Resolução da Lista 8 de MAT0121

Gabriel Sallouti Allegrini

Questão 1

Sejam $R \subseteq \mathbb{R}^3$, $(x_0, y_0, z_0) \in R$ e $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Dizemos que f é contínua em (x_0, y_0, z_0) se, e somente se, dado qualquer $\varepsilon > 0$ existir algum $\delta > 0$ tal que:

$$|| \ (x, y, z) - (x_0, y_0, z_0) \ || < \delta \ \Rightarrow | \ f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) \ | < \varepsilon$$

Em termos de limites, podemos dizer que uma função $f : R \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ é contínua em $(x_0, y_0, z_0) \in R' \cap R$ se, e somente se,

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} f(x, y, z) = f(x_0, y_0, z_0)$$

Questão 2

Podemos separar a função em que o limite está sendo calculado em outras duas funções:

$$f(x, y) = x \cdot y \qquad\qquad g(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y = 0$

Assim, basta mostrar que $g(x, y)$ é uma função limitada em $(0, 0)$ para a utilização do Teorema 7 da Agenda 6 e conclusão de que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y \cdot \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0$

Apesar da função $g(x, y)$ não estar definida em (0,0), ela está definida em todo o restante do plano $\mathbb{R}^2$. Podemos avaliar se a função é limitada em torno do (0,0) então. Como a função é a divisão de uma subtração de termos positivos pela soma desses mesmos termos, temos que $-1 < g(x, y) < 1$, uma vez que o numerador nunca poderá ser maior que o denominador. Assim, $g(x, y)$ é uma função limitada em todo o seu domínio.

Sabendo então que $g(x, y)$ é limitada e que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y = 0$, temos pelo Teorema 7 da Agenda 6:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x \cdot y \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x, y) \cdot g(x, y) = 0$$

Questão 3

(a) Podemos separar a $f(x,y)$ em outras duas funções:

$$g(t) = e^t \qquad\qquad h(x,y) = \frac{x+y}{x-y}$$

Pela Agenda 3, já sabemos que a função exponencial é contínua em seu domínio, logo $g(t)$ é contínua em $f(2,1) = 3$. Para a análise de $h(x,y)$ podemos pensar novamente em duas funções separadas:

$$j(x,y) = x+y \qquad\qquad k(x,y) = x-y$$

Tanto $j(x,y)$ como $k(x,y)$ são contínuas pelo Teorema 16 da Agenda 6, já que são a soma e subtração de duas funções polinomiais, ou seja, contínuas (exemplo 18 da Agenda 6). O mesmo ocorre para $h(x,y)$, que é a divisão de $j(x,y)$ por $k(x,y)$, ambas contínuas. Vale destacar como observação que até então as funções eram contínuas para todo o plano $\mathbb{R}^2$, mas esta última passagem remove do domínio os pontos onde $x - y = 0$. No entanto, isso não altera a resolução do exercício, uma vez que é pedido para avaliar a continuidade em $(2,1)$.

Por fim, podemos utilizar o Teorema 21 da Agenda 6 e concluir que $f(x,y)$ é contínua no ponto $(2,1)$

(b) Podemos utilizar o mesmo raciocínio que o da alternativa passada. Podemos separar $g(x,y,z)$ em outras duas funções:

$$f(t) = sen(t) \qquad\qquad h(x,y,z) = 3x + 2y - z$$

Pela Agenda 3, já sabemos que a função seno é contínua em seu domínio, logo $f(t)$ é contínua em $h(1,-1,1) = 3$.

Para a análise de $h(x,y,z)$ podemos expandir o conceito do Teorema 16 e do exemplo 18, ambos da Agenda 6, para três variáveis. Assim, por $h(x,y,z)$ ser a soma de funções polinomiais, ou seja, contínuas em $\mathbb{R}^3$, temos que $h(x,y,z)$ também é contínua em todo $\mathbb{R}^3$. Por fim, podemos expandir o Teorema 21 da Agenda 6 para três variáveis e concluir que $g(x,y,z)$ é contínua em $(1,-1,1)$

(c) Temos que a função $h(x, y)$ pode ser descrita pela subtração de duas funções, $tan(x)$ por $cos(y)$.

Cada uma dessas funções depende de apenas uma variável e sabemos pela Agenda 3 que a função tangente e a função cosseno são contínuas em seus domínios, que incluem o ponto $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$. Assim, pelo Teorema 16 da Agenda 6,temos que $h(x, y)$ também é contínua em $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$.

