- (e) Tomando $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, temos:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$$

Pela primeira vez, não podemos calcular o limite apenas substituindo os valores de x e y , uma vez que o ponto $(0,0)$ não está contido no domínio de $f(x,y)$. Nesse caso podemos separar o limite pedido em dois outros limites, de modo que se ambos forem iguais a números reais, podemos calcular o limite pedido pelo produto dos dois limites.

O primeiro pode ser calculado do mesmo modo que o item d):

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y = 1$$

E o segundo limite pode ser calculado utilizando o limite fundamental:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1$$

Como os dois limites calculados resultam em números reais, temos que o limite pedido pelo exercício pode ser obtido pelo produto desses dois limites calculados.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^y \cdot \sin(x)}{x} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} e^y \cdot \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x)}{x} = 1 \cdot 1 = 1$$

- (f) Tomando $f(x,y)$ como a função na qual o limite deve ser calculado, temos:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Como as funções logarítmicas são contínuas e o ponto $(1,1)$ está contido no domínio da $f(x,y)$, temos:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,1)} \ln |1 + x^2 \cdot y^2| = f(1, 1) = \ln(2)$$

Questão 2

- (a) Podemos fatorar o numerador, que é um quadrado da diferença, e em seguida cancelar o termo "(x-y)".

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - 2xy + y^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{(x - y)^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} (x - 1)$$

Agora, como x tende 1, temos $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} (x - 1) = 0$

- (b) Podemos colocar "y" em evidência no numerador.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{xy - y - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{y \cdot (x - 1) - 2x + 2}{x - 1}$$

Em seguida podemos colocar "-2" em evidência também no numerador.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{y \cdot (x - 1) - 2x + 2}{x - 1} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{y \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x - 1)}{x - 1}$$

Com isso, podemos cancelar os termos "(x-1)" no numerador e no denominador e calcular o limite final.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} \frac{y \cdot (x - 1) - 2 \cdot (x - 1)}{x - 1} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq 1}} y - 2 = -1$$

- (c) Podemos colocar tanto "y" como "4" em evidência no numerador.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{y + 4}{x^2y - xy + 4x^2 - 4x} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{y + 4}{y \cdot (x^2 - x) + 4 \cdot (x^2 - x)}$$

Podemos agora colocar o termo "(x² - x)" em evidência e cancelar (y+4).

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{y + 4}{(y + 4) \cdot (x^2 - x)} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{1}{x^2 - x}$$

Como a função $\frac{1}{x^2 - x}$ é contínua, por ser o inverso de um polinômio, e temos que o ponto (2,-4) está contido no domínio da função, podemos calcular o limite apenas aplicando esse ponto na função.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (2,-4) \\ y \neq -4, x \neq x^2}} \frac{1}{x^2 - x} = \frac{1}{2^2 - 2} = \frac{1}{2}$$

- (d) Podemos fatorar o numerador, que é um produto da soma pela diferença, e em seguida cancelar o termo "(x-y)" e calcular o limite final.

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{x^2 - y^2}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} \frac{(x + y) \cdot (x - y)}{x - y} = \lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (1,1) \\ x \neq y}} (x + y) = 2$$

Questão 3

- (a) Temos que a função seno é uma função contínua em seu domínio. Logo, basta definir o domínio de f(x,y) para saber em quais pontos a função é contínua. Neste caso vemos que não há nenhum obstáculo para calcular o seno, uma vez que f(x,y) pode ser calculada para quaisquer x e y, assim, temos:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Logo, a função f(x,y) é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

- (b) Como a função g(x,y) é o quociente de polinômios, temos que a função é contínua em todo o seu domínio. Logo, basta definir o domínio de g(x,y). Neste caso temos que o domínio de g(x,y) são todos os pontos do plano de modo que $x - y \neq 0$, uma vez que o denominador de uma razão precisa ser diferente de 0. Logo,

$$\text{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq y\}$$

Ou seja, a função é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ com exceção daqueles onde $x = y$.

- (c) Temos que a função seno é uma função contínua em seu domínio. Logo, basta definir o domínio de h(x,y) para saber em quais pontos a função é contínua. Neste caso a função não admite-se pontos com x=0 ou y=0, uma vez que o denominador de uma razão precisa ser diferente de 0. Assim, temos:

$$\text{dom}(h) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \text{ e } y \neq 0\}$$

Logo, a função é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ com exceção dos eixos x e y.

- (d) Temos que a função logarítmica é contínua em seu domínio. Logo, basta definir o domínio de f(x,y) para saber em quais pontos a função é contínua. Neste caso, para calcular $\ln(x^2 + y^2)$, temos que $x^2 + y^2 > 0$. Assim, o domínio de f(x,y) é:

$$\text{dom}(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 - (0, 0)\}$$

Logo, a função é contínua em todos os pontos do $\mathbb{R}^2$ com exceção do $(0,0)$.

- (e) Como a função $g(x,y)$ é o quociente de polinômios, temos que a função é contínua em todo o seu domínio. Logo, basta definir o domínio de $g(x,y)$. Neste caso, temos que $x^2 + 1 \neq 0$, o que é sempre garantido para qualquer x . Logo,

$$\text{dom}(g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$$

Assim, a função $g(x,y)$ é contínua em todo $\mathbb{R}^2$.

