

Resolução da Lista 9 de MAT0121

Gabriel Sallouti Allegrini

Questão 1

- (a) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$, consideramos a variável y como uma constante e derivamos em relação à variável x :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(3xy + 6x - y^2) = \frac{d}{dx}(3xy) + \frac{d}{dx}(6x) + \frac{d}{dx}(-y^2) = 3y + 6 + 0 = 3y + 6$$

- (b) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, consideramos a variável x como uma constante e derivamos em relação à variável y . Para isso, utilizamos a regra do quociente:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy} \left(\frac{x+y}{\sqrt{y^2-x^2}} \right) = \frac{\frac{d}{dy}(x+y) \cdot \sqrt{y^2-x^2} - (x+y) \cdot \frac{d}{dy}\sqrt{y^2-x^2}}{(\sqrt{y^2-x^2})^2} = \\ &= \frac{1 \cdot \sqrt{y^2-x^2} - (x+y) \cdot \frac{y}{\sqrt{y^2-x^2}}}{(\sqrt{y^2-x^2})^2} = \frac{y^2-x^2 - (x+y)y}{(\sqrt{y^2-x^2})^3} = \frac{-x}{(y-x)\sqrt{y^2-x^2}}\end{aligned}$$

- (c) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, consideramos a variável x como uma constante e derivamos em relação à variável y . Para isso, utilizamos a regra do produto:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \frac{d}{dy} \left(e^{\frac{y}{x}} \cdot \ln \left(\frac{x^2}{y} \right) \right) = \frac{d}{dy} \left(e^{\frac{y}{x}} \right) \cdot \ln \left(\frac{x^2}{y} \right) + \left(e^{\frac{y}{x}} \right) \cdot \frac{d}{dy} \left(\ln \left(\frac{x^2}{y} \right) \right) = \\ &= \frac{e^{\frac{y}{x}}}{x} \ln \left(\frac{x^2}{y} \right) + e^{\frac{y}{x}} \left(-\frac{1}{y} \right) = \frac{e^{\frac{y}{x}} (2 \ln(x) - \ln(y))}{x} - \frac{e^{\frac{y}{x}}}{y}\end{aligned}$$

- (d) Para calcular $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z)$, consideramos as variáveis x e z como constantes e derivamos em relação à variável y :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{d}{dy}(x^2y - 3xy^2 + 2yz) = \frac{d}{dy}(x^2y) + \frac{d}{dy}(-3xy^2) + \frac{d}{dy}(2yz) = x^2 - 6xy + 2z$$

Questão 2

- (a) Primeiro devemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para depois calcular as 4 derivadas parciais de segunda ordem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(x + y + xy) = 1 + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}(x + y + xy) = 1 + x$$

Agora podemos calcular cada uma das 4 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{d}{dx}(1 + y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{d}{dy}(1 + y) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{d}{dy}(1 + x) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{d}{dx}(1 + x) = 1$$

- (b) Primeiro devemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para depois calcular as 4 derivadas parciais de segunda ordem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2y + \cos(y) + y \sin(x)) = 2xy + y \cos(x)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}(x^2y + \cos(y) + y \sin(x)) = x^2 - \sin(y) + \sin(x)$$

Agora podemos calcular cada uma das 4 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{d}{dx}(2xy + y \cos(x)) = 2y - y \sin(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{d}{dy}(2xy + y \cos(x)) = 2x + \cos(x)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{d}{dy}(x^2 - \sin(y) + \sin(x)) = -\cos(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{d}{dx}(x^2 - \sin(y) + \sin(x)) = 2x + \cos(x)$$

- (c) Primeiro devemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para depois calcular as 4 derivadas parciais de segunda ordem.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(xe^y + y + 1) = e^y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}(xe^y + y + 1) = e^y x + 1$$

Agora podemos calcular cada uma das 4 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{d}{dx}(e^y) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{d}{dy}(e^y) = e^y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{d}{dy}(e^y x + 1) = e^y x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{d}{dx}(e^y x + 1) = e^y$$