(d) Do mesmo modo que nas alternativas anteriores, podemos separar a função $l(x, y)$ em outras diversas funções. Assim, $l(x, y)$ pode ser descrita como a subtração e a composição dessas funções. Como essas funções primeiras são contínuas, podemos através do Teorema 16 e do Teorema 21 da Agenda 6, ir relacionando-as até que cheguemos na função $l(x, y)$. Como todas as funções são contínuas no ponto $(\frac{\pi}{4}, 0)$, $l(x, y)$ também será.

Questão 4

(a) Para calcular o limite de (x, y) tendendo a $(0, 0)$ através de qualquer reta que passa pela origem, definidas por S_m no enunciado, basta calcular:

$$\lim_{x\to 0} f(x, mx) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2mx}{3x^2 + 3m^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx^3}{3x^2 \cdot (1 + m^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{2mx}{3 \cdot (1 + m^2)} = 0$$

(b) Para calcular o limite de (x, y) tendendo a $(0, 0)$ ao longo da parábola $\mathscr{P}$ basta calcular:

$$\lim_{x\to 0} f(x, x^2) = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2x^2}{3x^2 + 3x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^4}{3x^4 \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)} = \lim_{x\to 0} \frac{2}{3 \cdot (\frac{1}{x^2} + 1)} = 0$$

(c) Se passarmos $f(x, y)$ para as coordenadas polares, obtemos um limite de apenas um variável, uma vez que para (x, y) tendendo a $(0, 0)$, basta r tender a 0. Isso acontece uma vez que θ pode ser qualquer valor para descrever o ponto $(0, 0)$ das coordenadas cartesianas. Logo,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{2x^2y}{3x^2 + 3y^2} = \frac{2}{3} \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = \frac{2}{3} \lim_{r\to 0} \frac{r^3 \cos(\theta)^2 \sin(\theta)}{r^2} =$$

$$\frac{2}{3} \lim_{r\to 0} r \cos(\theta)^2 \sin(\theta) = 0$$

Assim concluímos que o limite existe e é igual a 0.

Questão 5

(a) Para calcular o limite pedido, podemos dividir a conta em diversos outros limites mais fáceis que já sabemos calcular e utilizar as propriedades operatórias de limites (Teorema 10 da Agenda 6).

Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} cos(x) = 1$ e que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} sin(y) = 0$. Assim, temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} cos(x) + sin(y) = 1$

Também sabemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^x = \lim_{(x,y)\to(0,0)} e^y = 1$. Desse modo, temos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} e^x + e^y = 2$

Assim, basta fazer a divisão desses limites e obtemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^x + e^y}{cos(x) + sin(y)} = \frac{2}{1} = 2$$

(b) Podemos fazer o mesmo que na alternativa passada, no entanto, estendendo o conceito do Teorema 10 da Agenda 6 para três variáveis.

Assim, podemos calcular dois limites de funções contínuas (polinomiais) e depois realizar o quociente entre eles:

$$\lim_{(x,y,z)\to(0,-1,0)} y^3 + xz^2 = -1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

Desse modo, obtemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^3 + xz^2}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{-1}{1} = 1$$

Questão 6

Para essa questão, é interessante passar a função $f(x, y)$ para as coordenadas polares. Desse modo, obtemos que:

$$f(r, \theta) = \begin{cases} r^2, & \text{se } r^2 \leq 1 \\ 0, & \text{se } r^2 > 1 \end{cases}$$

(a) Para $x_0^2 + y_0^2 \neq 1$, ou seja, $r^2 \neq 1$, temos dois possíveis casos:

Quando $r^2 < 1$, temos que $f(r, \theta)$ assume sempre a função $f = r^2$, que é uma função polinomial e contínua em seu domínio. Nesse caso é importante que $r^2 < 1$, uma vez que uma esfera aberta centrada em qualquer ponto dessa região, sempre terá pontos calculados pela mesma função (que é contínua) em sua volta, garantindo que quanto menor a distância entre um ponto definido e outro qualquer, menor também será o valor das funções desses pontos. Isso não valeria para $r^2 = 1$, o que será visto na alternativa b).

O outro caso ocorre quando $r^2 < 1$. Do mesmo modo, a função $f(r, \theta)$ assume sempre a função $f = 0$, que é uma função constante, logo contínua em seu domínio. Novamente, sendo $r > 1$, qualquer esfera aberta centrada em qualquer ponto dessa região, terá pontos calculados pela mesma função (que é contínua) em sua volta.