Questão 4

Consideremos uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ definida no interior de uma esfera de raio $r > 0$, exceto, possivelmente, no centro dessa esfera, (x_0, y_0, z_0) , e um número real L . Neste caso, dizemos que o limite de $f(x, y, z)$ conforme (x, y, z) tende a (x_0, y_0, z_0) é L se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ for possível exibir um $\delta = \delta((x_0, y_0, z_0), \varepsilon)$ tal que, sempre que estiver satisfeita a condição:

$$0 < \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2} < \delta$$

teremos:

$$|f(x, y, z) - L| < \varepsilon$$

Neste caso, escreveremos:

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = L$$

Questão 5

Em todos os itens desta questão, dado $\varepsilon > 0$, temos que mostrar que existe $\delta > 0$ tal que para todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tem-se uma das seguintes condições:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon \quad \text{ou} \quad |x| < \delta \text{ e } |y| < \delta \Rightarrow |f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

- (a) Vamos procurar um δ que nos garanta que:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

Substituindo pela função, temos:

$$|x^2 + y^2 - 0| < \varepsilon$$

Como todo o termo à esquerda é positivo, podemos tirar o módulo. Além disso, tirando raiz quadrada de ambos os lados, obtemos:

$$\sqrt{x^2 + y^2} < \sqrt{\varepsilon}$$

Assim, tomando $\delta = \sqrt{\varepsilon}$, garantimos que existe $\delta > 0$ para todo (x, y) que segue a primeira condição descrita no início do gabarito da questão 5. Para $\varepsilon = 0,01$ como dado pelo enunciado, temos que $\delta = \sqrt{0,01} = 0,1$ é suficiente.

(b) Vamos procurar um δ que nos garanta que:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

Substituindo pela função, temos:

$$\left| \frac{y}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon$$

Como $x^2 + 1 > 0$, podemos colocar o módulo apenas em y :

$$\frac{|y|}{x^2 + 1} < \varepsilon$$

Podemos reescrever $|y|$ como $\sqrt{y^2}$. Além disso temos que $\sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$ e também $\frac{1}{x^2 + 1} < 1$, de modo que:

$$\frac{\sqrt{y^2}}{x^2 + 1} < \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + 1} < \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$$

Assim, com base na primeira condição descrita no início do gabarito da questão 5, se tomarmos $\delta = \varepsilon$, ou seja, $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$, garantimos por consequência que $\frac{|y|}{x^2 + 1} < \varepsilon$

Para $\varepsilon = 0,05$ como dado pelo enunciado, temos que $\delta = 0,05$ é suficiente.

(c) Vamos procurar um δ que nos garanta que:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

Substituindo pela função, temos:

$$\left| \frac{x + y}{x^2 + 1} - 0 \right| < \varepsilon$$

Como $x^2 + 1 > 0$, podemos colocar o módulo apenas em $x + y$, ou, melhor ainda, separadamente em x e y :

$$\frac{|x| + |y|}{x^2 + 1} < \varepsilon$$

Podemos reescrever $|y|$ como $\sqrt{y^2}$ e $|x|$ como $\sqrt{x^2}$. Além disso temos que $\sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$ e também $\frac{1}{x^2 + 1} < 1$, de modo que:

$$\frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}{x^2 + 1} < \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + 1} < 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \cdot \delta$$

Assim, com base na primeira condição descrita no início do gabarito da questão 5, se tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$, garantimos por consequência que

$$\frac{|x| + |y|}{x^2 + 1} < \varepsilon$$

Para $\varepsilon = 0,01$ como dado pelo enunciado, temos que $\delta = 0,005$ é suficiente.

(d) Vamos procurar um δ que nos garanta que:

$$|f(x, y) - f(0, 0)| < \varepsilon$$

Substituindo pela função, temos:

$$\left| \frac{x + y}{2 + \cos(x)} - 0 \right| < \varepsilon$$

Como $2 + \cos(x) > 0$, podemos colocar o módulo apenas em $x + y$, ou, melhor ainda, separadamente em x e y :

$$\frac{|x| + |y|}{2 + \cos(x)} < \varepsilon$$

Podemos reescrever $|y|$ como $\sqrt{y^2}$ e $|x|$ como $\sqrt{x^2}$. Além disso temos que $\sqrt{y^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$, $\sqrt{x^2} < \sqrt{x^2 + y^2}$ e também $\frac{1}{2 + \cos(x)} \leq 1$, de modo que:

$$\frac{\sqrt{x^2} + \sqrt{y^2}}{2 + \cos(x)} < \frac{2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2}}{2 + \cos(x)} \leq 2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} < 2 \cdot \delta$$

Assim, com base na primeira condição descrita no início do gabarito da questão 5, se tomarmos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$, ou seja, $2 \cdot \sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$, garantimos por consequência que

$$\frac{|x| + |y|}{x^2 + 1} < \varepsilon$$

Para $\varepsilon = 0,02$ como dado pelo enunciado, temos que $\delta = 0,01$ é suficiente.