- (d) Primeiro devemos calcular $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$, para depois calcular as 4 derivadas parciais de segunda ordem. Nessa questão é preciso utilizar regra da cadeia e regra do quociente.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = -\frac{y}{y^2 + x^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy}(\arctan\left(\frac{y}{x}\right)) = \frac{x}{y^2 + x^2}$$

Agora podemos calcular cada uma das 4 derivadas parciais de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{d}{dx}\left(-\frac{y}{y^2 + x^2}\right) = \frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) = \frac{d}{dy}\left(-\frac{y}{y^2 + x^2}\right) = \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = \frac{d}{dy}\left(\frac{x}{y^2 + x^2}\right) = -\frac{2yx}{(y^2 + x^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{d}{dx}\left(\frac{x}{y^2 + x^2}\right) = -\frac{-y^2 + x^2}{(y^2 + x^2)^2}$$

Questão 3

(a, b e c) Nessas questões temos funções que não se encontram definidas no ponto de estudo da diferenciabilidade, que é $(0, 0)$. A definição mais fundamental de diferenciabilidade (Definição 21 da Agenda 7) avalia a aproximação por um funcional linear em uma vizinhança de (x_0, y_0) . No entanto, quando $f(x, y)$ não está definida em $(0, 0)$, não é possível fazer essa comparação. Assim, temos que as funções das alternativas a), b) e c) não são diferenciáveis em $(0, 0)$.

(d) Primeiramente, vemos que $f(x, y)$ está definida no ponto $(0, 0)$, logo podemos continuar avaliando sua diferenciabilidade. Caso ela não estivesse definida, já concluiríamos que a função não seria diferenciável nesse ponto.

Para provar que $f(x, y)$ é diferenciável em $(0, 0)$, basta provar que existem $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$ e que:

$$\lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{f(\Delta x, \Delta y) - f(0, 0) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \cdot \Delta y}{\|(\Delta x, \Delta y)\|}$$

Podemos então calcular primeiro as derivadas parciais:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx}(\sqrt[3]{x} \cdot \cos(y)) = \frac{\cos(y)}{3x^{\frac{2}{3}}}$$

No entanto, quando vamos substituir o ponto $(0, 0)$ na derivada obtida, vemos que ela não está definida para $x = 0$. De modo que $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ não existe e a função não é diferenciável em $(0, 0)$ pelo Teorema 30 da Agenda 7.

Questão 4

(a) Para encontrar a equação para o plano tangente ao parabolóide no ponto $P_0 = (6, 10, 8)$ basta utilizar a Definição 38 da Agenda 7. Obtemos dela:

$$z = f(6, 10) + \frac{\partial f}{\partial x}(6, 10) \cdot (x - 6) + \frac{\partial f}{\partial y}(6, 10) \cdot (y - 10)$$

Para realizar esse cálculo precisamos conhecer as derivadas parciais de $f(x, y)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right) = \frac{2x}{9} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(6, 10) = \frac{4}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{d}{dy} \left(\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} \right) = \frac{2y}{25} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(6, 10) = \frac{4}{5}$$

Agora podemos substituir esses valores na equação obtida anteriormente, de modo que chegamos a:

$$z = \frac{4x}{3} + \frac{4y}{5} - 8$$

- (b) Sabemos que a viga passa pelo ponto P_0 e é tangente a ele. Além disso, sabemos que a outra ponta da viga se encontra no eixo Oz , ou seja, em um ponto do tipo $(0, 0, z_0)$. Assim, basta utilizar a equação do plano tangente a P_0 obtida na alternativa anterior, para descobrir a coordenada z_0 quando $x = y = 0$.

$$z = \frac{4x}{3} + \frac{4y}{5} - 8 \Rightarrow z_0 = \frac{4 \cdot 0}{3} + \frac{4 \cdot 0}{5} - 8 = -8$$

Para descobrirmos o comprimento da viga, basta descobrir o vetor que liga o ponto $(0, 0, -8)$ ao ponto $(6, 10, 8)$ e calcular o seu módulo:

$$\vec{L} = (6, 10, 8) - (0, 0, -8) = (6, 10, 16)$$

$$||\vec{L}|| = \sqrt{6^2 + 10^2 + 16^2} = 14\sqrt{2}$$

Logo, obtemos que a viga deve ter $14\sqrt{2}$ u.c.