(b) Para $r^2 = 1$, é preciso interpretar que a função se encontra em uma fronteira. Isso faz com que toda esfera aberta centrada em um ponto com $r^2 = 1$, ou melhor, $r = 1$, contenha pontos onde a função é $f = r^2$ e $f = 0$. Isso não necessariamente garante que a função é descontínua, uma vez que essas funções poderiam se encaixar perfeitamente. No entanto, isso não é visto nesse exemplo, onde quando $r = 1 \Rightarrow f = 1$ e para qualquer $r > 1 \Rightarrow f = 0$. Assim, independente do quão próximo um ponto qualquer chegue de um ponto onde $r = 1$, a diferença entre as funções desses pontos não diminui quando esse ponto se aproxima a partir da região $r^2 > 1$, de modo que essa diferença será sempre 1.

Questão 7

Não é necessário que f esteja definida em (x_0, y_0). Isso porque não há qualquer relação entre $f(x_0, y_0)$ e $lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$. Isso fica claro na definição de limite vista na Definição 85 da Agenda 5, onde em nenhum momento o valor de $f(x_0, y_0)$ é considerado. Além disso, quando $f(x_0, y_0)$ existir, há duas possibilidades, ele ser igual ou diferente ao $lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x, y)$, ou seja, a função é contínua ou discontínua naquele ponto. Isso exemplifica a ideia de que não há relação entre o limite e a função no ponto. De modo mais simplificado, é possível ver o limite como o o valor esperado de $f(x_0, y_0)$ quando (x, y) tende a (x_0, y_0), ou seja, o valor esperado de $f(x_0, y_0)$ com base em pontos infinitamente próximos, mas diferentes de (x_0, y_0).

Questão 8

(a) No caso de f ser contínua em (x_0, y_0) podemos concluir, pela definição de continuidade, que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0) \;\Rightarrow\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = 3$$

(b) No caso de f não ser contínua em (x_0, y_0), não conseguimos saber o valor exato de $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)$. No entanto, por não ser contínua, sabemos que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq f(x_0,y_0) \;\Rightarrow\; \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \neq 3$$

Questão 9

Do passo 1, temos $|g(x,y) - L| < \varepsilon$. Podemos retirar o módulo e adicionar outra desigualdade, de modo que no final obtemos a desigualdade 1:

$$|g(x,y) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < g(x,y) - L < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < g(x,y) < L + \varepsilon$$

As desigualdades 2 e 3 (que devem ser "$\leq$" ao invés de "$<$") são garantidas pelo próprio enunciado do teorema:

$$(\forall (x,y) \in B((x_0,y_0),\eta))(g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y))$$

De onde obtemos: $g(x,y) \leq f(x,y) \leq h(x,y)$

Já a desigualdade 4 pode ser obtida do mesmo modo que a desigualdade 1. Do passo 2 temos $|h(x,y) - L| < \varepsilon$. Podemos retirar o módulo e adicionar outra desigualdade, de modo que no final obtemos a desigualdade 4:

$$|h(x,y) - L| < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad -\varepsilon < h(x,y) - L < \varepsilon \quad \Rightarrow \quad L - \varepsilon < h(x,y) < L + \varepsilon$$

Questão 10

Sabemos que para qualquer $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ vale a desigualdade:

$$1 - \frac{x^2y^2}{3} < \frac{\arctan(x \cdot y)}{x \cdot y} < 1$$

Podemos calcular o limite quando (x,y) tende a $(0,0)$ das funções que limitam a função de interesse $\dfrac{\arctan(x \cdot y)}{x \cdot y}$. Assim:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 - \frac{x^2y^2}{3} = 1$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

Logo, pelo Teorema do Confronto para duas váriaveis, visto na questão 9 dessa lista, podemos concluir que:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan(x \cdot y)}{x \cdot y} = 1$$

Questão 11

Podemos separar o limite pedido em duas funções:

$$f(x,y) = y \qquad\qquad g(x,y) = \sin(\frac{1}{x})$$

Sabemos que $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y = 0$

Além disso, temos que a função $g(x,y)$ é limitada em todos os pontos do seu domínio, visto que:

$$-1 \leq \sin(\frac{1}{x}) \leq 1$$

Desse modo, pelo Teorema 7 da Agenda 6, temos que:

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) \cdot g(x,y) = \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} y \cdot \sin(\frac{1}{x}) = 0$$